

## Preparação para OBMEP – 2018 – Segunda Fase (Nível 2)

(OPM – 2016)

### PROBLEMA 1

As medalhas dos Jogos Olímpicos Rio 2016 foram produzidas no Brasil, pela Casa da Moeda, e pesam 500 gramas cada, sendo, assim, as mais pesadas da história. As medalhas de ouro, prata e bronze têm as mesmas inscrições, sem diferenciação pelo metal ou

pela modalidade esportiva: de um lado fica a imagem padrão da deusa Nike e, do outro, os louros e a marca dos Jogos Rio 2016. As de ouro contêm 494 g de prata e apenas 6 g de ouro em sua composição metálica. As medalhas de prata contêm 500 g de prata. Já as de bronze têm 475 g de cobre e 25 g de zinco.

a) Considerando que 1 g de ouro vale R\$ 142,33 e que 1 g de prata vale R\$ 2,13, calcule o custo dos metais utilizados por medalha de ouro.

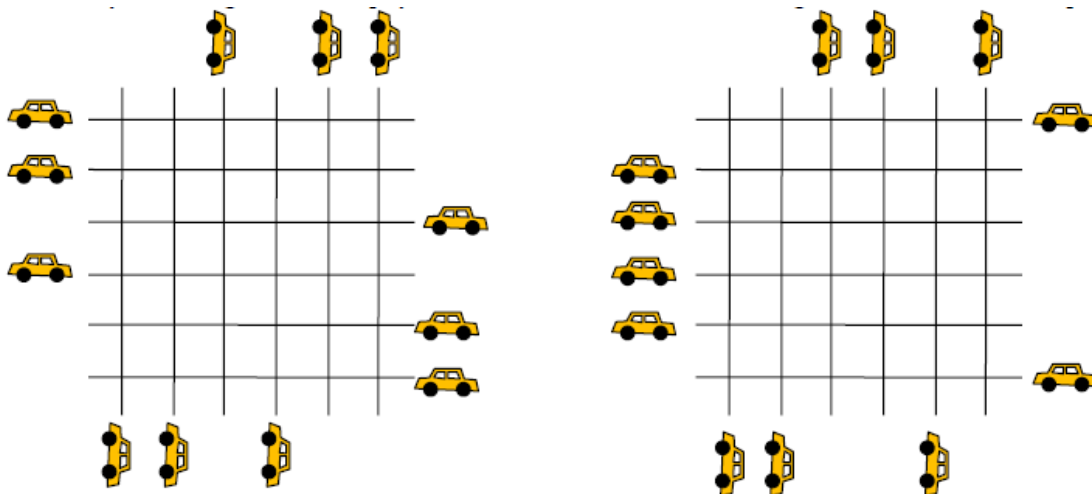
b) As medalhas de ouro desse ano são 21,3 vezes mais pesadas do que as dos jogos olímpicos de Estocolmo em 1912. Porém, os jogos de 1912 foram os últimos em que as medalhas de ouro foram feitas inteiramente de ouro. Considerando a quantidade de metal

e o valor atual do ouro, qual seria hoje o custo da medalha de ouro que foi entregue nos jogos de Estocolmo em 1912?

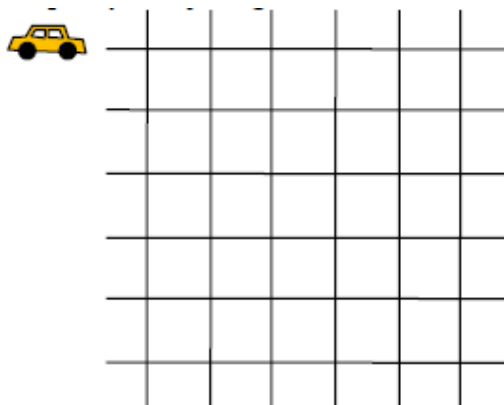
c) A Taça Jules Rimet conquistada pelo Brasil ao vencer a Copa do Mundo de 1970 continha 3800 gramas de ouro. Que porcentagem do ouro da Taça Jules Rimet seria necessária para a produção das 306 medalhas de ouro que estão sendo entregues nos jogos Rio 2016?

### PROBLEMA 2

Uma quantidade  $2n$  de carros deve ser colocada nas extremidades de  $2n$  segmentos de retas,  $n$  deles verticais e  $n$  horizontais. Segmentos na mesma direção estão igualmente espaçados, e têm a mesma medida. A seguir exibimos dois exemplos para  $n = 6$ :



Após os carros serem dispostos, eles se movem simultaneamente com a mesma velocidade constante em direção à outra extremidade do segmento correspondente. Dizemos uma disposição de carros é *segura* quando dois carros **não** passam pelo mesmo ponto simultaneamente. Por exemplo, na figura acima, a disposição à esquerda é segura e a disposição à direita não é segura, pois, por exemplo, os carros na sexta coluna e na primeira linha passam pelo mesmo ponto simultaneamente.



a) Suponha que o carro da primeira linha seja colocado à esquerda. Determine onde os carros da primeira coluna, da última coluna e da última linha devem ser colocados para que a disposição seja segura.

b) É possível que exista uma disposição segura para  $n = 7$ ?

### PROBLEMA 3

O número  $\pi$  pode ser definido como a área de um círculo de raio 1. A partir dessa definição, podemos deduzir fatos sobre o  $\pi$ .

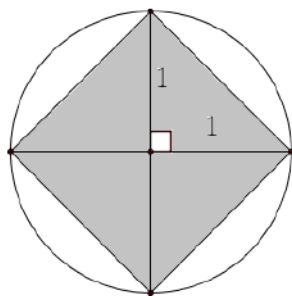


Figura 1

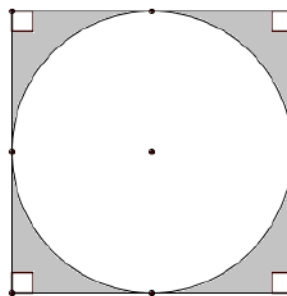


Figura 2

- Considere o círculo de raio 1 com o quadrado em seu interior (quadrado inscrito), representados na figura 1. Determine a área deste quadrado.
- Agora considere o quadrado em que o círculo de raio 1 está inscrito, como na figura 2. Determine a sua área.
- A partir dos itens anteriores, justifique por que podemos concluir que  $2 < \pi < 4$ . (“Eu já aprendi que  $\pi$  é aproximadamente 3,14”, mas você não pode usar isso neste problema.)

### (OBMEP – 2016 - Nível 2)

4. Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1.ª posição seja maior do que 1, o da 2.ª posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas 52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2.

- Se a senha de Fernanda começar com 9467, qual deve ser o algarismo da 5.ª posição?
- Se Fernanda começar a formar sua senha escolhendo o algarismo 7 para a 5.ª posição, quantas são as possibilidades de escolha para a 4.ª posição?
- Quantas senhas Fernanda poderá formar?

5. Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de medimágico quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.



- Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja medimágico.

|   |  |    |
|---|--|----|
| 3 |  | 19 |
| 8 |  |    |
|   |  |    |

- O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de  $x$ ?

|   |     |    |
|---|-----|----|
|   | 7   |    |
| 9 | $x$ |    |
|   |     | 20 |