Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N1 – CICLO 7

Este é o último ciclo de estudos do Programa OBMEP na Escola de 2018.

Pelo calendário divulgado previamente, os encontros deste ciclo devem acontecer em uma data próxima da data de realização da prova de segunda fase da OBMEP 2018.

O ciclo 7 fecha, então, o Programa OBMEP na Escola de 2018 com soluções de problemas variados de provas anteriores da OBMEP.

Aproveite este ciclo final para revisar conteúdos estudados previamente ou para resolver problemas diferentes que não foram discutidos anteriormente por falta de oportunidade.

Neste planejamento apresentamos uma sugestão de questões para os dois encontros deste ciclo. Entretanto, como não serão realizadas atividades avaliativas sobre o ciclo 7, essas questões podem ser substituídas por outras mais adequadas, dependendo do interesse dos estudantes ou das necessidades da turma.

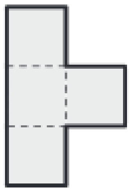
As listas de exercícios a seguir apresentam exercícios variados de álgebra, geometria, contagem, raciocínio lógico, gráficos, etc. Em cada polo, o professor poderá dar um enfoque maior ou menor em determinado assunto dependendo do interesse ou do desenvolvimento da turma. Entretanto, como os exercícios sugeridos são variados, de algum modo, eles podem ser utilizados como uma espécie de simulado para a prova da segunda fase da OBMEP 2018.

OBSERVAÇÃO: Como o Programa OBMEP na Escola termina com os dois encontros do ciclo 7 e, portanto, como não serão realizados os encontros do ciclo 8, não será aplicada a avaliação presencial sobre os conteúdos desenvolvidos no ciclo 7.

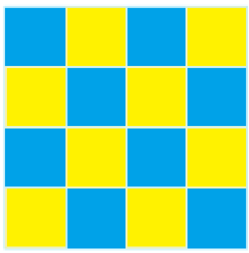
Exercício 1. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 2)
Em uma brincadeira, João e Maria retiram cartões numerados de 1 a 7 que estão sobre uma mesa, com as faces numeradas viradas para baixo. Em cada rodada, João retira três cartões e Maria retira dois, restando dois cartões na mesa. Depois de cada rodada, todos os cartões são embaralhados e devolvidos à mesa.

(a) Na primeira rodada, João retirou um cartão com um número ímpar e dois cartões com números pares. Maria retirou dois cartões com números ímpares. Explique por que a soma dos números dos cartões que sobraram na mesa é ímpar.
(b) Na segunda rodada, João observou que o produto dos números de seus três cartões era ímpar. O produto dos números dos dois cartões de Maria era par ou era ímpar? Explique sua resposta.
(c) Na terceira rodada, João olhou seus três cartões e concluiu, acertadamente, que a soma dos números dos dois cartões de Maria era par. Quais foram os cartões que João retirou? Explique sua resposta.

Exercício 2. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 5)
Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



(a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4x4 com essas peças.

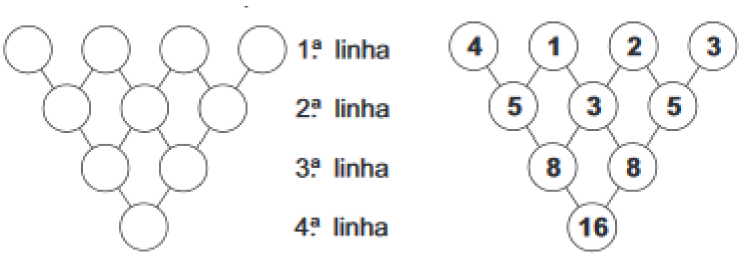


(b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.
(c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10x10 com suas peças.

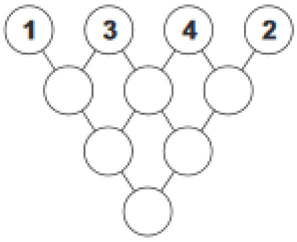
Exercício 3. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2017 – N1 – questão 2)
Um tabuleiro é formado por dez casas, ligadas como na figura a seguir e a esquerda. As casas desse tabuleiro devem ser preenchidas com números, seguindo as regras:

- na primeira linha, os números 1, 2, 3 e 4 devem aparecer sem repetição;
- nas demais linhas, o número em cada casa é a soma dos números nas duas casas da linha de cima que estão ligadas a ela.

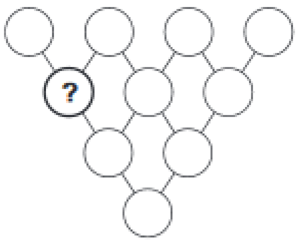
Observe abaixo e a direita uma forma de preencher completamente o tabuleiro.



(a) Complete o tabuleiro abaixo seguindo as regras de preenchimento descritas acima.



(b) Começando com o tabuleiro vazio, e seguindo as mesmas regras acima, quais são os números que podem aparecer na primeira casa da segunda linha?



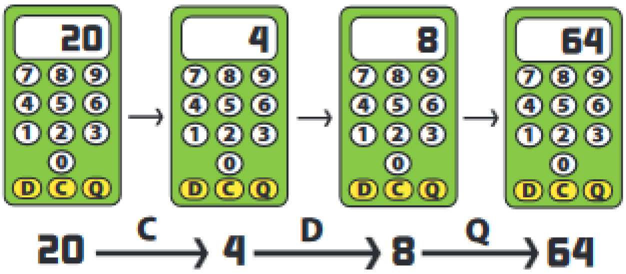
(c) Começando novamente com o tabuleiro vazio, e seguindo as mesmas regras, qual é o maior número que pode aparecer na terceira linha?

(d) Explique por que, seguindo as mesmas regras, a casa da última linha nunca será preenchida com o número 25.

Exercício 4. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – N1 – questão 2)
A calculadora de Raquel é um pouco diferente. Além das 10 teclas numéricas de 0 a 9, ela só tem três teclas de operações:

- a tecla Q, que multiplica o número do visor por ele mesmo;
- a tecla D, que multiplica o número do visor por 2;
- a tecla C, que divide o número do visor por 5.

Raquel se diverte colocando um número inteiro no visor e produzindo novos números usando apenas as teclas de operações. Por exemplo, começando com o número 20 e usando a sequência de teclas CDQ, Raquel obteve o número 64, como se pode ver na figura.



(a) Raquel começou com 15 e obteve 18 apertando três teclas de operações. Qual foi a sequência de teclas que ela usou?
(b) Usando a sequência de teclas DCQC, Raquel obteve o número 7,2. Com qual número ela começou?
(c) Apresente uma maneira de Raquel obter o número 0,08 em sua calculadora, indicando o número inicial e a sequência de teclas de operações.

Exercício 5. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 3)
Mônica usou 25 palitos sobre uma mesa e três cartões, um com o número 0, outro com o número 1 e o último com o número 2, para uma brincadeira com seus amigos Ana, Beatriz e Carlos. Sem olhar, ela pede para cada um pegar um cartão e também pede para:

- Ana retirar da mesa tantos palitos quanto o número de seu cartão;
- Beatriz retirar da mesa tantos palitos quanto o triplo do número do seu cartão;
- Carlos retirar da mesa tantos palitos quanto nove vezes o número do seu cartão.

Contando os palitos que restaram sobre a mesa, Mônica tenta acertar quem escolheu cada cartão.

(a) Quantos palitos restarão sobre a mesa se Ana pegar o cartão com o número 1, Beatriz pegar o cartão com o número 0 e Carlos pegar o cartão com o número 2?
(b) Qual é a menor quantidade de palitos que pode restar sobre a mesa nessa brincadeira?
(c) Qual é o número do cartão que Ana pegou, se restaram 14 palitos sobre a mesa?
(d) Explique por que Mônica sempre pode acertar quem escolheu cada cartão, se ela souber quantos palitos restaram sobre a mesa.

Exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2016 – N1 – questão 17)
Uma praça circular é rodeada de casas. Ana e Pedro saíram de casas diferentes e deram uma volta ao redor da praça, no mesmo sentido, contando as casas pelas quais iam passando. A quinta casa contada por Ana foi a décima segunda de Pedro e a vigésima de Ana foi a quinta de Pedro. Quantas casas existem em volta da praça?

Exercício 7. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 4)
Juca listou todos os números que podem ser escritos, da esquerda para a direita, obedecendo às seguintes regras:

- não começar com zero;
- não repetir algarismos;
- acrescentar um novo algarismo somente se for múltiplo ou divisor do último algarismo escrito;
- continuar a escrita do número enquanto for possível acrescentar um novo algarismo.

Por exemplo, o número 2015 está na lista de Juca, pois ele é escrito começando com 2, que é diferente de 0, depois com 0, que é múltiplo de 2, depois com 1, que é divisor de 0, e seguido de 5, que é múltiplo de 1. A escrita termina com 5, pois este algarismo não é múltiplo nem divisor dos algarismos que ainda não foram escritos (3, 4, 6, 7, 8 e 9).

(a) O número 1063 não está na lista de Juca, pois é possível acrescentar um último algarismo à direita do 3. Qual é esse algarismo?
(b) Juca escreveu os números de sua lista em ordem crescente. Qual é o primeiro número que ele escreveu depois do 2015?
(c) Qual é o menor número da lista de Juca?
(d) Qual é o maior número da lista de Juca?

Exercício 8. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – N1 – questão 6)
Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência

$$21 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

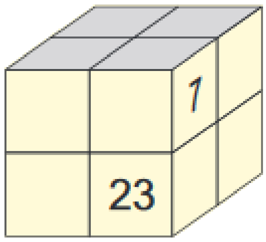
(a) Escreva a sequência que começa com 37.
(b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.
(c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?
(d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Exercício 9. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2017 – N1 – questão 20)
Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de sete bolas com três cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?

Exercício 10. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 16)
Todos os números de 1 a 24 devem ser escritos nas faces de um cubo, obedecendo-se às seguintes regras:

- em cada face devem ser escritos quatro números consecutivos;
- em cada par de faces opostas, a soma do maior número de uma com o menor número da outra deve ser igual a 25.

Se os números 7 e 23 estiverem escritos no cubo como na figura, qual é o menor número que pode ser escrito na face superior do cubo, destacada em cinza?



Solução do exercício 1. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 2)

(a) Na listagem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, há quatro números ímpares e três pares. Após João e Maria terem retirado seus cartões, sobraram na mesa um cartão ímpar e um cartão par. Desse modo, a soma dos cartões que sobraram na mesa é a soma de um número par com um número ímpar sendo, portanto, ímpar.

(b) Como o produto dos três cartões retirados por João era ímpar, seus três cartões certamente eram ímpares. Assim, sobraram na mesa três cartões com números pares e um cartão com número ímpar para Maria retirar. Como Maria retirou dois desses cartões restantes, certamente retirou pelo menos um cartão par. Consequentemente, o produto dos números dos cartões retirados por Maria na segunda rodada foi par.

(c) João concluiu acertadamente que a soma dos números dos cartões de Maria é par porque ele retirou os três cartões pares. Caso contrário, sempre haveria a possibilidade de Maria retirar um cartão par e um cartão ímpar, que somados resultaria em um número ímpar. Logo João retirou os cartões 2, 4 e 6.

Solução do exercício 2. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 5)

(a) As figuras abaixo apresentam as duas únicas maneiras possíveis, a menos de rotação, de cobrir o tabuleiro 4x4.

(b) Cada peça cobre exatamente 4 quadradinhos, e portanto 20 peças cobrem uma área formada por 80 quadradinhos. Como 80 não é um número quadrado perfeito, não existe um tabuleiro quadrado com exatamente 80 quadradinhos.

(c) Para cobrir um tabuleiro 10x10, são necessárias 25 peças, uma vez que 100=4x25. Cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim podemos dividir as peças que cobrem o tabuleiro em dois grupos:

Grupo 1: As que cobrem exatamente uma casa amarela (e, portanto, três azuis).
Grupo 2: As que cobrem exatamente três casas amarelas (e, portanto, uma azul).

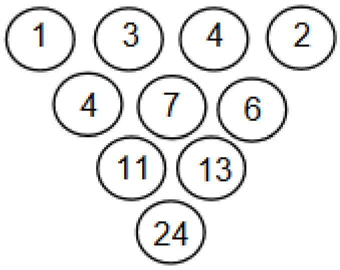
Suponha que fosse possível distribuir as 25 peças sobre o tabuleiro cobrindo todas as suas casas.

Se o número de peças do Grupo 1 for par, o número de peças do Grupo 2 deve ser ímpar, pois a soma desses números deve ser igual à quantidade de peças usadas (25). Neste caso, o número de casas azuis cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que há 50 casas azuis num tabuleiro 10x10.

Se o número de peças do Grupo 1 for ímpar, o número de peças do Grupo 2 deve ser par, pois, pelo mesmo motivo, a soma do número de peças destes dois grupos deve ser 25. Neste caso, o número de casas amarelas cobertos deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que também há 50 casas amarelas num tabuleiro 10x10.

Solução do exercício 3. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2017 – N1 – questão 2)

(a) Há uma única maneira de preencher o tabuleiro:



(b) O número que aparece na primeira casa da segunda linha depende de como são colocados os dois primeiros números da primeira linha. As possibilidades são as seguintes:

1+2=2+1=3	1+3=3+1=4	1+4=4+1=5	2+3=3+2=5
2+4=4+2=6	3+4=4+3=7		

Logo, na primeira casa da segunda linha somente podem aparecer os seguintes números: 3, 4, 5, 6 ou 7. Observe que o único número que pode aparecer repetido na segunda linha é 5 e que o maior número da segunda linha é 7.

(c) O maior número que pode aparecer na terceira linha é 13. Ele aparece quando somamos os dois maiores números que podem aparecer na segunda linha, ou seja, o 6 com o 7. Não há, assim, maneira de fazer aparecer na terceira linha um número maior do que 13, já que números de uma linha são sempre a soma de dois números da linha anterior e, somando os maiores de uma linha, obtemos o maior da linha seguinte.

(d) Primeira solução. O número 25 nunca aparecerá na última linha, pois o número que aparece na última linha sempre é par. De fato, dentre os números 1, 2, 3 e 4, dois deles são pares e dois são ímpares. Na primeira linha eles podem ser colocados de seis maneiras diferentes:

(par, par, ímpar, ímpar)	(par, ímpar, par, ímpar)	(par, ímpar, ímpar, par)
(ímpar, par, par, ímpar)	(ímpar, par, ímpar, par)	(ímpar, ímpar, par, par).

Em qualquer um desses casos, considerando que a soma de dois números pares é par, que a soma de um par com um ímpar é ímpar e que a soma de dois ímpares é par, chegaremos à conclusão deque, usando as regras de preenchimento, o elemento da última linha sempre é par

Segunda solução. Vamos mostrar que o maior número que pode aparecer na última linha é 24. Para obter o maior resultado possível, olhamos para a segunda linha: a casa central da segunda linha deve conter o número 7 (o maior possível nesta linha), pois ele vai contribuir duas vezes como parcela para formar a terceira linha. Além disso, seus dois vizinhos na segunda linha somam 10, pois 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Logo, para obter o resultado máximo, a soma dos elementos da segunda linha deve ser 17. Olhamos agora para a terceira linha: a soma dos números dessa linha forçosamente será 2 x 7 + 10 = 24. E se a soma dos números na terceira linha é 24, então, na última casa o número que aparece é 24. Logo, 24 é o maior valor possível para o elemento da última linha. De fato, 24 pode efetivamente ocorrer na última linha, como foi mostrado no exemplo do item (a).

Solução do exercício 4. [Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – N1 – questão 2]

(a) A única sequência de operações é CQD, como vemos: $15 \overset{C}{\rightarrow} 3 \overset{Q}{\rightarrow} 9 \overset{D}{\rightarrow} 18$. Existem outras sequências que produzem 18 a partir de 15, mas elas têm comprimento maior do que 3, como por exemplo, $15 \overset{Q}{\rightarrow} 225 \overset{C}{\rightarrow} 45 \overset{C}{\rightarrow} 9 \overset{D}{\rightarrow} 18$.

(b) A última tecla que Raquel apertou foi C, que divide por 5; para saber qual o número que havia no visor antes de apertar essa tecla, devemos desfazer o efeito da tecla C, ou seja, devemos multiplicar 7,2 por 5, obtendo $7{,}2 \times 5 = 36$. A penúltima tecla que Raquel apertou foi Q, que eleva ao quadrado; para desfazer o efeito dessa tecla, basta saber qual o número que elevado ao quadrado dá 36; esse número é 6 pois $6 \times 6 = 36$. A seguir, novamente invertemos a tecla C, obtendo $6 \times 5 = 30$. Agora basta inverter a operação de duplicação da tecla D; para isto dividimos o resultado anterior por 2, o que produz o número $30 \div 2 = 15$. Verificando: $15 \overset{D}{\rightarrow} 30 \overset{C}{\rightarrow} 6 \overset{Q}{\rightarrow} 36 \overset{C}{\rightarrow} 7{,}2$.

(c) Escrevendo 0,08 na forma de fração, temos $0{,}08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2$. Isto nos mostra que 0,08 pode ser obtido dividindo 2 por 5 e dividindo o resultado novamente por 5. Assim Raquel pode obter 0,08 começando com 2 e apertando duas vezes a tecla C, ou seja, usando a sequência CC.

Solução do exercício 5. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 3)

(a) Ana pegará 1 palito, Beatriz não pegará palitos e Carlos pegará 9x2=18 palitos, totalizando 19 palitos retirados. Sobrarão então 25-19=6 palitos.

(b) A menor quantidade de palitos restantes corresponde ao número máximo de palitos retirados. Esse número é obtido multiplicando 1, 3 e 9 por 0, 1 e 2 respectivamente e somando os resultados. O máximo obtido é $(0 \times 1) + (1 \times 3) + (2 \times 9) = 21$. Podem sobrar, no mínimo, 25-21=4 palitos.

(c) Restarão 14 palitos quando forem retirados 11 deles. O cartão de Carlos não pode ser o de números 0 ou 2, pois, no primeiro caso, o número de palitos retirados seria, no máximo, igual a $(1 \times 1) + (3 \times 2) + (0 \times 9) = 7$, que é menor que 11 e, no segundo caso, seriam retirados mais de 18 palitos, que é uma quantidade superior a 11. Portanto, Carlos pegou o cartão com o número 1 e retirou 9 palitos. Consequentemente, Ana e Beatriz retiraram, juntas, 2 palitos. Assim sendo, Beatriz não pegou o cartão 2; pegou o cartão 0 e Ana, o cartão 2.

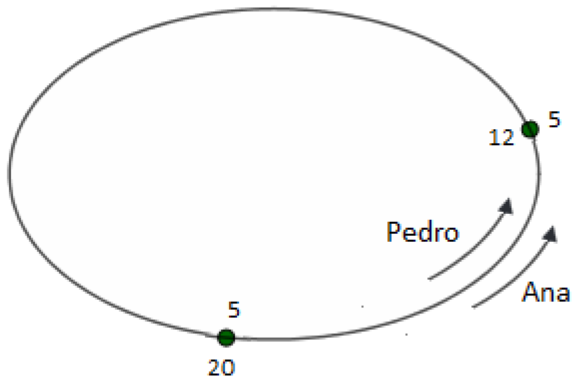
(d) Há 6 possibilidades diferentes para as escolhas de cartões feitas por Ana, Beatriz e Carlos. Para cada uma dessas escolhas, a quantidade que sobra de palitos é diferente, conforme mostra a tabela a seguir.

Ana	Beatriz	Carlos	Palitos retirados	Palitos que sobraram
0	1	2	0x1 + 1x3 + 2x9 = 21	4
0	2	1	0x1 + 2x3 + 1x9 = 15	10
1	0	2	1x1 + 0x3 + 2x9 = 19	6
1	2	0	1x1 + 2x3 + 0x9 = 7	18
2	0	1	2x1 + 0x3 + 1x9 = 11	14
2	1	0	2x1 + 1x3 + 0x9 = 5	20

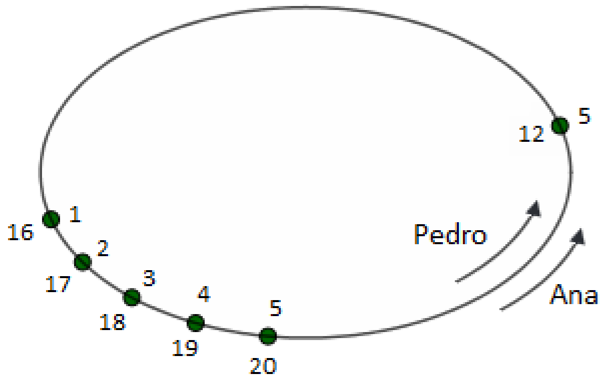
Como os números que sobram são diferentes, para cada um desses números, olhando a linha da tabela anterior, Mônica consegue saber qual cartão foi retirado por cada um de seus amigos.

Solução do exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2016 – N1 – questão 17)

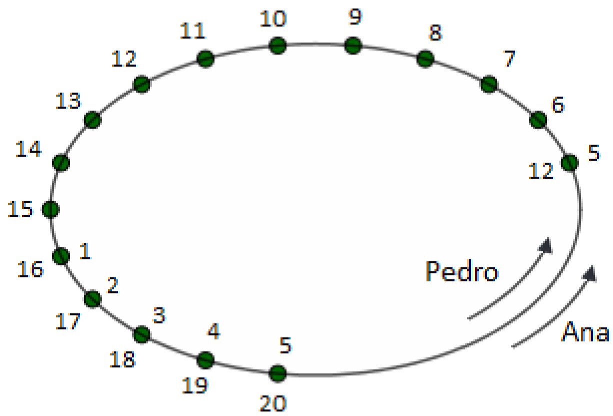
A figura ao lado ilustra a situação descrita no enunciado: Pedro e Ana andando ao redor da praça; a 5ª casa de Pedro é a 20ª casa de Ana e a 12ª casa de Pedro é a 5ª casa de Ana. Vamos sempre escrever os números contados por Pedro no interior, e os números contados por Ana no exterior das nossas figuras.



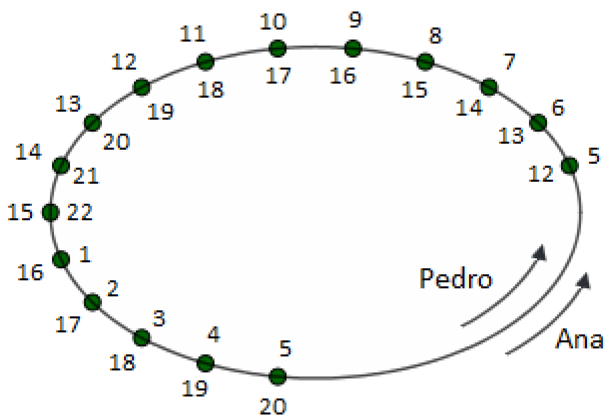
Retrocedendo a contagem de Pedro, vemos que a 4ª casa de Pedro é a 19ª casa de Ana; a 3ª casa de Pedro é a 18ª casa de Ana; a 2ª casa de Pedro é a 17ª casa de Ana e a 1ª casa de Pedro é a 16ª casa de Ana.



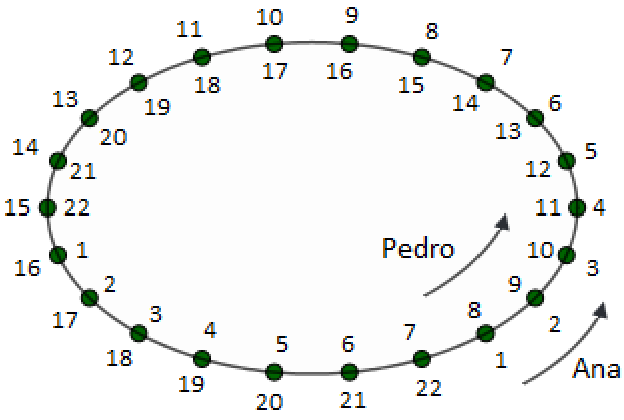
Agora vamos retroceder, de uma em uma, apenas as casas de Ana, da 16ª até a 5ª casa que ela contou.



Quando chegamos na 5ª casa de Ana também estamos na 12ª casa de Pedro. Agora é só ir avançar as casas de Pedro, de uma em uma, da 5ª casa até a última (que é a casa imediatamente anterior a primeira que ele contou). Procedendo deste modo, vemos que a 22ª casa de Pedro é a 16ª casa de Ana e que existem 22 casas na praça.



A figura a seguir ilustra as correspondências entre as casas contadas por Pedro e as casas contadas por Ana.



Solução do exercício 7. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 4)

(a) Como não é possível repetir algarismos, os algarismos que podem ser acrescentados à direita de 1063 são 2, 4, 5, 7, 8 e 9; desses, o único que é múltiplo ou divisor de 3 é o algarismo 9 (9 é múltiplo de 3). O número 10639 está na lista de Juca, não é possível acrescentar um novo algarismo pois 2, 4, 5, 7 e 8 não são múltiplos nem divisores de 9.

(b) O número natural sucessor de 2015 é 2016, entretanto ele não está na lista de Juca, pois os números dessa lista devem ser acrescidos de algarismos enquanto for possível colocar múltiplo ou divisor do último algarismo escrito, ou seja 2016 pode ser completado a 201639. O próximo número que vem depois do 2016 é 2017, e este sim está na lista de Juca, já que 3, 4, 5, 6, 8 e 9 não são múltiplos nem divisores de 7.

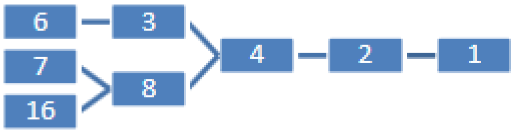
(c) Como qualquer número é múltiplo de 1 e divisor de 0, todos os números listados por Juca vão conter os algarismos 0 e 1 e sempre será possível acrescentar outro algarismo disponível à direita desses dois algarismos. Assim, todos os números listados por Juca têm pelo menos três algarismos. Os primeiros números com três algarismos distintos são 102, 103 e 104, que não estão na lista de Juca, pois é possível acrescentar 4 ou 8 à direita do 2, 6 ou 9 à direita do 3 e 2 ou 8 à direita do 4. Como 105 está na lista de Juca, pois não é possível acrescentar os algarismos 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9 à direita do 5, segue que esse é o menor número na lista de Juca.

(d) O maior número da lista de Juca é o 9362841705. Ele é o maior porque contém todos os algarismos, começa com 9 e sempre é acrescentado, a cada vez, o maior algarismo possível que seja múltiplo ou divisor do último algarismo escrito.

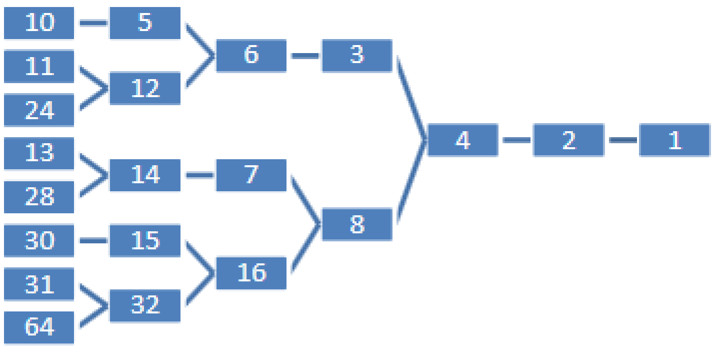
Solução do exercício 8. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – N1 – questão 6)

(a) A sequência é 37 → 38 → 19 → 20 → 10 → 5 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1.

(b) A única sequência de comprimento 3 é 4 → 2 → 1. As sequências de comprimento 4 são 3 → 4 → 2 → 1 e 8 → 4 → 2 → 1. Elas são obtidas a partir de 4 → 2 → 1, a primeira acrescentando 4-1=3 à esquerda e a segunda acrescentando 2x4=8 à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar 3 → 4 → 2 → 1 dà origem à sequência par 6 → 3 → 4 → 2 → 1; e a sequência par 8 → 4 → 2 → 1 dá origem à sequência ímpar 7 → 8 → 4 → 2 → 1 e à sequência par 16 → 8 → 4 → 2 → 1. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



(c) Repetindo o esquema do item anterior, temos:



Assim temos três sequências pares e duas ímpares de comprimento 6. De comprimento 7 existem cinco sequências pares e três ímpares.

(d) As 144 sequências ímpares de comprimento quinze dão origem a 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze dão origem a 233 sequências pares de comprimento dezesseis e 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e 377 = 223 + 144 sequências pares de comprimento dezesseis, num total de 233 + 377 = 610 sequências.

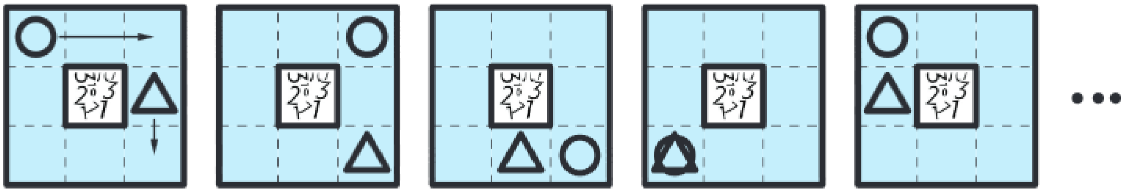
Solução do exercício 9. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2017 – N1 – questão 20)
Observamos primeiro que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; por exemplo, ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 amarela. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue.

Ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma 1ª cor. De fato, se isso não acontecesse, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo 5+5+5+5=20 bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo 23 – 10 = 13 bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma 2ª cor e que sobram no mínimo 13 – 10 = 3 bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelos menos 2 bolas de uma 3ª cor.

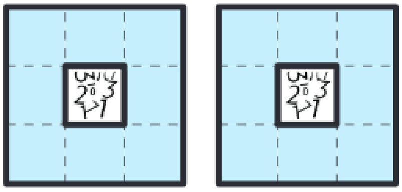
Mostramos, assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma 1ª cor, 5 de uma 2ª cor e 2 de uma 3ª cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da 1ª cor, 2 da 2ª e 2 da 3ª. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Solução do exercício 10. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 16)
Como em cada face aparecem quatro números consecutivos, então na face onde estiver o número 1, obrigatoriamente estarão os números 1, 2, 3 e 4. Logo, na face onde estiver o número 5 estarão os números 5, 6, 7 e 8, e assim, sucessivamente, até chegarmos à face com os números 21, 22, 23 e 24. Sendo assim, no cubo apresentado a face com o número 23 também apresenta os números 21, 22 e 24. Como o enunciado diz que a soma do maior número de uma face com o menor da face oposta é igual a 25, podemos concluir que na face oposta à que contém o 23 estão os números 1, 2, 3 e 4. Na face em que aparece o número 7 aparecem os números 5, 6 e 8, e na face oposta a esta estão os números 17, 18, 19 e 20. Logo, na face destacada (em cinza) pode estar qualquer número de 9 até 16. Como a pergunta é qual é o menor número que pode aparecer na face cinza, a resposta é 9.

Exercício 1. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 1)
Na sequência de quadros abaixo, uma bolinha e um triângulo caminham no sentido horário pelas casas azuis. De um quadro para o seguinte, o triângulo passa de uma casa para a casa vizinha, e a bolinha pula uma casa.

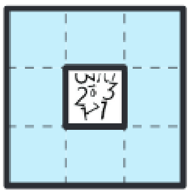

Quadro 1 Quadro 2 Quadro 3 Quadro 4 Quadro 5

(a) Desenhe a bolinha e o triângulo do Quadro 6 e do Quadro 7 da sequência.


Quadro 6 Quadro 7

(b) Continuando a sequência, qual é o número do primeiro quadro em que a bolinha e o triângulo estão na mesma posição do Quadro 1?

(c) Desenhe a bolinha e o triângulo do Quadro 2015


Quadro 2015

Exercício 2. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2016 – N1 – questão 1)
Sem usar o algarismo 0, Carolina escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois. Por exemplo, Carolina escreveu 241, mas não escreveu 570, nem 464, nem 123.

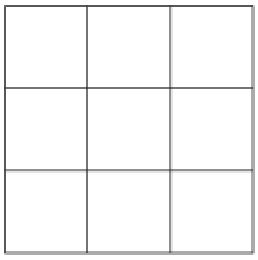
(a) Quantos números Carolina escreveu ao todo?
(b) Quantos números Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 7?
(c) Quais são os números que Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 3?

Exercício 3. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2010 – N1 – questão 6)

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados de Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é 5+8+2=15 e a soma dos números da segunda coluna é 9+7+8=24. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

(a) Gabriel preencheu um quadro e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?
(b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.
(c) Preencha o quadro de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.



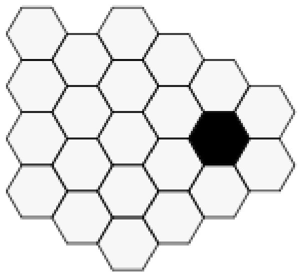
Exercício 4. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 6)

Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.

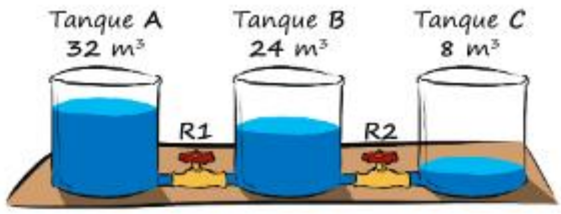
(a) Quantas são as senhas que começam com 20152015?
(b) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?
(c) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?

Exercício 5.

Cada um dos hexágonos brancos da figura ao lado deve ser colorido com uma das cores vermelho, amarelo ou verde. Se dois hexágonos possuem um lado em comum, então eles devem ser coloridos com cores diferentes. O hexágono preto da figura não deve ser colorido. De quantas maneiras diferentes esta figura pode ser colorida respeitando-se essas regras?



Exercício 6. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2013 – N1 – questão 3)
Três tanques iguais contêm, inicialmente, 32, 24 e 8 metros cúbicos de água e estão ligados por registros, como na figura. Estes registros servem para deixar a água passar de um tanque (mais cheio) para o outro (menos cheio) até que ambos fiquem com o mesmo volume de água. Só se pode abrir um registro de cada vez, e ele é fechado assim que os tanques que ele liga fiquem com o mesmo volume de água.

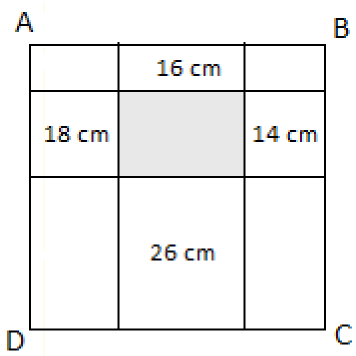


Por exemplo, ao abrir o registro R2 na situação inicial, os tanques A, B e C ficarão, respectivamente, com 32, 16 e 16 metros cúbicos. A seguir, ao fechar R2 e abrir R1 os tanques A, B e C ficarão, respectivamente, com 24, 24 e 16 metros cúbicos. Representamos essa sequência por

$$(32,24,8)\xrightarrow{R2}(32,16,16)\xrightarrow{R1}(24,24,16)$$

(a) A partir da situação inicial, qual será o volume de água nos tanques A e B após abrirmos o registro R1?
(b) A partir da situação inicial, exiba uma sequência de aberturas de registros de modo que o tanque C fique com exatamente 21 metros cúbicos de água.
(c) Explique porque o tanque A sempre vai ficar com mais de 21 metros cúbicos de água, qualquer que seja a sequência de abertura de registros a partir da situação inicial.

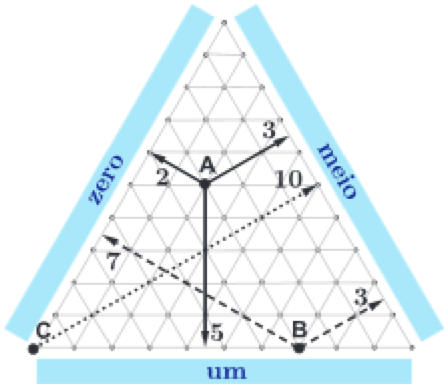
Exercício 7. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2016 – N1 – questão 19)
O retângulo ABCD foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo ABCD é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?

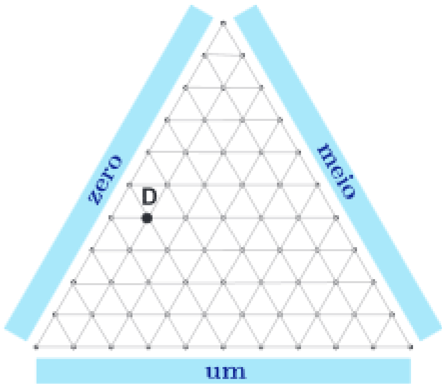


Exercício 8. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2009 – N1 – questão 12)
Mário montou um cubo com doze varetas iguais e quer pintá-las de modo que em nenhum vértice se encontrem varetas de cores iguais. Qual é o menor número de cores que ele precisa usar?

Exercício 9. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 5)
A professora Isabel aplicou uma prova com 10 questões. Cada aluno recebeu nota 0,0 (zero), 0,5 (meio) ou 1,0 (um) em cada questão. O desempenho de cada aluno foi associado a um ponto de uma malha triangular, delimitada por um triângulo equilátero de altura 10, como na figura. O ponto associado a um aluno é escolhido de forma que suas distâncias aos lados do triângulo sejam iguais às quantidades de questões em que o aluno obteve nota zero, meio ou um, respectivamente. Por exemplo, na figura a seguir, o aluno A tirou zero em 2 questões, meio em 3 questões e um em 5 questões, obtendo 6,5 na prova. O aluno B obteve 1,5 na prova, pois tirou meio em 3 questões e zero em 7 questões. O aluno C obteve 5,0 na prova, pois tirou meio nas 10 questões.

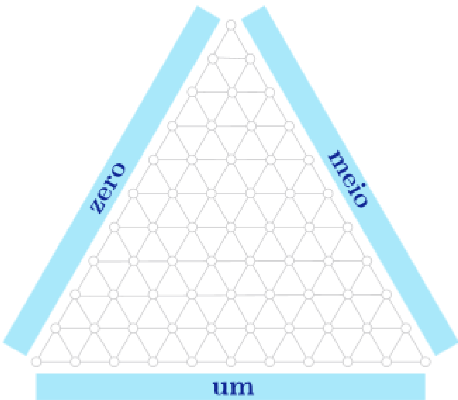
(a) Qual foi a nota obtida na prova pelo aluno D?





(b) Quantos pontos da malha estão associados a alunos que tiram zero em exatamente quatro questões?

(c) Assinale na malha abaixo os pontos associados a alunos que obtêm nota igual a 7,0 ou maior do que 7,0.



Exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2009 – N1 – questão 1)
Joãozinho coleciona números naturais cujo algarismo das unidades é a soma dos outros algarismos. Por exemplo, ele colecionou 10023, pois 1+0+0+2=3.

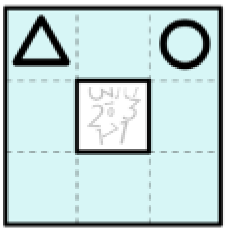
(a) Na coleção de Joãozinho há um número que tem 4 algarismos e cujo algarismo das unidades é 1. Que número é esse?

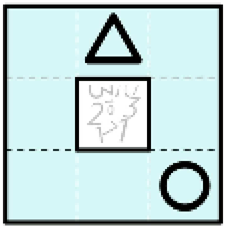
(b) Qual é o maior número sem o algarismo 0 que pode aparecer na coleção?

(c) Qual é o maior número sem algarismos repetidos que pode aparecer na coleção?

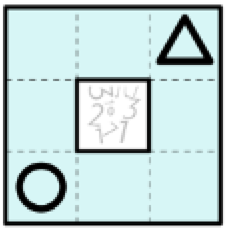
Solução do exercício 1. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 1)

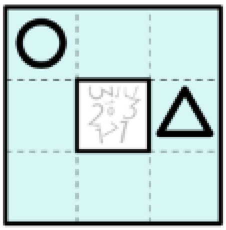
(a) Basta continuar os movimentos descritos no enunciado para preencher os quadros.


Quadro 6

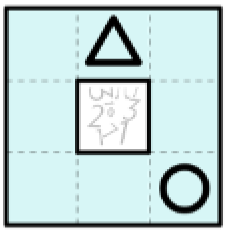

Quadro 7

(b) Basta continuar por mais dois quadros para ver que a situação do Quadro 1 se repete no Quadro 9. Também é possível concluir isso observando que a bolinha retorna à posição inicial a cada quatro quadros consecutivos enquanto que o triângulo retorna à posição inicial a cada oito quadros consecutivos; logo a situação do Quadro 1 vai se repetir após oito quadros consecutivos, ou seja, no Quadro 9.


Quadro 8


Quadro 9

(c) No Quadro 2015, a bolinha e o triângulo estão em posições idênticas às do Quadro 7. Para ver isto, basta dividir 2015 por 8, já que os quadros se repetem de 8 em 8. Fazendo essa divisão obtemos 2015 = 251 x 8 + 7. Logo, o Quadro 2015 é idêntico ao Quadro 7. De forma geral, são idênticos dois quadros cujos números deixam o mesmo resto na divisão por 8.


Quadro 2015

Solução do exercício 2. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2016 – N1 – questão 1)

(a) Carolina escreveu os números 132 e 231. Esses são os únicos números que cumprem as exigências do enunciado e que possuem o algarismo 3 na posição central.

(b) Para um número com 7 na casa central estar na lista de Carolina, há 6 possibilidades para a casa das centenas (qualquer um dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pode ser usado) e apenas 5 possibilidades para a casa das unidades, pois não podemos repetir algarismos. Podemos pensar também em preencher primeiramente a casa das unidades (6 possibilidades) e, a seguir, preencher a casa das centenas (nesse caso, 5 possibilidades). Logo, há 6 x 5 = 5 x 6 = 30 números da lista de Carolina que têm 7 na casa central.

(c) Observamos primeiramente que os algarismos 1 e 2 (e, claro, também o 0) não podem ser usados na casa das dezenas para que o número esteja na lista de Carolina. Assim, fazendo a contagem como nos itens (b) e (c), temos:

Se o algarismo do meio é 3, há 2 x 1 = 2 números na lista.
Se o algarismo do meio é 4, há 3 x 2 = 6 números na lista.
Se o algarismo do meio é 5, há 4 x 3 = 12 números na lista.
Se o algarismo do meio é 6, há 5 x 4 = 20 números na lista.
Se o algarismo do meio é 7, há 6 x 5 = 30 números na lista.
Se o algarismo do meio é 8, há 7 x 6 = 42 números na lista.
Se o algarismo do meio é 9, há 8 x 7 = 56 números na lista.

Logo, a lista de Carolina tem exatamente 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 168 números.

Solução do exercício 3. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2010 – N1 – questão 6)

(a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números do quadrado. Assim, a soma das somas das linhas é 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é 2x45=90. Logo a soma que está faltando é 90 – (9+13+14+17+18) = 90 – 71 = 19.

(b) Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

(c) Observe inicialmente que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado. Os seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7, 16, 22 e 13, 14, 18; podemos então supor que as somas das linhas são 7, 16, 22 e as somas das colunas são 13, 14, 18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é 1+2+3=7, podemos começar a preencher o quadrado como à direita. Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são 5+8+9=22 e 6+7+9=22, que vamos considerar separadamente.

1	2	4	7

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois 4+5=9 e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como 4+8=12 e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18. Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Solução do exercício 4. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 6)
Observamos que esta questão estava na lista de questões de “atividades para casa” do ciclo 2.

(a) Pedro deseja criar uma senha com 11 algarismos da forma 20152015ABC em que A, B e C representam qualquer um dos dez algarismos. Então existem 10 possibilidades para A, 10 possibilidades para B e 10 possibilidades para C. Pelo princípio multiplicativo, há 10×10×10=1000 senhas que começam com o bloco 20152015.

(b) Existem apenas dois tipos de senhas que contêm o bloco 0123456789. O primeiro tipo é **X**0123456789 e o segundo tipo é 0123456789**X** em que **X** é um dos dez algarismos. Existem 10 senhas do primeiro tipo e existem 10 senhas do segundo tipo. Portanto existem 10+10=20 senhas que contém o bloco 0123456789.

(c) Para formar uma das senhas desejadas neste item deve-se introduzir algum algarismo antes, depois ou no meio do bloco 0123456789. Para fazer esta contagem vamos dividir em dois casos.

1º caso. Senhas com números adjacentes diferentes. Aqui devemos considerar dois subcasos.

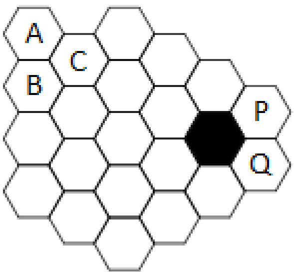
- Se o número a ser acrescentado está no início ou no final do bloco, temos duas possibilidades de posição e, para cada uma destas posições, temos 9 algarismos possíveis pois o algarismo que será acrescentado possui apenas um algarismo vizinho. Portanto, neste caso, obtemos 2x9=18 senhas.

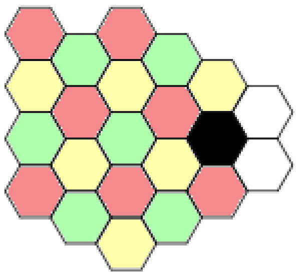
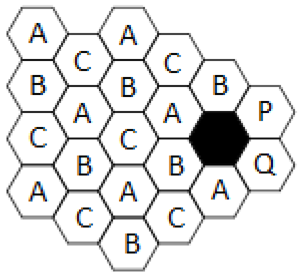
- Se o número a ser acrescentado está no meio do bloco, então existem 9 lugares possíveis para a colocação deste novo algarismo e, para cada um destes lugares o algarismo pode ser escolhido de 8 maneiras diferentes uma vez que ele tem dois algarismos vizinhos. Neste caso obtemos 9x8=72 senhas possíveis.

2º caso. Senhas com dois números adjacentes iguais. Neste caso, devemos escolher um dos dez algarismos e acrescentar ao lado do algarismo igual no bloco 0123456789. Como são dez algarismos, neste caso podemos formar 10 senhas.

Somando todas as possibilidades, obtemos um total de (18+72)+10=100 senhas.

Solução do exercício 5.
Vamos começar a colorir a figura pelos hexágonos indicados pelas letras A, B e C na figura abaixo a esquerda. O hexágono A pode ser colorido de 3 maneiras diferentes. Em seguida, sobram 2 cores para o hexágono B e sobra apenas uma única cor para o hexágono C. Agora observe que se os hexágonos A, B e C já estão coloridos, então, com exceção dos hexágonos P e Q, todos os demais podem ser coloridos de uma única cor, como está exemplificado na figura a seguir a direita.



Portanto, com exceção dos hexágonos P e Q a figura pode ser colorida de apenas 3x2x1=6 maneiras diferentes. Agora precisamos apenas determinar de quantas maneiras podemos seguir e colorir os hexágonos P e Q. Temos dois casos a considerar:

- Se P for colorido com a cor A, então Q pode ser colorido com as cores B e C. Logo, neste caso existem 2 possibilidades para colorirmos os hexágonos P e Q.
- Se P for colorido com a cor C, então Q só pode ser colorido com a cor B. Neste caso, existe apenas uma possibilidade para colorirmos os hexágonos P e Q.

Portanto, com exceção dos hexágonos P e Q, a figura pode ser coloria de 6 maneiras diferentes. Dada esta coloração, os hexágonos P e Q podem ser coloridos de 2+1=3 maneiras diferentes. Pelo princípio multiplicativo, a figura toda pode ser colorida de 6x3=18 maneiras diferentes.

Solução do exercício 6. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2013 – N1 – questão 3)
Quando dois tanques são equalizados, o volume total de água desses tanques é a soma dos volumes antes da equalização. Logo, ao final de uma equalização, o volume de água de cada um dos tanques é a média aritmética dos volumes iniciais. Em particular, quando dois tanques são equalizados, o tanque com mais água fica com menos e o com menos fica com mais. Isso mostra que o volume de água no tanque A será sempre maior ou igual ao de B, que por sua vez será sempre maior ou igual ao de C. Em particular, vemos que o volume de água de A sempre será maior ou igual ao volume de água dos outros tanques e que o volume de água em C nunca diminui.

(a) Ao abrir R1, os tanques A e B ficarão com $\frac{32+24}{2}=\frac{56}{2}=28$ metros cúbicos de água cada. Com a notação do enunciado, temos

$$(32,24,8)\xrightarrow{R1}(28,28,8)$$

(b) Observamos que há apenas duas sequências possíveis: a que começa com R1 e a que começa com R2. A segunda delas é a sequência procurada:

$$(32,24,8)\xrightarrow{R2}(32,16,16)\xrightarrow{R1}(24,24,16)\xrightarrow{R2}$$

$$(24,20,20)\xrightarrow{R1}(22,22,20)\xrightarrow{R2}(22,21,21)$$

(c) Sabemos que existem duas sequencias possíveis: a que começa com R1 e a que começa com R2. Vamos mostrar que nestas duas sequências em algum momento o volume do tanque C fica maior do que 21 metros cúbicos.

Começando com R2:

$$(32,24,8)\xrightarrow{R2}(32,16,16)\xrightarrow{R1}(24,24,16)\xrightarrow{R2}(24,20,20)\xrightarrow{R1}$$

$$(22,22,20)\xrightarrow{R2}(22,21,21)\xrightarrow{R1}(21.5\ ,\ 21.5\ ,\ 21)\xrightarrow{R2}(21.5,\ 21.25\ ,21.25)$$

Começando com R1:

$$(32,24,8)\xrightarrow{R1}(28,28,8)\xrightarrow{R2}(28,18,18)\xrightarrow{R1}(23,23,18)\xrightarrow{R2}$$

$$(23,\ 20.5\ ,\ 20.5)\xrightarrow{R1}(21.75\ ,\ 21.75\ ,\ 20.5)\xrightarrow{R2}(21.75\ ,\ 21.125\ ,\ 21.125)$$

As duas sequências anteriores nos mostram que em algum momento o volume do tanque C fica maior que 21 metros cúbicos. Agora, como o volume de água no tanque A é sempre maior ou igual que o do tanque C, e como o volume de C não diminui, então o volume em A sempre é maior que 21 metros cúbicos.

Solução alternativa do item (c). O raciocínio desta solução é indutivo. Vamos provar que se estamos em uma situação em que o volume do tanque A é maior do que 21 m^3 e um dos registros é aberto, então o volume deste tanque ainda continua sendo maior do que 21 m^3. Como na situação inicial o tanque A possui volume maior do que 21 m^3, repetindo este argumento a cada vez que um registro é aberto, concluímos que o volume do tanque A sempre será maior que 21 m^3.

Após um primeiro registro ser aberto, em qualquer momento, existem apenas duas situações para os volumes dos tanques: ou os volumes dos tanques A e B são iguais, ou os volumes dos tanques B e C são iguais. E a partir da abertura do primeiro registro, essas duas situações ficam se alternando, dependendo de qual registro é aberto:

1º caso: $$(a,a,b) \xrightarrow{R2} \left(a\,,\,\frac{a+b}{2}\,,\,\frac{a+b}{2}\right)$$

2º caso: $$(a,b,b) \xrightarrow{R1} \left(\frac{a+b}{2}\,,\,\frac{a+b}{2}\,,\,b\right)$$

Como conseguimos listar explicitamente o que ocorre na primeira abertura de um registro, vemos que após esta primeira abertura o volume do tanque A continua maior do que 21 m^3.

$$(32,24,8) \xrightarrow{R1} (28,28,8) \qquad \text{ou} \qquad (32,24,8) \xrightarrow{R2} (32,16,16)$$

Observe que após o primeiro registro ser aberto já chegamos em um dos dois casos listados acima, quando dois tanques possuem o mesmo volume, e o volume do tanque A é maior que 21 m^3. Vamos provar agora que se estamos nesta situação e um registro é aberto, voltamos para esta mesma situação: dois tanques com volumes iguais e o volume do tanque A maior que 21 m^3. Vamos demonstrar isso analisando dois casos, dependendo de qual registro é aberto.

- Suponhamos que estamos na situação do 1º caso, onde os volumes dos tanques são respectivamente (a,a,b) sendo $a > 21$. Se o registro R2 é aberto, obtemos respectivos volumes $\left(a\,,\,\frac{a+b}{2}\,,\,\frac{a+b}{2}\right)$ e o volume do tanque A não é alterado e continua maior do que 21 m^3, como queríamos demonstrar.

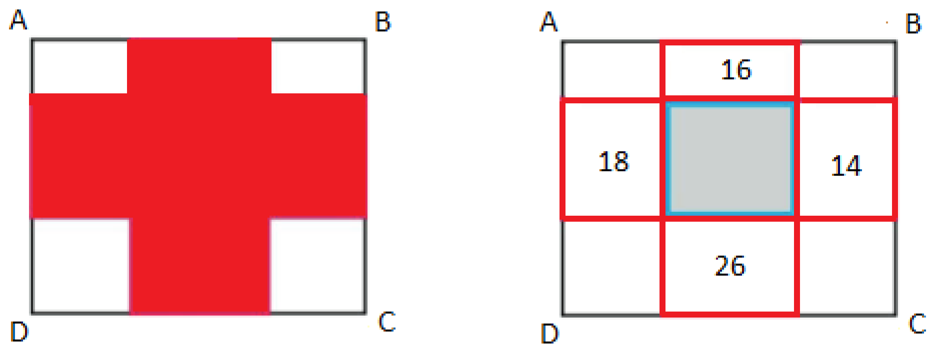
- Agora suponhamos que estamos na situação do 2º caso, com os tanques com respectivos volumes (a,b,b) sendo $a > 21$. Se o registro R1 é aberto, obtemos respectivos volumes $\left(\frac{a+b}{2}\,,\,\frac{a+b}{2}\,,\,b\right)$. Neste caso devemos demonstrar que $\frac{a+b}{2} > 21$. De fato, como o volume nos três tanques é 32+24+8 = 64 m^3, então $a+2b=64$. Daí $a=64-2b$ e $\frac{a+b}{2}=\frac{64-b}{2}$. De $a>21$ obtemos $64-2b>21$.

Dividindo por 2 obtemos $32 - b > 10,5$. Somando 32 obtemos $64 - b > 42,5$. Dividindo por 2 novamente obtemos $\frac{64-b}{2} > 21,25$. Como $\frac{a+b}{2} = \frac{64-b}{2}$, concluímos então que $\frac{a+b}{2} > 21,25 > 21$, como queríamos demonstrar.

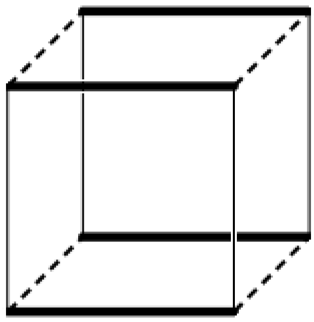
Então demonstramos que se em algum momento o volume do tanque A é maior do que 21 m^3 e um registro é aberto, então o volume do tanque A continua maior do que 21 m^3. De modo indutivo, este argumento implica que o volume do tanque A sempre será maior do que 21 m^3.

Observação. Analisando com um pouco mais de atenção, o argumento acima mostrar que o volume no tanque A sempre será maior do que 21,25 m^3.

Solução do exercício 7. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2016 – N1 – questão 19)
O perímetro do retângulo maior ABCD é igual ao perímetro da figura em forma de cruz formada pelos cinco retângulos (destacados em vermelho, na ilustração a seguir). O perímetro dessa figura é igual à soma das medidas de todos os lados dos quatro retângulos externos, menos as de cada um de seus lados que coincidem com os lados do retângulo cinza. A soma das medidas de todos os lados desses quatro retângulos externos é 16+18+26+14 = 74 e o perímetro da figura em forma de cruz é 54, pois ele é igual ao perímetro do retângulo ABCD. Logo, o perímetro do retângulo cinza é 74–54=20 cm.



Solução do exercício 8.
Prova da 1ª fase da OBMEP 2009 – N1 – questão 12
Cada vértice é a extremidade de três arestas e, portanto, são necessárias pelo menos três cores diferentes. Por outro lado, três cores diferentes bastam. Podemos ver isto na figura, onde três cores diferentes estão indicadas em traço cheio fino, traço cheio grosso e traço tracejado.

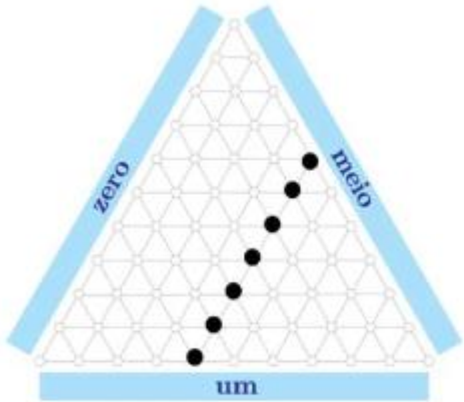


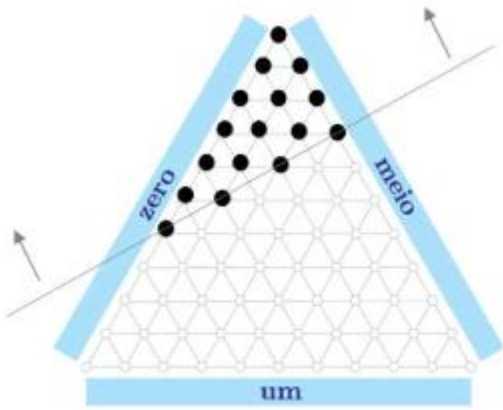
Solução do exercício 9. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2015 – N1 – questão 5)

(a) O aluno D obteve nota zero em 1 questão, nota meio em 5 questões e nota um em 4 questões. Sendo assim, a nota obtida pelo aluno D na prova foi $(1\times 0)+(5\times 0{,}5)+(4\times 1)=6{,}5$.

(b) Há sete possibilidades de um aluno tirar nota zero em 4 questões. Veja figura a seguir a esquerda.

(c) Há 16 possibilidades do aluno obter nota 7,0 ou maior do que 7,0. Veja a figura a seguir a direita.





Exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2009 – N1 – questão 1)

Observamos que esta questão estava na lista de questões de "atividades para casa" do ciclo 4.

(a) Há apenas três maneiras de escrever 1 como soma de três números naturais: 1=1+0+0, 1=0+1+0 e 1=0+0+1, que nos dão as possibilidades 1001, 0101 e 0011. Os números 0101 e 0011 devem ser descartados, pois não têm quatro algarismos significativos. Logo na coleção do Joãozinho aparece o número 1001.

(b) Primeiro notamos que se um número com algarismos não nulos está na coleção, então ele tem no máximo 10 algarismos. De fato, se ele tivesse 11 ou mais algarismos não nulos então a soma de todos seus algarismos, exceto o das unidades, seria no mínimo 10, o que não é possível pois o maior algarismo é o 9. Logo todos os números com algarismos não nulos na coleção têm no máximo 10 algarismos, o que mostra que existe um maior número sem o 0 na coleção.

Vamos supor que a coleção do Joãozinho está completa. O número 2316 está na coleção; trocando o 3 por 111 obtemos 211116, que também está na coleção e é maior que 2316, pois tem mais algarismos. Em geral, se um número sem o algarismo 0 está na coleção e tem algum algarismo que não o das unidades diferente de 1, podemos "espichar" o número, trocando esse algarismo por uma sequência de 1's e obtendo um novo número, que está na coleção e é maior que o primeiro.

Logo o maior número com algarismos não nulos na coleção deve ter todos seus algarismos iguais a 1, com exceção do algarismo das unidades, que é igual ao número de 1's que o precedem. Como o maior algarismo das unidades possível é 9, segue que o número procurado é

$$\underbrace{111111111}_{\text{nove 1's}}9$$

(c) Um número da coleção não pode ter seis algarismos distintos, pois nesse caso a soma dos cinco algarismos à esquerda do algarismo das unidades seria no mínimo 0+1+2+3+4=10. Por outro lado, a coleção pode ter números de cinco algarismos distintos como, por exemplo, 25108. Se um destes números tem o algarismo das unidades diferente de 9, podemos "aumentá-lo" adicionando 1 ao algarismo das unidades e 1 ao algarismo das dezenas de milhares (que, claramente, não pode ser 9), sem sair da coleção. Por exemplo, o número 43108 pode ser "aumentado" para 53109, que também está na coleção. Logo o maior número de cinco algarismos distintos na coleção deve ter 9 como algarismo das unidades. Basta agora escrever 9 como soma de quatro parcelas distintas em ordem decrescente para "montar" nosso número; segue imediatamente que a decomposição procurada é 9=6+2+1+0 e obtemos o número 62109.