**Roteiro de Estudos**

**OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N3 – CICLO 5 – ENCONTRO 1**

Assuntos a serem abordados:

* Números primos e fatoração em primos; cálculo do mdc e mmc usando fatoração em primos (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

* Seções 2.5, 3.3, 3.4 e 4.3 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar, F. Dutenhefner.

<http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>

- Videoaulas do Portal da Matemática:

**Números primos e fatoração em primos; cálculo do mdc e mmc usando fatoração em primos**:

Tópicos Adicionais Módulo “Números Naturais – Representação, Operações e Divisibilidade” (<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=52>) videoaula: “Números primos – Teorema Fundamental da Aritmética”.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 1

**ENUNCIADOS**

**Exercício 1:**

Dado o par de primos e , encontre .

(*Dica*: Analise os possíveis restos da divisão euclidiana de por ).

**Exercício 2:**

Joana comprou salgadinhos de presunto e quibes para levar a uma festa. Na lanchonete, um dos funcionários decidiu embalar os salgadinhos sem misturá-los. Cada embalagem tinha a mesma quantidade de salgadinhos e, para economizar, o funcionário usou a menor quantidade de embalagens.

a) Quantos salgadinhos havia em cada embalagem?

b) Com quantas embalagens Joana chegou à festa?

**Exercício 3:**

Em ocorreu uma conjunção entre os planetas Júpiter e Saturno, o que significa que podiam ser vistos bem próximos um do outro quando avistados da Terra. Se Júpiter e Saturno dão uma volta completa ao redor do Sol aproximadamente a cada e anos, respectivamente, em qual dos anos seguintes ambos estiveram em conjunção no céu da Terra?

a)

b)

c)

d)

e)

**Exercício 4:**

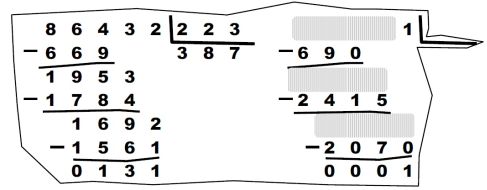
A soma de dois números primos positivos e é e a soma dos números primos positivos e é . Qual é o valor de ?

**Exercício 5:**

Senhor Namm assou biscoitos, senhora Clancy assou biscoitos e senhor Palavras assou biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?

**Exercício 6:**

Esmeralda fez a lição de casa, mas o cachorro dela, Totopázio, rasgou a folha que ela deveria entregar. A lição de casa de Esmeralda pedia para dividir números de cinco algarismos por números de três algarismos. Um dos pedaços rasgados está exibido abaixo, com algumas partes borradas.



a) Calcule .

b) Sabendo que Esmeralda acertou as divisões, determine o dividendo e o divisor da conta da direita.

**Exercício 7 (Questão 14 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):**

Quantos são os números inteiros p tais que ?

**Exercício 8 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):**

O símbolo é usado para representar o produto dos números naturais de a , isto é, . Por exemplo, . Se , qual é o valor de ?

**Exercício 9 (Questão 18 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):**

Três amigas foram a uma livraria com seus namorados. Coincidentemente, cada pessoa pagou, por livro, um preço em reais igual à quantidade de livros que comprou. Além disso, cada mulher gastou 32 reais a mais que seu respectivo namorado. Ao final das compras, as mulheres compraram, ao todo, oito livros a mais que os homens. Quantos livros foram comprados no total?

**Exercício 10 (Questão 15 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):**

Qual é o menor número inteiro positivo tal que , , , e sejam todos números inteiros?

**Exercício 11 (Questão 83 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):**

Quais números naturais e satisfazem a equação ?

**Exercício 12 (Questão 4 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2017):**

Neste problema, iremos estudar quantos fatores aparecem na fatoração em primos de números da forma .

a) Sejam e dois números inteiros ímpares. Prove que possui exatamente um fator em sua fatoração em primos.

b) Usando a fatoração , determine quantos fatores o número possui.

c) O número possui quantos fatores ?

d) Sabendo que o número possui algarismos, prove que possui zeros

consecutivos em sua representação decimal.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 1

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1:**

Dividindo por , obtém-se , sendo e inteiros, com . Se , então e, portanto, é divisor de . Como é primo, então e, logo, , que também é primo. Se , então e, logo, é divisível por . Como é primo e divisível por , então e, logo, , o que não é possível, pois é par e é ímpar. Assim, não pode ser igual a . Se , então e, logo, é divisível por , o que não é possível, conforme explicado anteriormente. Assim, não pode ser igual a . Assim, a única possibilidade é mesmo , sendo .

**Solução do Exercício 2:**

a) Sejam a quantidade de salgadinhos em cada embalagem, a quantidade de embalagens com salgadinhos de presunto e a quantidade de embalagens com quibes. Então, e e, portanto, é divisor de e . Como foi usada a menor quantidade possível de embalagens, então deve ser o maior divisor comum de e , ou seja, . Como as fatorações em números primos de e são e , então .

b) Joana chegou à festa com embalagens de salgadinhos de presunto e embalagens de quibes, resultando em um total de embalagens.

**Solução do Exercício 3:**

Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra quando , ou seja, , sendo e inteiros. Mas, , com e inteiros, quando é múltiplo de e , sendo que o menor múltiplo comum positivo de e é igual a . Como as fatorações em primos de e são e , então . Logo, os anos em que Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra são , sendo inteiro. Para , tem-se , que, portanto, é um ano de conjunção, apresentado na alternativa (d). A diferença entre cada um dos anos apresentados nas demais alternativas e não é um múltiplo de e, logo, os anos apresentados nas demais alternativas não são anos de conjunção.

**Solução do Exercício 4:**

Como e , então . Como , então e são números primos positivos consecutivos. Mas, o único par de primos positivos consecutivos é . De fato, dados dois inteiros consecutivos e , um deles é par. Se for par e primo positivo, então e, logo, , que é primo. Se for par e primo positivo, então e, logo, , que não é primo. Assim, e , e, portanto, . Logo, .

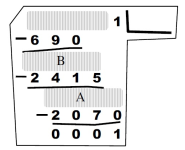
**Solução do Exercício 5:**

Denotando por a quantidade de biscoitos em cada pacote, por a quantidade de pacotes usados pelo senhor Namm, por a quantidade de pacotes usados pela senhora Clancy e por a quantidade de pacotes usados pelo senhor Palavras, tem-se , e . Assim, é divisor de , e . O maior valor possível para é igual ao . As fatorações em primos de , e são , e . Logo, .

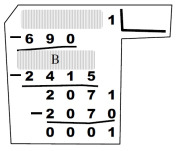
**Solução do Exercício 6:**

a) Como as fatorações em primos de , e são , e , então .

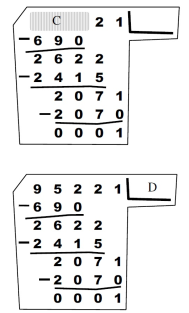
b) Vamos encontrar inicialmente os números e , e parte do dividendo, fazendo o processo inverso.



O número é .



O número é e, assim, descobrimos o algarismo das dezenas do dividendo, que é . Finalmente, o número é e, portanto, o dividendo é



Vamos agora encontrar , o divisor. Como é divisor de , e , então é um dos divisores positivos de , ou seja, pode ser ou . Veja que o primeiro passo é dividir por e obter resto . Como o resto é sempre menor do que o divisor, então não pode ser nenhum dos números e . Logo, só pode ser igual a .

**Solução do Exercício 7:**

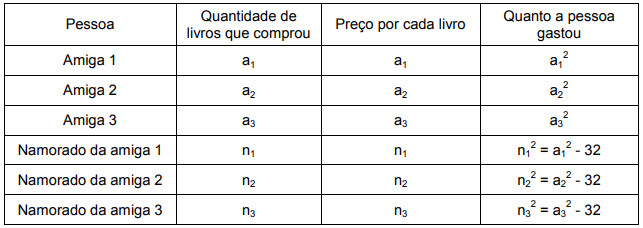
A decomposição de em fatores primos é . Logo, a dupla desigualdade do enunciado pode ser escrita como , ou seja, . Dividindo todos os termos por , obtemos , ou seja, . As únicas potências de que estão entre e são e . Logo, só pode assumir os valores e , donde só pode assumir os valores e .

**Solução do Exercício 8:**

Como , tem-se . Por outro lado, e, portanto, . Logo, e, portanto, .

**Solução do Exercício 9:**

Os dados do problema estão organizados na tabela abaixo:



Como , , então . Cada uma das parcelas do membro direito da última igualdade é um número inteiro positivo e, portanto, há apenas duas soluções e , devido à decomposição única em fatores primos. Na primeira solução, a mulher comprou dois livros a mais do que o seu namorado e na segunda ela comprou livros a mais do que o namorado. Como as mulheres compraram oito livros a mais do que os homens, só resta a possibilidade de um casal ter comprado livros e os outros dois casais terem comprado, cada um deles livros. Desse modo, a quantidade total de livros comprada foi .

**Solução do Exercício 10:**

Para que , , , e sejam números inteiros, deve ser um múltiplo comum de , , , e . Como queremos o menor possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum de , , , e , que é .

**Solução do Exercício 11:**

Como , pela unicidade da fatoração em números primos, segue que e são potências de . Como a diferença de e é igual a , a única solução possível é e , donde . Assim, e obtemos . A resposta é

**Solução do Exercício 12:**

a) Como e são ímpares, então existem inteiros e tais que e . Daí, . Assim, o número é o produto de por um número ímpar e, portanto, possui apenas um fator .

b) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados duas vezes. Temos . Agora, basta contar os fatores em cada fator. Pelo item anterior, possui apenas um fator . Além disso, possui apenas um fator e possui dois fatores . Logo, possui fatores .

c) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados vezes. Temos . Temos números da forma , com e ímpares, e cada um contribui com apenas um fator , de acordo com o item (a). Além disso, tem apenas um fator e tem dois fatores . Assim, o número possui exatamente fatores

Observação: Repetindo o argumento anterior, é possível mostrar que possui exatamente fatores primos .

d) Pelo argumento do item anterior, existe um inteiro tal que . Consequentemente, . Como termina em zeros e possui apenas dígitos, então existem pelo menos dígitos iguais a zero consecutivos dentre os últimos dígitos da representação decimal de .

**Roteiro de Estudos**

**OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N3 – CICLO 5 – ENCONTRO 2**

Assuntos a serem abordados:

* Progressões aritméticas e geométricas (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Definição e Lei de Formação de uma PA”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/gfuoof00on40o.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “PAs Inteiras e Soma dos Termos de uma PA”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c2ewtv1sh7ccg.pdf>

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Exercícios de Fixação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/diz2nn99ztkcc.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “PAs de Segunda Ordem”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/58h5ig7q2uosw.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Definição e Lei de Formação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/cosyyelb57kgs.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Exercícios de Fixação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/c8gx0jwf55440.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Soma dos Termos de uma PG Finita”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/ddz2r7g2g34sw.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: A Soma dos Termos de uma PG Infinita”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/a10w5cypxbks4.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Exercícios de Aprofundamento”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brfc7l17uvscg.pdf>

- Videoaulas do Portal da Matemática:

**Progressões Aritméticas**:

1º Ano do Ensino Médio Módulo “Progressões Aritméticas” ([https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=79](https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=79→)) videoaulas: “Aula 01: Sequências”, “Aula 02: Progressão Aritmética, o início”, “Aula 03: Exercícios Introdutórios de PA”, “Aula 04: Progressões Aritméticas de Razão e Termos Inteiros”, “Aula 05: Soma dos Termos de uma PA”, “Aula 06: Exercícios de Fixação I”, “Aula 07: Exercícios de Fixação II”, “Aula 08: PA de Segunda Ordem”.

**Progressão Geométrica**:

1º Ano do Ensino Médio Módulo “Progressões Geométricas” (<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=80>) videoaulas: “Aula 01: A Progressão Geométrica”, “Aula 02: Taxa de Crescimento”, “Aula 03: A Lei de Formação de uma PG”, “Aula 04: Exercícios de Fixação I” ,“Aula 05: Exercícios de Fixação II”, “Aula 06: Exercícios de Fixação III”, “Aula 07: Soma dos Termos de uma PG Finita”, “Aula 08: Exercícios sobre Somas de PGs Finitas”, “Aula 09: Soma dos Termos de uma PG Infinita – Parte I”, “Aula 10: Soma dos Termos de uma PG Infinita – Parte II”, “Aula 11: Exercícios sobre Somas de PGs Infinitas”, “Aula 12: Exercícios de Fixação I”, “Aula 13: Exercícios de Fixação II”, “Aula 14: Exercícios de Fixação III”.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 2

**ENUNCIADOS**

**Exercício 1 (Problema 0.3 – Círculo Matemático de Moscou):**

Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anular é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar o nono. Inverta a orientação novamente, voltando para o dedo mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar dessa forma, ido e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?

**Exercício 2 (Problema 2.1 – Círculo Matemático de Moscou):**

Eis uma série de figuras:



A primeira consiste de um quadrado. Quantos quadrados há na centésima figura? Quantos quadrados há ao todo nas primeiras figuras?

**Exercício 3 (Problema 6.7 – Círculo Matemático de Moscou):**

Carol está viajando de avião. Primeiro leu um livro; depois dormiu; depois olhou pela janela e depois bebeu um suco de laranja. Cada uma dessas atividades, exceto a primeira, levou exatamente a metade do tempo que a anterior. Ela começou a ler seu livro ao meio-dia e terminou seu suco de laranja às h. Quando Carol começou a olhar pela janela?

**Exercício 4 (Problema 8.4 – Círculo Matemático de Moscou):**

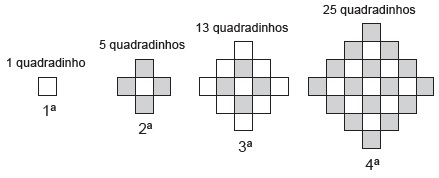
Um bando de gansos brancos voou sobre uma cadeia de lagos. Cada vez que chegavam a um lago, metade dos gansos remanescentes mais meio ganso aterrissava no lago, enquanto os outros continuavam a voar. Quando chegaram ao sétimo lago, os últimos gansos aterrissaram. Quantos gansos havia no bando?

**Exercício 5 (Problema CI.1 – Círculo Matemático de Moscou):**

Um carteiro retira as cartas de uma caixa de correio pública vezes ao dia. Se ele abrir a caixa de correio em intervalos de tempos iguais começando às h e terminando às h, de quanto será o intervalo de tempo?

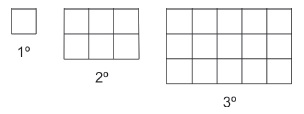
**Exercício 6 (Questão 16 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2009 – Modificado):**

Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2018 quadradinhos?



**Exercício 7 (Questão 4 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2008):**

Com quadradinhos de lado cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do retângulo dessa sequência?



**Exercício 8:**

A soma dos termos de uma progressão aritmética é . Se o primeiro termo dessa progressão é , qual é a razão dessa progressão?

**Exercício 9:**

Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da sétima geração que serão descendentes de uma única coelha (a primeira geração consta de coelhas).

**Exercício 10:**

Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre m na primeira hora e a cada hora após a primeira, a metade do que percorre na hora precedente. Assim, na segunda hora percorre m, na terceira hora m, e assim por diante. Determine o tempo necessário para completar um percurso de m.

**Exercício 11:**

Numa progressão geométrica de termos positivos, a soma dos dois primeiros vale e a soma dos dois últimos vale 648. Calcule a razão da progressão.

**Exercício 12:**

Numa progressão geométrica, o terceiro termo é e o sexto termo é . Calcule o primeiro termo e a razão da progressão.

**Exercício 13:**

A soma dos termos de uma progressão geométrica com uma infinidade de termos é igual a . Se o primeiro termo é , calcule a razão da progressão geométrica.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 2

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1:**

Vamos olhar os números que correspondem ao polegar. Ele começa com o número , depois contamos do indicador ao mindinho e quatro novamente de volta (do anular ao polegar), de modo que o próximo número associado ao polegar é . O próximo número associado ao polegar é , e a cada visita subsequente ao polegar é preciso somar ao número anterior. Vemos que a sequência de números associado ao polegar forma uma progressão aritmética de razão , logo . Como , então . Portanto, o indicador será o milésimo.

**Solução do Exercício 2:**

Há um quadrado na primeira figura e, em cada uma das seguintes, dois a mais que na anterior. Logo, podemos representar essa sequência por (a sequência de números naturais ímpares). A centésima figura terá quadrados. Para saber quantos quadrados há no total basta calcular a soma de uma progressão aritmética e obtemos o número total de quadrados:

Podemos também considerar os diagramas em ordem inversa:



Note que a primeira figura (que agora é a última) cabe na segunda (penúltima, agora) para formar um quadrado . Tudo isso cabe dentro da próxima figura para formar um quadrado , e assim por diante. Logo as primeiras figuras juntas formam um quadrado , que contem pequenos quadrados.

**Solução do Exercício 3:**

Vamos supor que Carol levou minutos para ler o livro. Os tempos em que Carol realizou cada uma das atividades formam uma progressão geométrica de razão . O tempo total utilizado para as quatro atividades foi de minutos. Como , então . Assim, Carlo demorou minutos em ler o livro e dormiu por . Assim, começou a olhar pela janela após minutos, ou seja, às h.

**Solução do Exercício 4:**

O problema tem uma solução simples: adicione um ganso ao bando – digamos um ganso cinza, para não ser confundido com os outros. Com o ganso extra, exatamente metade dos gansos irão aterrissar em cada lago. No sétimo lago, exatamente metade dos gansos que chegaram até aí irão aterrissar e só nosso ganso cinza irá continuar voando; logo ganso aterrissa. O número de gansos que aterrissa em cada lago forma um dos valores de uma progressão aritmética de razão . Temos e , assim . O número total de gansos brancos é . Uma forma simples de calcular a soma é escrevendo:

Subtraindo esses valores obtemos que haviam gansos brancos.

**Solução do Exercício 5:**

Os horários em que o carteiro abre a caixa de correios formam uma progressão aritmética com e , onde razão da progressão aritmética. Logo horas.

**Solução do Exercício 6:**

Considere o número de quadradinhos que a figura tem a mais da figura anterior. Por exemplo , , e assim por diante. Ou seja, a sequência de números forma uma progressão aritmética de razão . Vemos claramente que . A figura n possui quadradinhos. Sabemos que

Comparando com 2018, temos que , então calculamos , . Logo a primeira figura que possui mais de quadradinhos é a figura .

**Solução do Exercício 7:**

O perímetro da primeira figura é , da segunda figura , da terceira figura e assim por diante. Dessa forma vemos claramente que ao aumentar uma linha, o perímetro aumenta de cm e ao aumentar duas colunas, o perímetro aumenta de , totalizando cm a mais que na figura anterior. Assim, . Logo o perímetro do centésimo quadrado é .

**Solução do Exercício 8:**

Seja o -ésimo termo da progressão aritmética, nesse caso temos

Daí obtemos . Como , onde é a razão, temos .

**Solução do Exercício 9:**

Chame o número de coelhos da -ésima geração. Trata-se de uma progressão aritmética onde e razão , logo . A sétima geração consta de coelhas.

**Solução do Exercício 10:**

A distância por hora percorrida pelo alpinista forma uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é e a razão é . O termo -ésimo é e a soma dos primeiros termos é . Daí .

**Solução do Exercício 11:**

Sejam os termos da progressão geométrica. De acordo aos dados, temos e . Observe que . Isso implica que , isto é, .

**Solução do Exercício 12:**

Seja a razão da progressão e o primeiro termo. Então e . Dividindo ambas equações obtemos , daí . De obtemos .

**Solução do Exercício 13:**

Seja o primeiro termo da progressão e a soma de todos os termos da progressão geométrica, onde é a razão. Então .