Módulo Teorema de Pitágoras e Aplicações

Teorema de Pitágoras e Aplicações

9° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. São medidas dos lados de um triângulo retângulo:

a) $(1, 2, 3)$.

b) $(2, 3, 4)$.

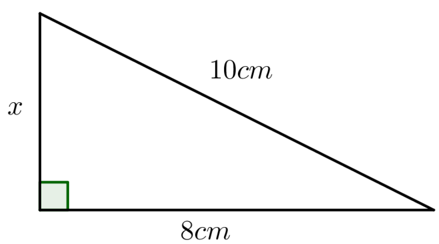
c) $(3, 4, 5)$.

d) $(4, 5, 6)$.

e) $(5, 6, 7)$.

Exercício 2. Determine a medida da diagonal de um retângulo de base $12cm$ e altura $8cm$.

Exercício 3. Determine o valor de x na figura.



Exercício 4. Qual a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede $12cm$?

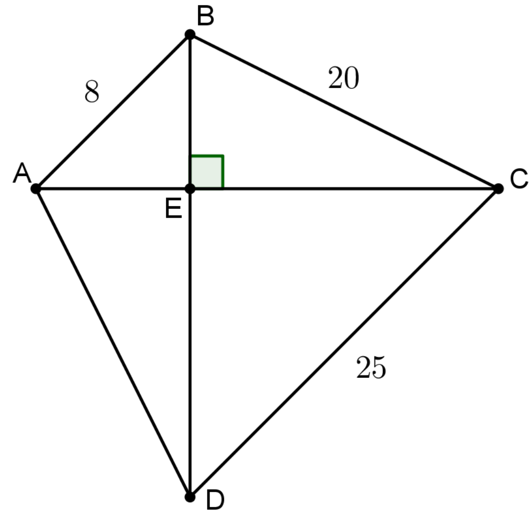
2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Uma pessoa está a passeio em uma cidade que não conhece muito bem. Quando sai pela primeira vez do hotel, ela utiliza um mapa para chegar até um museu. Seguindo as orientações do mapa, ela anda $400m$ para o norte, $300m$ para o leste, $100m$ para o norte, $200m$ para o oeste e $200m$ para o sul, até que chegou ao museu. Qual a distância, em linha reta, do museu até o hotel?

Exercício 6. Utilize o Teorema de Pitágoras para mostrar que a medida da diagonal de um quadrado de lado ℓ é $\ell\sqrt{2}$.

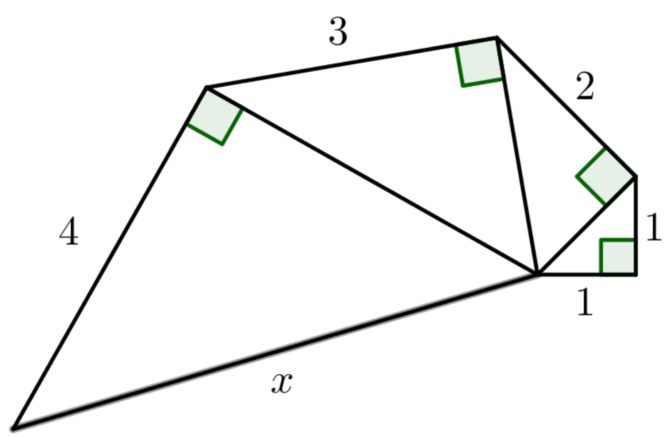
Exercício 7. Determine a medida da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede ℓ.

Exercício 8. O quadrilátero $ABCD$, da figura, tem diagonais perpendiculares. Calcule AD.

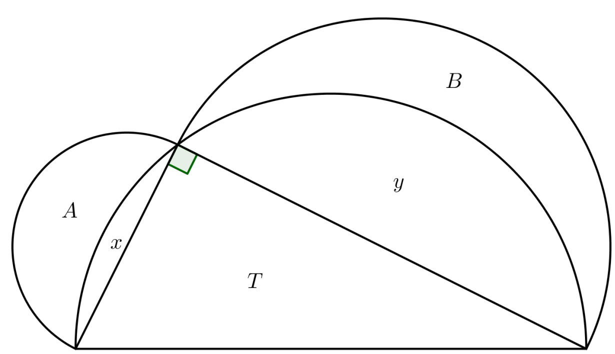


Exercício 9. Juliana e Alberto brincam com dois dados, um verde e um vermelho. Cada um deles joga os dados e o número que sai no dado verde deve ser o número de passos para frente que deve ser dado e o número que sai no dado vermelho deve ser o número de passos que deve ser dado para a direita. Vence quem chegar mais longe do ponto de partida. Se Juliana tirar 3 em ambos os dados e Alberto tirar 1 no dado verde e 5 no dado vermelho, quem vencerá?

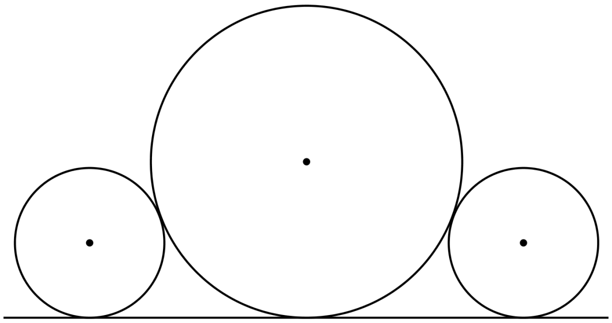
Exercício 10. Determine o valor de x na figura.



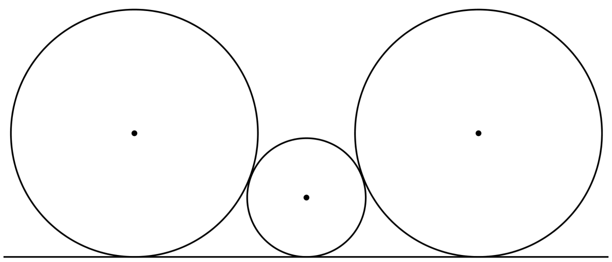
Exercício 11. Na figura, A, B, T, x e y indicam a área de suas partes correspondentes. Determine $A + B$, sendo A e B áreas delimitadas por semicircunferências cujos diâmetros são os lados do triângulo de área T.



Exercício 12. Na figura, o raio da circunferência maior mede R e o das circunferências menores, que são congruentes, mede r. A reta é tangente às três circunferências. Determine, em função de R e r a distância entre os centros das circunferências menores.



Exercício 13. Três circunferências de raios 1, R e R são tangentes externamente e tangentes a uma reta. Determine o valor de R.

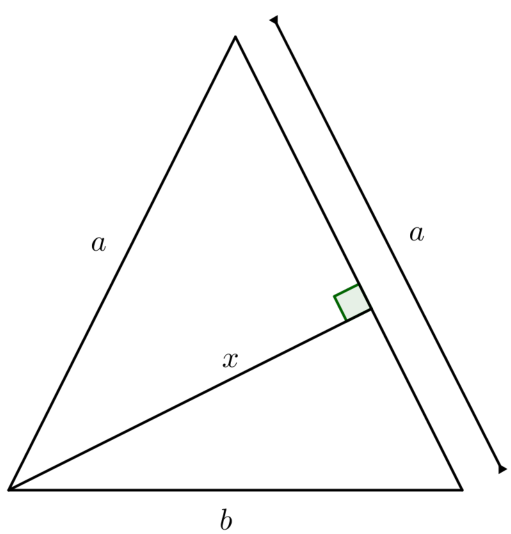


3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. No interior de um retângulo $ABCD$, toma-se um ponto P. Mostre que $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

Exercício 15. Toma-se um ponto P no interior de um triângulo equilátero ABC. Sabendo que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$, determine a medida do lado ABC.

Exercício 16. O valor de x^2 na figura é:



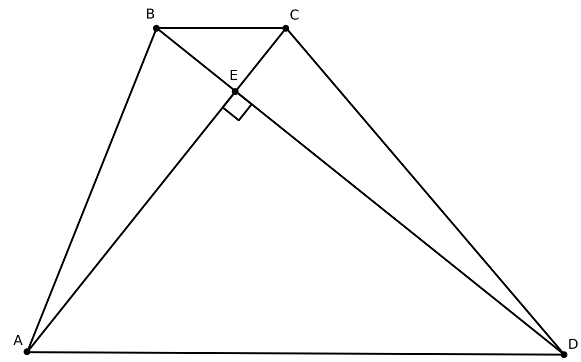
a) $b^2 - \dfrac{a^2}{4}$.

b) $\dfrac{a^4}{b^2} - \dfrac{a^2}{4}$.

c) $\dfrac{b^2}{a^4} - \dfrac{b^4}{a^2}$.

d) $b^2 - \dfrac{b^4}{4a^2}$.

Exercício 17. No desenho abaixo, $ABCD$ é um trapézio e suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Além disso, $BC = 10$ e $AD = 30$.

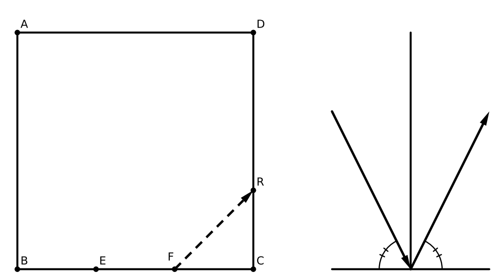


a) Determine a razão entre os segmetos BE e ED.

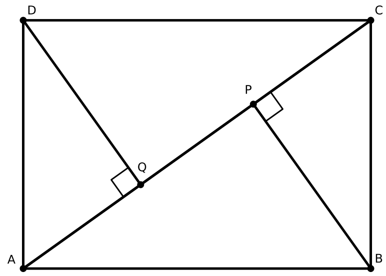
b) Encontre o valor do comprimento dos segmentos EC, AE e ED em função do comprimento de $BE = x$.

c) Se $AE \cdot EC = 108$, determine o valor de $BE \cdot ED$.

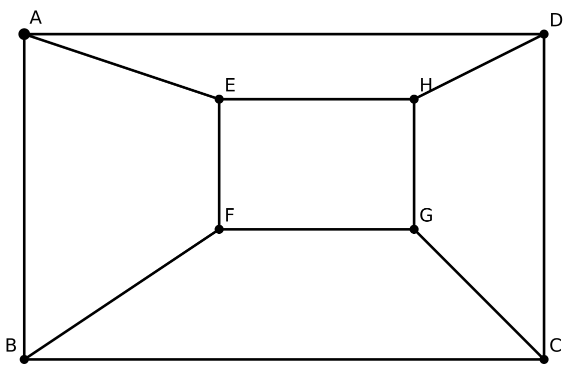
Exercício 18. O herói de um desenho animado enfrenta mais uma vez seu arqui-inimigo e precisa desferir seu famoso golpe do Raio Reflexivo. No quadrado da figura abaixo, o raio deverá, partindo de F ricochetear, exatamente uma vez nos lados CD, AD e AB, nesta ordem, antes de atingir o inimigo na posição E. Sempre que o raio ricocheteia em um dos lados do quadrado, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de saída como mostra a figura da direita. Sabendo que $BE = EF = FC = 2$m e que o raio viaja a $1m/s$, determine o tempo decorrido entre o disparo do raio em F e sua chegada ao ponto E.



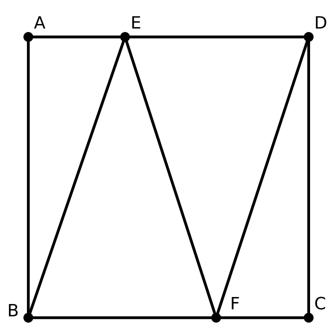
Exercício 19. No desenho abaixo, $ABCD$ é um retângulo e os pontos P e Q pertencem à diagonal AC de modo que $AQ = PQ = PC = 1$ e $\angle AQD = \angle BPC = 90°$. Encontre a área do retângulo $ABCD$.



Exercício 20. Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGH$ são retângulos de lados paralelos. Sabendo que $AE = 10$, $BF = 20$ e $DH = 30$, determine o comprimento do segmento CG.



Exercício 21. Os pontos E e F estão nos lados AD e BC, respectivamente, do quadrado $ABCD$. Sabendo que $BE = EF = FD = 30$, encontre a área do quadrado.



Respostas e Soluções.

1. C.

2. A diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos retângulos cujos catetos são altura e base e hipotenusa a própria diagonal. Temos então:

$$\begin{aligned} d^2 &= 8^2+12^2 \\ d^2 &= 64+144 \\ d^2 &= 208 \\ d &= 4\sqrt{13} \end{aligned}$$

3. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

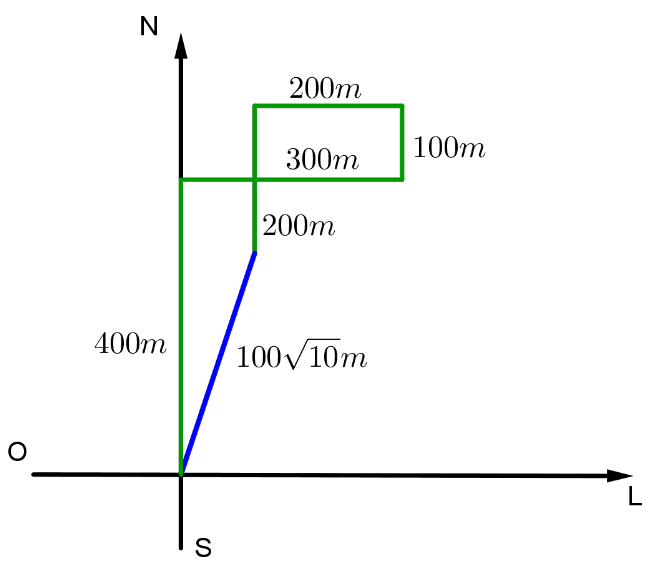
$$\begin{aligned} x^2+8^2 &= 10^2 \\ x^2+64 &= 100 \\ x^2 &= 36 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

4. A diagonal de um quadrado o divide em dois triângulos retângulos isósceles cujos catetos medem são os lados do quadrado e a hipotenusa a própria diagonal. Temos, então:

$$\begin{aligned} d^2 &= 12^2+12^2 \\ d^2 &= 144+144 \\ d^2 &= 2\cdot 144 \\ d &= \sqrt{2\cdot 144} \\ d &= 12\sqrt{2}cm. \end{aligned}$$

5. O deslocamento na direção norte-sul foi $400+100-200=300m$ (para o norte), enquanto que o deslocamento na direção leste-oeste foi $300-200=100m$ (para leste). Assim, o deslocamento vertical ($300m$ para o norte), o deslocamento horizontal ($100m$ para o leste) e a distância d entre o museu e o hotel formam, respectivamente, os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} d^2 &= 300^2+100^2 \\ d^2 &= 90000+10000 \\ d^2 &= 100000 \\ d &= 100\sqrt{10}m. \end{aligned}$$



6. A diagonal d de um quadrado o divide em dois triângulos retângulos cujos catetos possuem a medida ℓ do lado do quadrado e a hipotenusa é a própria diagonal. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} d^2 &= \ell^2+\ell^2 \\ d^2 &= 2\cdot\ell^2 \\ d &= \sqrt{2}\ell \\ d &= \ell\sqrt{2}cm. \end{aligned}$$

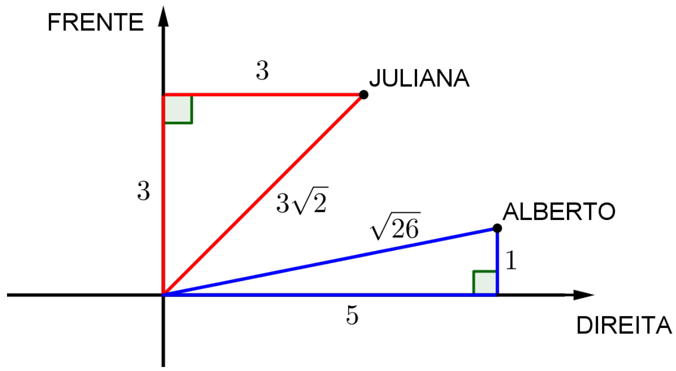
7. Traçando a altura h do triângulo, temos dois triângulos retângulos congruentes de catetos h e $\dfrac{\ell}{2}$ e hipotenusa ℓ. Aplicando o Teorema de Pitágoras em um desses triângulos retângulos, temos:

$$\begin{aligned} h^2+\left(\frac{\ell}{2}\right) &= \ell^2 \\ h^2 &= \ell^2-\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\ h^2 &= \frac{4\ell-\ell}{4} \\ h^2 &= \frac{3\ell}{4} \\ h &= \frac{\ell\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

8. (Extraído da Vídeo Aula) Na figura, temos quatro triângulos retângulos. Assim:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AE^2+DE^2 \\ AD^2 &= (8^2-BE^2)+(25^2-CE^2) \\ AD^2 &= 64+625-(BE^2+CE^2) \\ AD^2 &= 689-20^2 \\ AD^2 &= 689-400 \\ AD^2 &= 289 \\ AD &= \sqrt{289} \\ AD &= 17. \end{aligned}$$

9. Se houve um deslocamento vertical e horizontal, a trajetória até o ponto de partida forma um triângulo retângulo com os deslocamentos horizontais e verticais. Se a distância entre Juliana e o ponto de partida é J, temos $J^2=3^2+3^2$, segue que $J=3\sqrt{2}$ passos; e sendo A a distância entre Alberto o ponto de partida, temos $A^2=5^2+1^2$, segue que $A=\sqrt{26}$ passos. Como $\sqrt{26}>3\sqrt{2}$, Alberto ficou mais longe do ponto de partida, portanto, vence.



10. Vamos chamar as hipotenusas dos triângulos retângulos x, y, z e w, em ordem decrescente. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

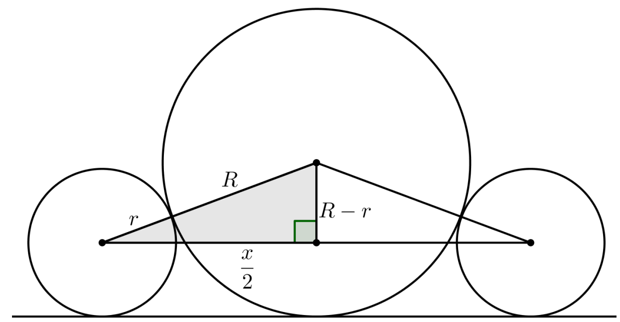
$$\begin{aligned}
x^2 &= 4^2 + y^2\\
x^2 &= 16 + (3^2 + z^2)\\
x^2 &= 16 + 9 + (2^2 + w^2)\\
x^2 &= 16 + 9 + 4 + (1^2 + 1^2)\\
x^2 &= 16 + 9 + 4 + 1 + 1\\
x^2 &= 31\\
x &= \sqrt{31}.
\end{aligned}$$

11. (Extraído da Vídeo Aula) A área A é a diferença entre a área da semicircunferência cujo diâmetro é um dos catetos e a área x, enquanto que a área B é a diferença entre a área da semicircunferência sobre o outro cateto e a área y. Temos também que a área da semicircunferência cujo diâmetro é a hipotenusa é $x + y + T$. Supondo que os catetos meçam b e c e a hipotenusa a, temos:

$$\begin{aligned}
A + B &= \left[\frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} - x\right] + \left[\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} - y\right]\\
&= \frac{\pi\left(\frac{b^2+c^2}{4}\right)}{2} - (x+y)\\
&= \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - (x+y)\\
&= T.
\end{aligned}$$

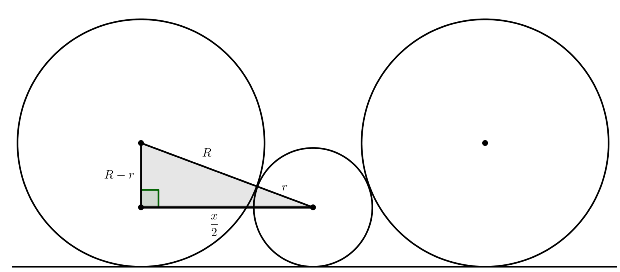
12. Ligando os três centros, teremos um triângulo de lados $(R + r)$, $(R + r)$ e x, que é a distância entre os centros das circunferências menores. Trançando a mediana, que também será altura, neste triângulo, relativa à base de medida x, teremos dois triângulos retângulos de lados $(R + r)$, $(R - r)$ e $\frac{x}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a um destes triângulos retângulos, temos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (R-r)^2 &= (R+r)^2\\
\left(\frac{x}{2}\right)^2 + R^2 - 2Rr + r^2 &= R^2 + 2Rr + r^2\\
\left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 4Rr\\
\frac{x}{2} &= 2\sqrt{Rr}\\
x &= 4\sqrt{Rr}.
\end{aligned}$$

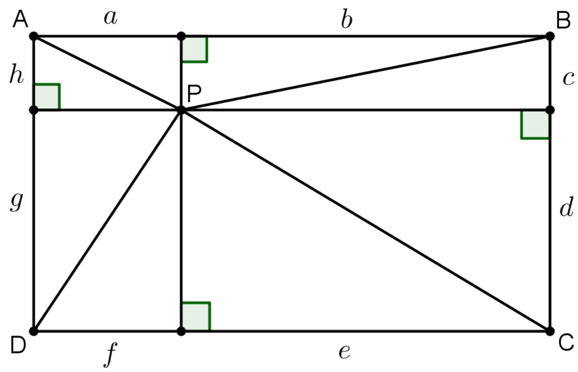


13. Ligando os três centros, teremos um triângulo de lados $(R + r)$, $(R + r)$ e x, que é a distância entre os centros das circunferências menores. Trançando a mediana, que também será altura, neste triângulo, relativa à base de medida x, teremos dois triângulos retângulos de lados $(R + r)$, $(R - r)$ e $\frac{x}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a um destes triângulos retângulos, temos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (R-r)^2 &= (R+r)^2\\
\left(\frac{x}{2}\right)^2 + R^2 - 2Rr + r^2 &= R^2 + 2Rr + r^2\\
\left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 4Rr\\
\frac{x}{2} &= 2\sqrt{Rr}\\
x &= 4\sqrt{Rr}.
\end{aligned}$$



14. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos traçar perpendiculares por P aos lados do retângulo, dividindo AB em a e b, BC em c e d, CD em e e f, AD em g e h, conforme a figura.

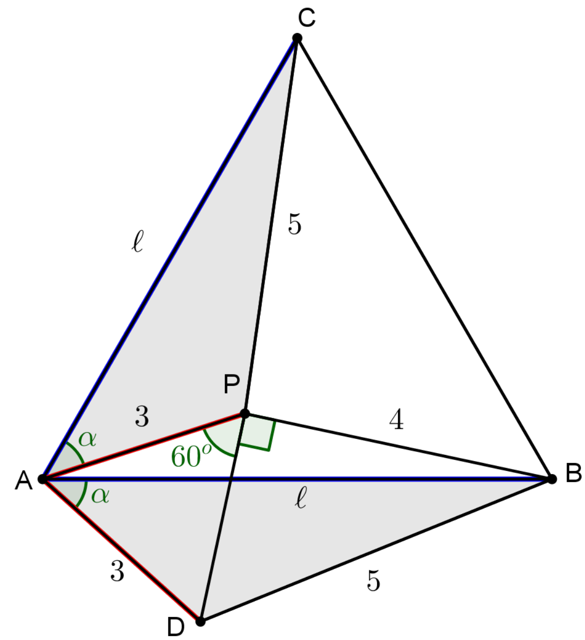


Temos, portanto:

$$\begin{aligned}
PA^2+PC^2 &= (a^2+h^2)+(d^2+e^2)\\
&= (a^2+d^2)+(h^2+e^2)\\
&= (f^2+g^2)+(c^2+b^2)\\
&= PD^2+PB^2\\
&= PB^2+PD^2.
\end{aligned}$$

15. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos marcar um ponto D, de maneira que $AD = 3$ e $\angle BAD = \angle CAP$. Dessa forma construímos um triângulo ABD semelhante ao triângulo CAP (LAL), pois $AB = AC$, $AD = AP$ e $\angle CAP = \angle BAD$. Observe que o triângulo APD é equilátero, pois $AP = AD = 3$ e $\angle PAD = 60^o$. Perceba também que o triângulo BPD tem lados medindo 3, 4 e 5, sendo $\angle BPD = 90^o$. Assim, como $\angle APB = 60^o + 90^o = 150^o$, $AP = 3$ e $PB = 4$, vamos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo APB:

$$\begin{aligned}
\ell^2 &= 3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 150^o\\
\ell^2 &= 9+16-24(-\cos 30^o)\\
\ell^2 &= 25+24\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\ell^2 &= 25+12\sqrt{3}\\
\ell &= \sqrt{25+12\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

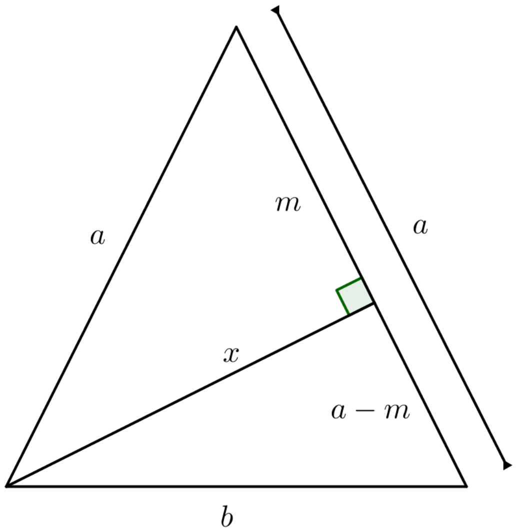


16. (Extraído da AFA) A altura x divide o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos: um de lados a, x e m, triângulo I; e outro de lados x, b e $(a-m)$, triângulo II. Pelo triângulo I, temos, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = x^2 + m^2$ (i). Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo II e usando a equação (i), temos:

$$\begin{aligned}
b^2 &= x^2+(a-m)^2\\
b^2 &= (a^2-m^2)+a^2-2am+m^2\\
b^2 &= 2a^2-2am\\
2am &= 2a^2-b^2\\
m &= \frac{2a^2-b^2}{2a}.
\end{aligned}$$

Vamos voltar agora à equação (i):

$$\begin{aligned}
a^2 &= x^2+m^2\\
a^2 &= x^2+\left(\frac{2a^2-b^2}{2a}\right)^2\\
x^2 &= a^2-\left(\frac{4a^4-4a^2b^2+b^4}{4a^2}\right)\\
x^2 &= \frac{4a^4-4a^4+4a^2b^2-b^4}{4a^2}\\
x^2 &= \frac{4a^2b^2-b^4}{4a^2}\\
x^2 &= b^2-\frac{b^4}{4a^2}.
\end{aligned}$$



Resposta D.

17.

a) Como BE e AD são paralelos, $\angle EBC = \angle EDA$ e $\angle BCE = \angle CAD$. Consequentemente, os triângulos $\triangle BEC$ e $\triangle EAD$ são semelhantes e $BE/ED = BC/AD = 10/30 = 1/3$. Analogamente, podemos mostrar que $EC/AE = 1/3$.

b) Pelo item anterior, sabemos que $ED = 3BE = 3x$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle BEC$, temos $EC^2 = BC^2 - BE^2 = 100 - x^2$ e, consequentemente $EC = \sqrt{100-x^2}$. Como $EC/AE = 1/3$, segue que $AE = 3\sqrt{100-x^2}$.

c) Se $AE \cdot EC = 108$, tem-se

$$108 = 3\sqrt{100-x^2} \cdot \sqrt{100-x^2} = 3(100-x^2).$$

Ou seja, $x^2 = 64$. Portanto,

$$\begin{aligned} BE \cdot ED &= x \cdot 3x \\ &= 3x^2 \\ &= 3 \cdot 64 = 192. \end{aligned}$$

18. Se a parede onde o raio reflete fosse um espelho, a sua trajetória também "apareceria" no outro lado do espelho como uma continuação em linha reta da trajetória inicial. Assim, após refletirmos o quadrado três vezes ao longo dos lados onde o raio incide, conseguiremos traçar uma trajetória imaginária com o mesmo comprimento da trajetória real. No desenho abaixo, o quadrado $ABCD$ foi refletido incialmente com respeito ao lado DC e depois seguido das reflexões nos lados DJ e JO. A soma dos quatro segmentos que compõem a trajetória real coincide com o comprimento do segmento FW. Como $OW = BE = EF$, segue que $OE = FW$.
Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo OME, temos:

$$OE^2 = OM^2 + EM^2 = 12^2 + 10^2 = 244$$

Portanto, $OE = 2\sqrt{61}m$. Consequentemente, o raio levará $2\sqrt{61}$ segundos para atingir o alvo.

19. Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos $DQ^2 = AQ \cdot QC = 2$. Pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle DAQ$ e $\triangle DQC$, temos:

$$\begin{aligned} AD^2 &= DQ^2 + AQ^2 \\ &= 2+1 \\ &= 3; \\ DC^2 &= DQ^2 + QC^2 \\ &= 2+4 \\ &= 6. \end{aligned}$$

A área do retângulo $ABCD$ é $AD \cdot DC = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$.

20. Realizaremos duas transformações geométricas no desenho de modo a manter os comprimentos de AE, DH, GC e BF inalterados. Translademos[1] o trapézio $AEFB$ para a direita como indicado na figura abaixo até EF coincidir com HG. Em seguida, translade o triângulo $\triangle AHD$, também como indicado abaixo, até que H coincida com G.
Sejam P o novo ponto obtido pelo colapso de E, H, G e F e x, y, z e w as suas distâncias aos lados do retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

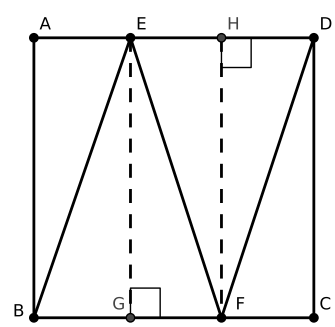
$$\begin{aligned} AE^2 = AP^2 &= x^2 + z^2 \\ DH^2 = PD^2 &= x^2 + w^2 \\ GC^2 = PC^2 &= y^2 + w^2 \\ BF^2 = PB^2 &= z^2 + y^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} AE^2 + GC^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\ &= DH^2 + BF^2 \\ &= 900 + 400. \end{aligned}$$

Finalmente, $GC = \sqrt{900 + 400 - 100} = 20\sqrt{3}$.

21. Sejam G e H os pés das perpendiculares traçadas de E e F aos lados BC e AD, respectivamente.



Como $AB = CD$ e $BE = FD$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{BE^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{FD^2 - CD^2} \\ &= FC. \end{aligned}$$

[1]Transladar um objeto significa mover todos os seus pontos em uma direção fixa e por uma distância fixa.

Além disto, como $EF = FD$, novamente pelo Teorema de Pitágoras, podemos concluir que

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{EF^2 - HF^2} \\ &= \sqrt{FD^2 - HF^2} \\ &= HD \\ &= FC. \end{aligned}$$

Consequentemente, $AE = EH = HD = x$ e $AB = AD = 3x$. Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEB, temos

$$900 = BE^2 = AE^2 + AB^2 = x^2 + 9x^2.$$

Logo, a área do quadrado é $AB^2 = 9x^2 = 810$.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM