**Roteiro de Estudos**

**OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N3 – CICLO 7 – ENCONTRO 1**

Assuntos a serem abordados:

* Equações e inequações quadráticas (Álgebra).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

* Material Teórico do Portal da Matemática, “Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos”, F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/3yjyn4r7tbggw>

* Material Teórico do Portal da Matemática, “Equações de Segundo Grau: outros resultados importantes”, F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/rimiriztlw08.pdf>

* Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos”.

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/equacoes.pdf>

* Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Relações entre coeficientes e raízes”.

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/raizes.pdf>

* Material Teórico do Portal da Matemática, "Inequações Produto", F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/9a5p1x9bqqskk.pdf>

- Videoaulas do Portal da Matemática:

**Equações quadráticas**:

9º Ano do Ensino Fundamental Módulo “Equações do Segundo Grau” (<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=25&tipo=1>) videoaulas: "Equação do 2º Grau – Parte 1: Exemplos e Definição", "Equação do 2º Grau – Parte 2: Exemplo", "Equação do 2º Grau – Parte 3: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 4: Fórmula Resolvente da Equação do Segundo Grau", "Equação do 2º Grau – Parte 5: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 6: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 7: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 8: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 9: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 10: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 1", "Equação do 2º Grau – Parte 11: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 2", "Equação do 2º Grau – Parte 12: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 3", "Equação do 2º Grau – Parte 13: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 4".

**Inequações quadráticas**:

1º Ano do Ensino Médio Módulo “Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau” (<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=98>) videoaulas: "Introdução às Inequações Produto", "Inequações Produto: Aula de Exercícios - 01", "Inequações Produto: Aula de Exercícios - 02".

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 7 – Encontro 1

**ENUNCIADOS**

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo desse encontro. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

**Exercício 1:**

Ache os valores reais de para os quais a equação não tem raízes reais.

**Exercício 2:**

Resolva a inequação .

**Exercício 3:**

Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R$ e unidades do produto B, pagando R$ . Sabendo que o total de unidades compradas foi de e que o preço unitário do produto A excede em R$ o preço unitário do produto B, determine o número de unidades compradas do produto A.

**Exercício 4:**

Três homens A, B e C, trabalhando juntos, realizam uma tarefa em horas. Se trabalhassem sozinhos, A executaria a tarefa em horas; B, em horas; C, em horas. Calcule .

**Exercício 5 (Questão 92 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 - 2010):**

A soma denota a soma dos primeiros números naturais terminados em . Qual é o menor valor de para que seja maior do que ?

**Exercício 6 (Questão 81 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010 – Adaptada):**

Sobre a equação , o certo é afirmar que:

a) não possui raízes reais;

b) tem três raízes reais distintas;

c) tem duas raízes iguais;d) tem apenas uma raiz real;

**Exercício 7 (Questão 13 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):**

Para cercar um terreno retangular de metros quadrados com uma cerca formada por dois fios de arame foram usados metros de arame. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno?

**Exercício 8 (Questão 6 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2008):**

Ronaldo quer cercar completamente um terreno retangular de m2. Ao calcular o comprimento da cerca ele se enganou, pois fez os cálculos como se o terreno fosse quadrado e comprou metros de cerca a menos do que o necessário. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno?

**Exercício 9 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009):**

A figura mostra um quadrado de lado m dividido em dois retângulos e um quadrado. As áreas do quadrado e do retângulo são iguais. Qual é a área do retângulo ?

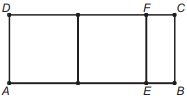


**Exercício 10 (Questão 16 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):**

João colocou moedas iguais em um pote e pediu a seus filhos, de idades distintas, que cada um deles colocasse no pote uma moeda para cada irmão mais velho e retirasse do pote duas moedas para cada irmão mais novo. Quando todos os filhos terminaram de fazer isso, restaram no pote moedas. Quantos são os filhos de João?

**Exercício 11 (Questão 8 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2012):**

A figura mostra um retângulo decomposto em dois quadrados e um retângulo menor . Quando é semelhante a , dizemos que é um retângulo de prata e a razão é chamada razão de prata. Qual é o valor da razão de prata?



**Exercício 12 (Questão 7 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2017):**

Se , com , e , qual é o valor de ?

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 7 – Encontro 1

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1:**

A equação quadrática não tem raízes reais se, e somente se, o seu discriminante é negativo se, e somente se, se, e somente se, .

**Solução do Exercício 2:**

Chamando de , a inequação torna-se . Para resolver essa inequação quadrática, inicialmente vamos resolver a equação quadrática . As raízes dessa equação quadrática são dadas por , ou seja, as raízes são e . Assim, se, e somente se, e , ou e , se, e somente se, e , ou e . Como , não é possível e . Logo, se, e somente se, . Como , tem-se se, e somente se, . Como , para todo , então se, e somente se, se, e somente se, se, e somente se, e , ou e , se, e somente se, e , ou e . Como , não é possível e . Assim, se, e somente se, .

**Solução do Exercício 3:**

Seja o número de unidades compradas do produto A. Então, foram compradas unidades do produto B. Os preços unitários dos produtos A e B são iguais a reais e reais, respectivamente. Como o preço unitário do produto A excede em R$ o preço unitário do produto B, então e, portanto, . As raízes dessa equação quadrática são dadas por , ou seja, as raízes são e . Mas, o número de unidades do produto A compradas não pode ser , pois, nesse caso, o número de unidades do produto B seria , o que não é possível, pois o número de unidades compradas deve ser um número inteiro não negativo. Assim, .

**Solução do Exercício 4:**

Em hora, A, B e C, trabalhando sozinhos, fariam , e da tarefa, respectivamente. Trabalhando juntos, fariam da tarefa. Logo, e, portanto, . As raízes dessa equação quadrática são dadas por , ou seja, as raízes são e . Como deve ser positivo, então .

**Solução do Exercício 5:**

A soma dada é a soma dos primeiros de uma progressão aritmética com primeiro termo e razão , de modo que o -ésimo termo é e, portanto, . Queremos achar o menor número inteiro positivo tal que , ou seja, , ou seja, . Para resolver essa inequação quadrática, inicialmente vamos resolver a equação quadrática . As raízes dessa equação quadrática são dadas por , ou seja, as raízes são e . Assim, se, e somente se, e , ou e , se, e somente se, e , ou e . Como , tem-se e se, e somente se, , e e se, e somente se, . Assim, se, e somente se, ou . Como deve ser inteiro positivo e , então se, e somente se, , sendo que o menor valor para é .

**Solução do Exercício 6:**

A alternativa correta é a (d). Observe que e, logo, é uma solução da equação dada, sendo que a opção (a) fica descartada. Agora, para ver se a equação dada tem uma, duas ou três soluções, só precisamos ver se a equação de quadrática não tem solução, ou tem uma ou tem duas soluções. Mas, o discriminante dessa equação é , de modo que essa equação não possui raízes reais. Assim, a equação inicial tem uma única raiz real ().

*Observação*: Outra maneira (e mais simples) de mostrar que é observar que e e, portanto, e .

**Solução do Exercício 7:**

Denotemos por o comprimento e por a largura do terreno. Então, o perímetro do terreno é e sua área é . Já sabemos a área do terreno, que é m2, donde . O enunciado nos diz que foram usados m de arame para uma cerca de dois fios e, assim, o perímetro do terreno é m. Logo, e concluímos que . Segue que e são dois números cuja soma é e o produto é . É facil ver que esses números são e . Assim, a diferença pedida é m. Mais geralmente, sabemos que o problema de determinar dois números reais dos quais se conhece a soma e o produto equivale a achar as soluções da equação quadrática . As raízes reais desta equação (caso existam) serão os números procurados. No nosso caso, temos que e são raízes de . As raízes dessa equação são dadas por , ou seja, as raízes são e .

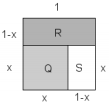
**Solução do Exercício 8:**

Pensando que o terreno fosse quadrado, Ronaldo calculou seu lado como metros, e comprou 4 metros de cerca. Mas, ele precisaria de metros de cerca, que é o perímetro do terreno. Se é o comprimento e a largura do terreno (supondo ), temos as equações , que expressa o perímetro, e , que expressa a área. Logo e . Logo, e são raízes da equação quadrática . As raízes dessa equação são e , donde .

Outra maneira de determinar é através da identidade , donde e, logo, .

**Solução do Exercício 9:**

Seja o lado do quadrado . A área de é, então, , a área de é e a área de é . Como as áreas de e são iguais, então , ou seja, . As raízes dessa equação quadrática são dadas por . Como o lado de é positivo, então e, logo, a área de é m2.



**Solução do Exercício 10:**

Considerando cada par de irmãos, o mais velho retira duas moedas do pote pelo irmão mais novo, enquanto o mais novo coloca uma moeda no pote pelo mais velho. Logo, para cada par de irmãos, uma moeda é retirada do pote. Se forem os filhos de João, há pares de irmãos e, portanto, este é o número total de moedas retiradas do pote no processo. Logo, temos . Daí resulta . Resolvendo essa equação quadrática, obtemos ou . Logo, João tem filhos.

*Outra solução*: Na tabela, numeramos os irmãos de a , com idades crescentes:

Screen Shot 07-06-18 at 10.41 AM.PNG

A segunda linha é o dobro da primeira e, portanto, o que sobra de moedas é igual à soma e, portanto, . Daí resulta . Resolvendo essa equação quadrática, obtemos ou . Logo, João tem filhos.

**Solução do Exercício 11:**

Da semelhança dos retângulos e temos . Fazendo (a razão de prata), temos , ou seja, . As raízes dessa equação quadrática são dadas por , sendo que a razão de prata é a raiz positiva, a saber, .

**Solução do Exercício 12:**

Como , então e, logo, . Como , então e, logo, , já que . A equação quadrática pode ser facilmente resolvida fazendo , donde ou . Como e são diferentes, então . Como e , então .

**Roteiro de Estudos**

**OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N3 – CICLO 7 – ENCONTRO 2**

Assuntos a serem abordados:

* Funções quadráticas e seus gráficos (Funções).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

* Material Teórico do Portal da Matemática, “Função Quadrática: Definições, Máximos e Mínimos”, F. S. Benevides, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/83bz2u7aae0w8.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática, “Gráfico da função quadrática e inequações de segundo grau”, F. S. Benevides, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/a43rewocf8084.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática, “Função Quadrática: Exercícios”, F. S. Benevides, A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8ecefhj511c0w.pdf>

* Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Noções Básicas”, T. Miranda, C. Assis.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/vp5hzixwqfkcc.pdf

* Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos”, T. Miranda, C. Assis.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/bqyo6wbk9qo8g.pdf

* Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Gráfico de uma função quadrática”, T. Miranda, C. Assis.

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/flfb6cvdym80w.pdf>

* Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Resolução de Exercícios”, T. Miranda, C. Assis.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cspa0ku3yyiw.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

**Funções quadráticas e seus gráficos**:

1º Ano do Ensino Médio Módulo “Função Quadrática” (<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=62>) videoaulas: “Função Quadrática: Definição, Máximos e Mínimos”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 1”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 2”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 3”, " Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 1", " Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 2", " Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 3", “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 1”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 2”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 3”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 4”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 5”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 6”.

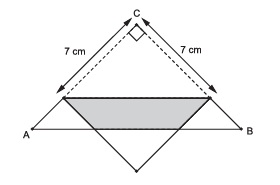
Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 7 – Encontro 2

**ENUNCIADOS**

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo desse encontro. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

**Exercício 1 (Questão 4, itens (b) e (d) (modificado) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2013):**

A figura abaixo mostra um triângulo de papel , retângulo em e cujos catetos medem cm.

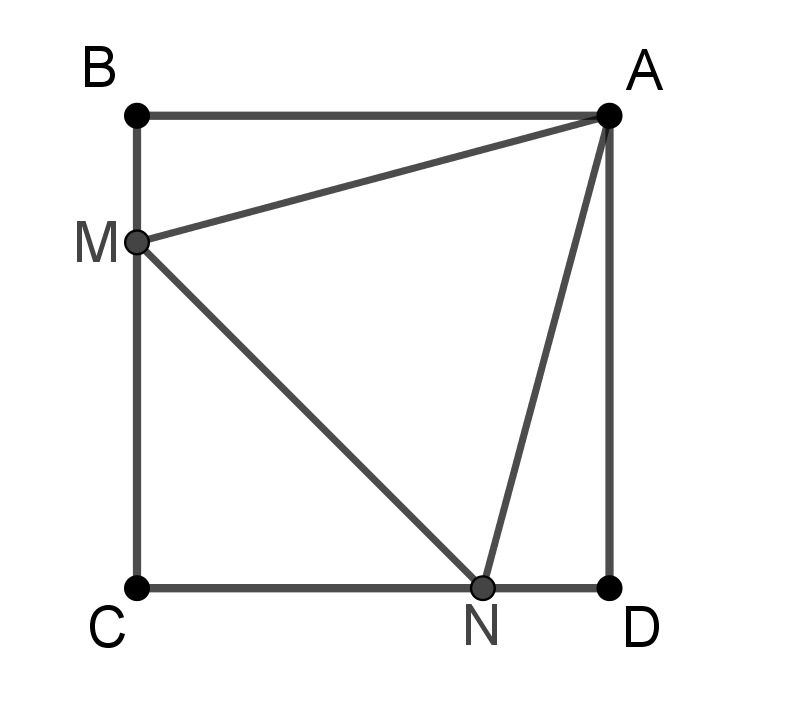


Para cada número tal que , marcam-se nos catetos os pontos que distam cm do ponto e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por a área, em cm2, da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura acima a área da região cinzenta, em cm2, é .

1. Escreva a expressão de para .
2. Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

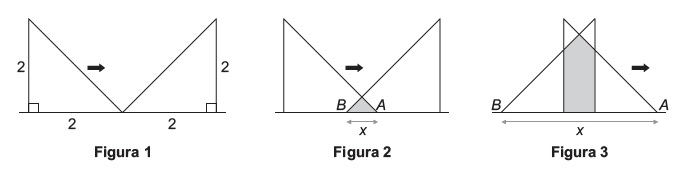
**Exercício 2:**

Na figura abaixo, é um quadrado de lado , , são pontos nos segmentos e respectivamente de tal forma que é um triângulo equilátero. Determine a área do triângulo .



**Exercício 3 (Questão 5, itens (b) e (c) (modificado) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2009):**

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, indica a distância entre os vértices e dos dois triângulos.



Para cada no intervalo , seja a área da região comum aos dois triângulos (em cinzas nas figuras.

1. Encontre as expressões de nos intervalos e .
2. Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

**Exercício 4 (Questão 5, itens (b) e (c) (modificado) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2007):**

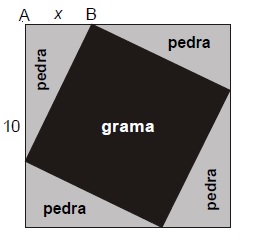
O Grêmio estudantil de Taperoá vai dar uma festa, vendendo ingressos a R$ . Para estimular a compra antecipada de ingressos, os diretores do Grêmio decidiram que:

* Os ingressos serão numerados a partir do número e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;
* Ao final da festa, cada participante receberá R$ para cada ingresso vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso.

1. Qual será o lucro do Grêmio se forem vendidos ingressos?
2. Quantos ingressos o Grêmio deve vender para ter o maior lucro possível?

**Exercício 5 (Questão 4, itens (b), (c), (d) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2005):**

Um prefeito quer construir uma praça quadrada de metros de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento está indicado por na figura.



1. Escreva a expressão da área do canteiro da grama em função de .

Sabe-se que o canteiro de grama custa R$ por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R$ por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

1. Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
2. Se o prefeito tem apenas R$ para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

**Exercício 6:**

Calcule o valor de na função

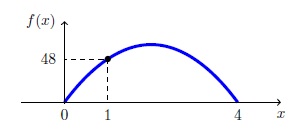
Para que seu mínimo seja .

**Exercício 7:**

Tenho material suficiente para erguer metros de cerca. Com ele pretendo construir um cercado retangular de m2 de área. É possível fazer isso? Se for, quais as medidas dos lados deste retângulo?

**Exercício 8:**

Um corpo arremessado tem sua trajetória representada pelo gráfico da função quadrática esboçada na figura abaixo. Qual é a altura máxima atingida por esse corpo?

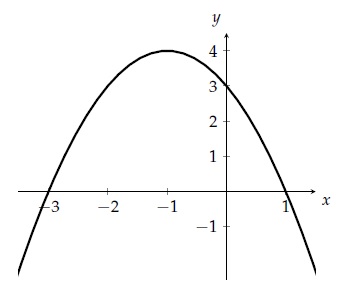


**Exercício 9:**

A equação da trajetória parabólica do salto de uma pulga é dado por . Essa pulga salta no ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas. Qual é a altura máxima atingida pela pulga?

**Exercício 10:**

Observe o gráfico abaixo de uma parábola e conclua a sua respectiva lei de função.

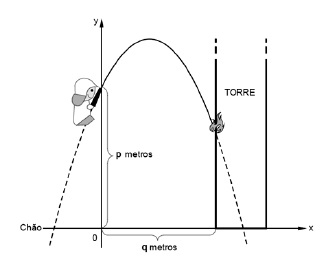


**Exercício 11:**

Qual é o conjunto imagem da função ?

**Exercício 12:**

A figura indica um bombeiro lançando um jato de água para apagar o fogo em um ponto de uma torre retilínea e perpendicular ao chão. A trajetória do jato de água é parabólica, e dada pela função , com e em metros.



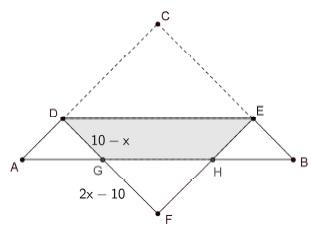
Sabendo que o ponto do fogo atingido pelo jato de água está a metros do chão, então, qual é o valor de , em metros?

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 7 – Encontro 2

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1:**

1. O triângulo é isósceles com ; logo , como vemos na figura abaixo.



Temos então .

1. O maior valor de é atingido no vértice da parábola, cuja abscissa é o ponto médio das raízes. Como , a abscissa do vértice é . Como , que é o maior valor da área de sobreposição.

**Solução do Exercício 2:**

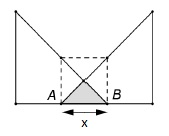
Observe que é um triângulo retângulo isósceles, seja o comprimento dos catetos do triângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos e , temos que

e como o triângulo é equilátero, temos . Simplificando a equação obtemos . Resolvendo a equação quadrática, obtemos

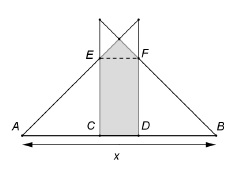
Como deve ser positivo, obtemos . A área do triângulo é

**Solução do Exercício 3:**

1. Considere primeiro . O triângulo cinza na figura abaixo



é um triângulo retângulo isósceles e portanto, sua área será da área do quadrado de lado . No caso específico de , a área é . Assim, para , temos . Quando , a figura é um pentágono, como ilustra a figura abaixo.



Temos então . Somando ambas expressões, obtemos

Ou seja, . Daí, . Vemos assim, que o pentágono pode ser decomposto em um retângulo de área e em um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa , e portanto de área . Assim, para , tem-se

1. Para , o maior valor possível de é . Para . O maior valor possível de se encontra no ponto médio das raízes de , isto é, no ponto

Como pertence ao intervalo , o máximo de nesse intervalo é . Como , concluímos que este é o valor máximo de no intervalo .

**Solução do Exercício 4:**

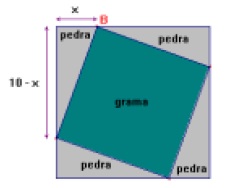
1. O valor de venda de ingressos é . O Grêmio terá que devolver centavo para quem comprou o ingresso número , centavos para quem comprou o ingresso e assim por diante, até centavos para quem comprou o ingresso . No total o Grêmio terá que devolver

O seu lucro será de .

1. A função representa uma parábola. Como o coeficiente de é negativo, a função possui máximo no vértice da parábola. O vértice se encontra no ponto médio das raízes de , isto é, para . Como a quantidade de ingressos é um número inteiro, o lucro máximo do Grêmio será atingido quando forem vendidos ou ingressos. Como esses pontos são simétricos com relação a o lucro será o mesmo em ambos os casos. Esse lucro é reais.

**Solução do Exercício 5:**

1. Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de lados e , tendo assim área de m2. Como a área total da praça é de m2, segue que a área do canteiro de grama é m2.



1. O custo total dos cinco canteiros, em m2, é

Simplificando a expressão obtemos

Como o coeficiente de é positivo, possui mínimo quando . O custo mínimo é então reais.

1. Seja a área do canteiro de grama em função de . Se o prefeito pode gasta reais, então

Assim, o maior canteiro de grama que o prefeito pode construir tem área de m2. Observe que isso acontece quando .

**Solução do Exercício 6:**

Como o coeficiente de é positivo, a função atinge seu mínimo no ponto , logo o mínimo será . Assim, .

**Solução do Exercício 7:**

Seja o comprimento e a altura do retângulo. A fim de fazer o retângulo de maior área possível, devemos usar todo o material de que dispomos de cerca. Sendo assim, , isto é, . Por outro lado, a área do retângulo é

Como o coeficiente de é negativo, a maior área possível é obtida para , cujo valor é m2. Como , não é possível construir um cercado retangular de m2 de área.

**Solução do Exercício 8:**

Pelo gráfico, as raízes de são e . Logo . Como , então , isto é, . Assim, . O valor máximo de é atingido para . Assim, é a altura máxima atingida por esse corpo.

**Solução do Exercício 9:**

A altura máxima, obtida no ponto , é unidades de comprimento.

**Solução do Exercício 10:**

Seja a função procurada. Veja primeiro que as raízes de são e , portanto . Como , então , ou seja . Assim, .

**Solução do Exercício 11:**

Como o coeficiente de é positivo, a função atinge seu mínimo no ponto , cujo valor é . Logo, a imagem da função é .

**Solução do Exercício 12:**

Como , então . Pelos dados do enunciado, temos , onde . Portanto

De , obtemos e