**Roteiro de Estudos**

**OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N3 – CICLO 5 – ENCONTRO 1**

Assuntos a serem abordados:

* Números primos e fatoração em primos; cálculo do mdc e mmc usando fatoração em primos (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

* Seções 2.5, 3.3, 3.4 e 4.3 da Apostila do PIC da OBMEP “Encontros de Aritmética”, L. Cadar, F. Dutenhefner.

<http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf>

- Videoaulas do Portal da Matemática:

**Números primos e fatoração em primos; cálculo do mdc e mmc usando fatoração em primos**:

Tópicos Adicionais $\rightarrow $ Módulo “Números Naturais – Representação, Operações e Divisibilidade” (<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=52>) $\rightarrow $ videoaula: “Números primos – Teorema Fundamental da Aritmética”.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 1

**ENUNCIADOS**

**Exercício 1:**

Dado o par de primos $p$ e $8p^{2}+1$, encontre $p$.

(*Dica*: Analise os possíveis restos da divisão euclidiana de $p$ por $3$).

**Exercício 2:**

Joana comprou $130$ salgadinhos de presunto e $540$ quibes para levar a uma festa. Na lanchonete, um dos funcionários decidiu embalar os salgadinhos sem misturá-los. Cada embalagem tinha a mesma quantidade de salgadinhos e, para economizar, o funcionário usou a menor quantidade de embalagens.

a) Quantos salgadinhos havia em cada embalagem?

b) Com quantas embalagens Joana chegou à festa?

**Exercício 3:**

Em $1982$ ocorreu uma conjunção entre os planetas Júpiter e Saturno, o que significa que podiam ser vistos bem próximos um do outro quando avistados da Terra. Se Júpiter e Saturno dão uma volta completa ao redor do Sol aproximadamente a cada $12$ e $30$ anos, respectivamente, em qual dos anos seguintes ambos estiveram em conjunção no céu da Terra?

a) $1840$

b) $1852$

c) $1864$

d) $1922$

e) $1960$

**Exercício 4:**

A soma de dois números primos positivos $a$ e $b$ é $34$ e a soma dos números primos positivos $a$ e $c$ é $33$. Qual é o valor de $a+b+c$?

**Exercício 5:**

Senhor Namm assou $252$ biscoitos, senhora Clancy assou $105$ biscoitos e senhor Palavras assou $168$ biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?

**Exercício 6:**

Esmeralda fez a lição de casa, mas o cachorro dela, Totopázio, rasgou a folha que ela deveria entregar. A lição de casa de Esmeralda pedia para dividir números de cinco algarismos por números de três algarismos. Um dos pedaços rasgados está exibido abaixo, com algumas partes borradas.



a) Calcule $mdc(690, 2415, 2070)$.

b) Sabendo que Esmeralda acertou as divisões, determine o dividendo e o divisor da conta da direita.

**Exercício 7 (Questão 14 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):**

Quantos são os números inteiros p tais que $50^{3}<5^{p}<50^{4}$?

**Exercício 8 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):**

O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de $1$ a $n$, isto é, $n!=n∙(n-1)\cdots 2∙1$. Por exemplo, $4!=4∙3∙2∙1=24$. Se $n!=2^{15}∙3^{6}∙5^{3}∙7^{2}∙11∙13$, qual é o valor de $n$?

**Exercício 9 (Questão 18 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):**

Três amigas foram a uma livraria com seus namorados. Coincidentemente, cada pessoa pagou, por livro, um preço em reais igual à quantidade de livros que comprou. Além disso, cada mulher gastou 32 reais a mais que seu respectivo namorado. Ao final das compras, as mulheres compraram, ao todo, oito livros a mais que os homens. Quantos livros foram comprados no total?

**Exercício 10 (Questão 15 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):**

Qual é o menor número inteiro positivo $N$ tal que $\frac{N}{3}$, $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{5}$, $\frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam todos números inteiros?

**Exercício 11 (Questão 83 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):**

Quais números naturais $m$ e $n$ satisfazem a equação $2^{n}+1=m^{2}$?

**Exercício 12 (Questão 4 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2017):**

Neste problema, iremos estudar quantos fatores $2$ aparecem na fatoração em primos de números da forma $5^{2}^{n}-1$.

a) Sejam $x$ e $y$ dois números inteiros ímpares. Prove que $x^{2}+y^{2}$ possui exatamente um fator $2$ em sua fatoração em primos.

b) Usando a fatoração $a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)$, determine quantos fatores $2$ o número $5^{4}-1$ possui.

c) O número $N=5^{2}^{2017}-1$ possui quantos fatores $2$?

d) Sabendo que o número $5^{20}$ possui $14$ algarismos, prove que $5^{2^{18}+20}$ possui $6$ zeros

consecutivos em sua representação decimal.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 1

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1:**

Dividindo $p$ por $3$, obtém-se $p=3q+r$, sendo $q$ e $r$ inteiros, com $r\in \left\{0, 1, 2\right\}$. Se $r=0$, então $p=3q$ e, portanto, $3$ é divisor de $p$. Como $p$ é primo, então $p=3$ e, logo, $8p^{2}+1=8∙3^{2}+1=73$, que também é primo. Se $r=1$, então $p=3q+1$ e, logo, $8p^{2}+1=8∙\left(3q+1\right)^{2}+1=3∙\left(24q^{2}+16q+3\right)$ é divisível por $3$. Como $8p^{2}+1$ é primo e divisível por $3$, então $8p^{2}+1=3$ e, logo, $4p^{2}=1$, o que não é possível, pois $4p^{2}$ é par e $1$ é ímpar. Assim, $r$ não pode ser igual a $1$. Se $r=2$, então $p=3q+2$ e, logo, $8p^{2}+1=8∙\left(3q+2\right)^{2}+1=3∙\left(24q^{2}+32q+11\right)$ é divisível por $3$, o que não é possível, conforme explicado anteriormente. Assim, $r$ não pode ser igual a $2$. Assim, a única possibilidade é mesmo $p=3$, sendo $8p^{2}+1=8∙3^{2}+1=73$.

**Solução do Exercício 2:**

a) Sejam $n$ a quantidade de salgadinhos em cada embalagem, $m$ a quantidade de embalagens com salgadinhos de presunto e $k$ a quantidade de embalagens com quibes. Então, $nm=130$ e $nk=540$ e, portanto, $n$ é divisor de $540$ e $130$. Como foi usada a menor quantidade possível de embalagens, então $n$ deve ser o maior divisor comum de $130$ e $540$, ou seja, $n=mdc(540, 130)$. Como as fatorações em números primos de $540$ e $130$ são $540=2^{2}×3^{3}×5$ e $130=2×5×13$, então $n=mdc\left(540, 130\right)=2×5=10$.

b) Joana chegou à festa com $\frac{130}{10}=13$ embalagens de salgadinhos de presunto e $\frac{540}{10}=54$ embalagens de quibes, resultando em um total de $13+54=67$ embalagens.

**Solução do Exercício 3:**

Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra quando $1982+12k=1982+30j$, ou seja, $12k=30j$, sendo $k$ e $j$ inteiros. Mas, $12k=30j$, com $k$ e $j$ inteiros, quando $12k=30j$ é múltiplo de $12$ e $30$, sendo que o menor múltiplo comum positivo de $12$ e $30$ é igual a $mmc(12,30)$. Como as fatorações em primos de $12$ e $30$ são $12=2^{2}×3$ e $30=2×3×5$, então $mmc\left(12,30\right)=2^{2}×3×5=60$. Logo, os anos em que Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra são $1982+60n$, sendo $n$ inteiro. Para $n=-1$, tem-se $1982+60∙\left(-1\right)=1922$, que, portanto, é um ano de conjunção, apresentado na alternativa (d). A diferença entre cada um dos anos apresentados nas demais alternativas e $1982$ não é um múltiplo de $60$ e, logo, os anos apresentados nas demais alternativas não são anos de conjunção.

**Solução do Exercício 4:**

Como $a+b=34$ e $a+c=33$, então $b-c=(a+b)-(a+c)=34-33=1$. Como $b-c=1$, então $b$ e $c$ são números primos positivos consecutivos. Mas, o único par de primos positivos consecutivos é $(2, 3)$. De fato, dados dois inteiros consecutivos $p$ e $p+1$, um deles é par. Se $p$ for par e primo positivo, então $p=2$ e, logo, $p+1=3$, que é primo. Se $p+1$ for par e primo positivo, então $p+1=2$ e, logo, $p=1$, que não é primo. Assim, $b=3$ e $c=2$, e, portanto, $a=31$. Logo, $a+b+c=31+3+2=36$.

**Solução do Exercício 5:**

Denotando por $n$ a quantidade de biscoitos em cada pacote, por $x$ a quantidade de pacotes usados pelo senhor Namm, por $y$ a quantidade de pacotes usados pela senhora Clancy e por $z$ a quantidade de pacotes usados pelo senhor Palavras, tem-se $nx=252$, $ny=105$ e $nz=168$. Assim, $n$ é divisor de $252$, $105$ e $168$. O maior valor possível para $n$ é igual ao $mdc(252, 105, 168)$. As fatorações em primos de $252$, $105$ e $168$ são $252=2^{2}×3^{2}×7$, $105=3×5×7$ e $168=2^{3}×3×7$. Logo, $mdc\left(252, 105, 168\right)=3×7=21$.

**Solução do Exercício 6:**

a) Como as fatorações em primos de $690$, $2415$ e $2070$ são $690=2×3×5×23$, $2415=3×5×7×23$ e $2070=2×3^{2}×5×23$, então $mdc\left(690, 2415, 2070\right)=3×5×23=345$.

b) Vamos encontrar inicialmente os números $A$ e $B$, e parte do dividendo, fazendo o processo inverso.



O número $A$ é $2070+1=2071$.



O número $B$ é $2415+207=2622$ e, assim, descobrimos o algarismo das dezenas do dividendo, que é $2$. Finalmente, o número $C$ é $690+262=952$ e, portanto, o dividendo é $95221.$



Vamos agora encontrar $D$, o divisor. Como $D$ é divisor de $690$, $2415$ e $2070$, então $D$ é um dos divisores positivos de $mdc\left(690, 2415, 2070\right)=345$, ou seja, pode ser $1, 3, 5, 15, 23, 69, 115$ ou $345$. Veja que o primeiro passo é dividir $952$ por $D$ e obter resto $262$. Como o resto é sempre menor do que o divisor, então $D$ não pode ser nenhum dos números $1, 3, 5, 15, 23, 69$ e $115$. Logo, $D$ só pode ser igual a $345$.

**Solução do Exercício 7:**

A decomposição de $50$ em fatores primos é $50=2×5^{2}$. Logo, a dupla desigualdade do enunciado pode ser escrita como $\left(2×5^{2}\right)^{3}<5^{p}<\left(2×5^{2}\right)^{4}$, ou seja, $2^{3}×5^{6}<5^{p}<2^{4}×5^{8}$. Dividindo todos os termos por $5^{6}$, obtemos $2^{3}<5^{p-6}<2^{4}×5^{2}$, ou seja, $8<5^{p-6}<400$. As únicas potências de $5$ que estão entre $8$ e $400$ são $5^{2}=25$ e $5^{3}=125$. Logo, $p-6$ só pode assumir os valores $2$ e $3$, donde $p$ só pode assumir os valores $8$ e $9$.

**Solução do Exercício 8:**

Como $n!=2^{15}∙3^{6}∙5^{3}∙7^{2}∙11∙13$, tem-se $n\geq 13$. Por outro lado, $13!=13∙\left(2^{2}∙3\right)∙11∙\left(2∙5\right)∙3^{2}∙2^{3}∙7∙\left(2∙3\right)∙5∙2^{2}∙3∙2∙1=13∙11∙7∙5^{2}∙3^{5}∙2^{10}$ e, portanto, $\frac{n!}{13!}=\frac{2^{15}∙3^{6}∙5^{3}∙7^{2}∙11∙13}{13∙11∙7∙5^{2}∙3^{5}∙2^{10}}=2^{5}∙3∙5∙7=14∙15∙16$. Logo, $n!=13!∙14∙15∙16=16!$ e, portanto, $n=16$.

**Solução do Exercício 9:**

Os dados do problema estão organizados na tabela abaixo:



Como $n\_{i}^{2}=a\_{i}^{2}-32$, $i=1, 2, 3$, então $\left(a\_{i}-n\_{i}\right)\left(a\_{i}+n\_{i}\right)=32=2^{5}$. Cada uma das parcelas do membro direito da última igualdade é um número inteiro positivo e, portanto, há apenas duas soluções $\left(a\_{i}=9, n\_{i}=7\right)$ e $\left(a\_{i}=6, n\_{i}=2\right)$, devido à decomposição única em fatores primos. Na primeira solução, a mulher comprou dois livros a mais do que o seu namorado e na segunda ela comprou $4$ livros a mais do que o namorado. Como as mulheres compraram oito livros a mais do que os homens, só resta a possibilidade de um casal ter comprado $6+2=8$ livros e os outros dois casais terem comprado, cada um deles $9+7=16$ livros. Desse modo, a quantidade total de livros comprada foi $8+16+16=40$.

**Solução do Exercício 10:**

Para que $\frac{N}{3}$, $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{5}$, $\frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam números inteiros, $N$ deve ser um múltiplo comum de $3$, $4$, $5$, $6$ e $7$. Como queremos o menor $N$ possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum de $3$, $4$, $5$, $6$ e $7$, que é $3×4×5×7=420$.

**Solução do Exercício 11:**

Como $2^{n}=m^{2}-1=(m+1)(m-1)$, pela unicidade da fatoração em números primos, segue que $m-1$ e $m+1$ são potências de $2$. Como a diferença de $m+1$ e $m-1$ é igual a $2$, a única solução possível é $m-1=2$ e $m+1=2^{2}$, donde $m=3$. Assim, $2^{n}+1=3^{2}=9$ e obtemos $n=3$. A resposta é $m=n=3.$

**Solução do Exercício 12:**

a) Como $x$ e $y$ são ímpares, então existem inteiros $x\_{0}$ e $y\_{0}$ tais que $x=2x\_{0}+1$ e $y=2y\_{0}+1$. Daí, $x^{2}+y^{2}=\left(2x\_{0}+1\right)^{2}+\left(2y\_{0}+1\right)^{2}=4x\_{0}^{2}+4x\_{0}+1+4y\_{0}^{2}+4y\_{0}+1=4x\_{0}^{2}+4x\_{0}+4y\_{0}^{2}+4y\_{0}+2=2\left(2x\_{0}^{2}+2x\_{0}+2y\_{0}^{2}+2y\_{0}+1\right)=2\left(2\left(x\_{0}^{2}+x\_{0}+y\_{0}^{2}+y\_{0}\right)+1\right)$. Assim, o número $x^{2}+y^{2}$ é o produto de $2$ por um número ímpar e, portanto, possui apenas um fator $2$.

b) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados duas vezes. Temos $5^{4}-1=\left(5^{2}\right)^{2}-1^{2}=\left(5^{2}+1\right)\left(5^{2}-1\right)=\left(5^{2}+1^{2}\right)\left(5^{2}-1^{2}\right)=\left(5^{2}+1^{2}\right)\left(5+1\right)\left(5-1\right)$. Agora, basta contar os fatores $2$ em cada fator. Pelo item anterior, $5^{2}+1^{2}$ possui apenas um fator $2$. Além disso, $5+1=6=2∙3$ possui apenas um fator $2$ e $5-1=4=2^{2}$ possui dois fatores $2$. Logo, $5^{4}-1$ possui $1+1+2=4$ fatores $2$.

c) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados $2017$ vezes. Temos $5^{2^{2017}}-1=\left(5^{2^{2016}}\right)^{2}-1^{2}=\left(5^{2^{2016}}+1\right)\left(5^{2^{2016}}-1\right)=\left(5^{2^{2016}}+1^{2}\right)\left(5^{2^{2015}}+1\right)\left(5^{2^{2015}}-1\right)=…=\left(5^{2^{2016}}+1^{2}\right)\left(5^{2^{2015}}+1^{2}\right)…\left(5^{2}+1^{2}\right)\left(5+1\right)\left(5-1\right)$. Temos $2016$ números da forma $x^{2}+y^{2}$, com $x$ e $y$ ímpares, e cada um contribui com apenas um fator $2$, de acordo com o item (a). Além disso, $5+1=6$ tem apenas um fator $2$ e $5-1=4$ tem dois fatores $2$. Assim, o número $N=5^{2}^{2017}-1$ possui exatamente $2016∙1+1+2=2019$ fatores $2.$

Observação: Repetindo o argumento anterior, é possível mostrar que $5^{2}^{n}-1$ possui exatamente $n+2$ fatores primos $2$.

d) Pelo argumento do item anterior, existe um inteiro $k$ tal que $5^{2}^{18}-1=2^{20}k$. Consequentemente, $5^{2^{18}+20}=\left(2^{20}k+1\right)∙5^{20}=\left(2∙5\right)^{20}k+5^{20}=10^{20}k+5^{20}$. Como $10^{20}$ termina em $ 20$ zeros e $5^{20}$ possui apenas $14$ dígitos, então existem pelo menos $20-14=6$ dígitos iguais a zero consecutivos dentre os últimos dígitos da representação decimal de $5^{2^{18}+20}$.

**Roteiro de Estudos**

**OBMEP NA ESCOLA – 2018**

**N3 – CICLO 5 – ENCONTRO 2**

Assuntos a serem abordados:

* Progressões aritméticas e geométricas (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Definição e Lei de Formação de uma PA”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/gfuoof00on40o.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “PAs Inteiras e Soma dos Termos de uma PA”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c2ewtv1sh7ccg.pdf>

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Exercícios de Fixação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/diz2nn99ztkcc.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “PAs de Segunda Ordem”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/58h5ig7q2uosw.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Definição e Lei de Formação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/cosyyelb57kgs.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Exercícios de Fixação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/c8gx0jwf55440.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Soma dos Termos de uma PG Finita”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/ddz2r7g2g34sw.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: A Soma dos Termos de uma PG Infinita”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/a10w5cypxbks4.pdf

* Material Teórico do Portal da Matemática: “Exercícios de Aprofundamento”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brfc7l17uvscg.pdf>

- Videoaulas do Portal da Matemática:

**Progressões Aritméticas**:

1º Ano do Ensino Médio $\rightarrow $ Módulo “Progressões Aritméticas” ([https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=79](https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=79→)) $\rightarrow $ videoaulas: “Aula 01: Sequências”, “Aula 02: Progressão Aritmética, o início”, “Aula 03: Exercícios Introdutórios de PA”, “Aula 04: Progressões Aritméticas de Razão e Termos Inteiros”, “Aula 05: Soma dos Termos de uma PA”, “Aula 06: Exercícios de Fixação I”, “Aula 07: Exercícios de Fixação II”, “Aula 08: PA de Segunda Ordem”.

**Progressão Geométrica**:

1º Ano do Ensino Médio $\rightarrow $ Módulo “Progressões Geométricas” (<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=80>) $\rightarrow $ videoaulas: “Aula 01: A Progressão Geométrica”, “Aula 02: Taxa de Crescimento”, “Aula 03: A Lei de Formação de uma PG”, “Aula 04: Exercícios de Fixação I” ,“Aula 05: Exercícios de Fixação II”, “Aula 06: Exercícios de Fixação III”, “Aula 07: Soma dos Termos de uma PG Finita”, “Aula 08: Exercícios sobre Somas de PGs Finitas”, “Aula 09: Soma dos Termos de uma PG Infinita – Parte I”, “Aula 10: Soma dos Termos de uma PG Infinita – Parte II”, “Aula 11: Exercícios sobre Somas de PGs Infinitas”, “Aula 12: Exercícios de Fixação I”, “Aula 13: Exercícios de Fixação II”, “Aula 14: Exercícios de Fixação III”.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 2

**ENUNCIADOS**

**Exercício 1 (Problema 0.3 – Círculo Matemático de Moscou):**

Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anular é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar o nono. Inverta a orientação novamente, voltando para o dedo mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar dessa forma, ido e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?

**Exercício 2 (Problema 2.1 – Círculo Matemático de Moscou):**

Eis uma série de figuras:



A primeira consiste de um quadrado. Quantos quadrados há na centésima figura? Quantos quadrados há ao todo nas $100$ primeiras figuras?

**Exercício 3 (Problema 6.7 – Círculo Matemático de Moscou):**

Carol está viajando de avião. Primeiro leu um livro; depois dormiu; depois olhou pela janela e depois bebeu um suco de laranja. Cada uma dessas atividades, exceto a primeira, levou exatamente a metade do tempo que a anterior. Ela começou a ler seu livro ao meio-dia e terminou seu suco de laranja às $13:00$h. Quando Carol começou a olhar pela janela?

**Exercício 4 (Problema 8.4 – Círculo Matemático de Moscou):**

Um bando de gansos brancos voou sobre uma cadeia de lagos. Cada vez que chegavam a um lago, metade dos gansos remanescentes mais meio ganso aterrissava no lago, enquanto os outros continuavam a voar. Quando chegaram ao sétimo lago, os últimos gansos aterrissaram. Quantos gansos havia no bando?

**Exercício 5 (Problema CI.1 – Círculo Matemático de Moscou):**

Um carteiro retira as cartas de uma caixa de correio pública $5$ vezes ao dia. Se ele abrir a caixa de correio em intervalos de tempos iguais começando às $07:00$ h e terminando às $19:00$ h, de quanto será o intervalo de tempo?

**Exercício 6 (Questão 16 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2009 – Modificado):**

Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2018 quadradinhos?



**Exercício 7 (Questão 4 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2008):**

Com quadradinhos de lado $1$ cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do $100°$ retângulo dessa sequência?



**Exercício 8:**

A soma dos $15$ termos de uma progressão aritmética é $465$. Se o primeiro termo dessa progressão é $5$, qual é a razão dessa progressão?

**Exercício 9:**

Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da sétima geração que serão descendentes de uma única coelha (a primeira geração consta de $3$ coelhas).

**Exercício 10:**

Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre $256$ m na primeira hora e a cada hora após a primeira, a metade do que percorre na hora precedente. Assim, na segunda hora percorre $128$ m, na terceira hora $64$ m, e assim por diante. Determine o tempo necessário para completar um percurso de $480$ m.

**Exercício 11:**

Numa progressão geométrica de $6$ termos positivos, a soma dos dois primeiros vale $8$ e a soma dos dois últimos vale 648. Calcule a razão da progressão.

**Exercício 12:**

Numa progressão geométrica, o terceiro termo é $-48$ e o sexto termo é $6$. Calcule o primeiro termo e a razão da progressão.

**Exercício 13:**

A soma dos termos de uma progressão geométrica com uma infinidade de termos é igual a $5$. Se o primeiro termo é $3$, calcule a razão da progressão geométrica.

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 5 – Encontro 2

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1:**

Vamos olhar os números que correspondem ao polegar. Ele começa com o número $a\_{1}=1$, depois contamos $4$ do indicador ao mindinho e quatro novamente de volta (do anular ao polegar), de modo que o próximo número associado ao polegar é $a\_{2}=1+8=9$. O próximo número associado ao polegar é $a\_{3}=1+2∙8=17$, e a cada visita subsequente ao polegar é preciso somar $8$ ao número anterior. Vemos que a sequência de números associado ao polegar forma uma progressão aritmética de razão $8$, logo $a\_{n}=1+8∙(n-1)$. Como $1000=8∙250$, então $a\_{251}=1001$. Portanto, o indicador será o milésimo.

**Solução do Exercício 2:**

Há um quadrado na primeira figura e, em cada uma das seguintes, dois a mais que na anterior. Logo, podemos representar essa sequência por $a\_{n}=1+2∙\left(n-1\right)=2n-1$ (a sequência de números naturais ímpares). A centésima figura terá $a\_{100}=2∙100-1=199$ quadrados. Para saber quantos quadrados há no total basta calcular a soma de uma progressão aritmética e obtemos o número total de quadrados:

$$S\_{100}=\frac{100∙(a\_{1}+a\_{100})}{2}=\frac{100∙200}{2}=100^{2}=10000.$$

Podemos também considerar os diagramas em ordem inversa:



Note que a primeira figura (que agora é a última) cabe na segunda (penúltima, agora) para formar um quadrado $2×2$. Tudo isso cabe dentro da próxima figura para formar um quadrado $3×3$, e assim por diante. Logo as $100$ primeiras figuras juntas formam um quadrado $100×100$, que contem $100∙100=10000$ pequenos quadrados.

**Solução do Exercício 3:**

Vamos supor que Carol levou $a$ minutos para ler o livro. Os tempos em que Carol realizou cada uma das atividades formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. O tempo total utilizado para as quatro atividades foi de $a∙\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=a∙\frac{1-\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{15a}{8}$ minutos. Como $\frac{15a}{8}=60$, então $a=32$. Assim, Carlo demorou $32$ minutos em ler o livro e dormiu por $16$. Assim, começou a olhar pela janela após $32+16=48$ minutos, ou seja, às $12:48$h.

**Solução do Exercício 4:**

O problema tem uma solução simples: adicione um ganso ao bando – digamos um ganso cinza, para não ser confundido com os outros. Com o ganso extra, exatamente metade dos gansos irão aterrissar em cada lago. No sétimo lago, exatamente metade dos gansos que chegaram até aí irão aterrissar e só nosso ganso cinza irá continuar voando; logo $1$ ganso aterrissa. O número de gansos que aterrissa em cada lago forma um dos valores de uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$. Temos $a\_{1}=a$ e $a\_{7}=a∙\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\frac{a}{64}=1$, assim $a=64$. O número total de gansos brancos é $1+2+4+…+64$. Uma forma simples de calcular a soma é escrevendo:

$$S=1+2+4+…+64,$$

$$2S=2+4+…+64+128.$$

Subtraindo esses valores obtemos que haviam $S=128-1=127$ gansos brancos.

**Solução do Exercício 5:**

Os horários em que o carteiro abre a caixa de correios formam uma progressão aritmética com $a\_{1}=7$ e $a\_{5}=19=7+4∙d$, onde $d$ razão da progressão aritmética. Logo $d=3$ horas.

**Solução do Exercício 6:**

Considere $a\_{n}$ o número de quadradinhos que a figura $n$ tem a mais da figura anterior. Por exemplo $a\_{2}=4$, $a\_{3}=4+4$, $a\_{4}=4+4+4$ e assim por diante. Ou seja, a sequência de números $a\_{n}$ forma uma progressão aritmética de razão $4$. Vemos claramente que $a\_{n}=4(n-1)$. A figura n possui $S\_{n}=1+a\_{2}+a\_{3}+…+a\_{n}$ quadradinhos. Sabemos que

$$a\_{2}+…+a\_{n}=\frac{\left(n-1\right)\left(a\_{2}+a\_{n}\right)}{2}=\frac{\left(n-1\right)\left(4+4\left(n-1\right)\right)}{2}=\frac{4n\left(n-1\right)}{2}=2n\left(n-1\right).$$

Comparando $2n^{2}$ com 2018, temos que $\sqrt{\frac{2018}{2}}≈31,76$, então calculamos $S\_{32}=2×32×31+1=1985$, $S\_{33}=2×33×32+1=2113$. Logo a primeira figura que possui mais de $2018$ quadradinhos é a figura $33$.

**Solução do Exercício 7:**

O perímetro da primeira figura é $p\_{1}=4$, da segunda figura $p\_{2}=4+6$, da terceira figura $a\_{3}=10+6$ e assim por diante. Dessa forma vemos claramente que ao aumentar uma linha, o perímetro aumenta de $2$ cm e ao aumentar duas colunas, o perímetro aumenta de $4$, totalizando $6$ cm a mais que na figura anterior. Assim, $p\_{n}=4+6×\left(n-1\right)=6n-2$. Logo o perímetro do centésimo quadrado é $p\_{100}=6×100-2=598$.

**Solução do Exercício 8:**

Seja $a\\_n$ o $n$-ésimo termo da progressão aritmética, nesse caso temos

$$495=\frac{15×(5+a\_{15})}{2}.$$

Daí obtemos $a\_{15}=61$. Como $a\_{15}=5+r×(15-1)$, onde $r$ é a razão, temos $r=4$.

**Solução do Exercício 9:**

Chame $q\_{n}$ o número de coelhos da $n$-ésima geração. Trata-se de uma progressão aritmética onde $q\_{1}=3$ e razão $3$, logo $q\_{n}=3×3^{n-1}=3^{n}$. A sétima geração consta de $3^{7}=2187$ coelhas.

**Solução do Exercício 10:**

A distância por hora percorrida pelo alpinista forma uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é $q\_{1}=256$ e a razão é $r=\frac{1}{2}$. O termo $n$-ésimo é $q\_{n}=\frac{256}{2^{n-1}}$ e a soma dos $n$ primeiros termos é $S\_{n}=q\_{1}\frac{1-r^{n}}{1-r}=256\frac{1-\frac{1}{2^{n}}}{1-\frac{1}{2}}=512-\frac{512}{2^{n}}=480$. Daí $n=4$.

**Solução do Exercício 11:**

Sejam $a,ar,ar^{2},ar^{3},ar^{4},ar^{5}$ os $6$ termos da progressão geométrica. De acordo aos dados, temos $a+ar=8$ e $ar^{4}+ar^{5}=648$. Observe que $ar^{4}+ar^{5}=r^{4}\left(a+ar\right)=8r^{4}$. Isso implica que $r^{4}=\frac{648}{8}=81$, isto é, $r=3$.

**Solução do Exercício 12:**

Seja $r$ a razão da progressão e $a$ o primeiro termo. Então $q\_{3}=-48=ar^{2}$ e $q\_{6}=6=ar^{5}$. Dividindo ambas equações obtemos $\frac{ar^{2}}{ar^{5}}=\frac{1}{r^{3}}=\frac{-48}{6}=-8$, daí $r=-\frac{1}{2}$. De $-48=a×\frac{1}{4}$ obtemos $a=-192$.

**Solução do Exercício 13:**

Seja $a=3$ o primeiro termo da progressão e $S=\frac{a}{1-r}=5$ a soma de todos os termos da progressão geométrica, onde $r$ é a razão. Então $\frac{3}{1-r}=5⟹3=5-5r⟹r=\frac{2}{5}$.