Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N3 – CICLO 4 – ENCONTRO 1

Assuntos a serem abordados:

- Paridade, sistema decimal, divisão euclidiana, critérios de divisibilidade (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

- Seções 1.1 a 1.3, 2.1 a 2.4 e 2.6 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar. http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf
- Capítulos 3 e 13 do livro "Círculos de Matemática da OBMEP - Volume 1: Primeiros Passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra", B. Holanda, E. A. Chagas.

- Videoaulas do Portal da Matemática:

Paridade:
Tópicos Adicionais → Módulo "Sistemas de Numeração e Paridade" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=53) → videoaulas: "Problemas envolvendo paridade", "Problemas com dominós", "Dominós, pesagens e outros problemas".

Sistema Decimal:
Tópicos Adicionais → Módulo "Sistemas de Numeração e Paridade" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=53) → videoaulas: "Sistema de numeração decimal".

Divisão Euclidiana:

8º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=33) → videoaulas: "Teorema da Divisão Euclidiana".

Critérios de Divisibilidade:
6º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Divisibilidade" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=23) → videoaulas: "Critérios de Divisibilidade 1", "Critérios de Divisibilidade 2", "Critérios de Divisibilidade 3", "Critérios de Divisibilidade 4", "Exercícios sobre Divisibilidade 1", "Exercícios sobre Divisibilidade 2", "Exercícios sobre Divisibilidade 3", "Exercícios sobre Divisibilidade 4", "Exercícios sobre Divisibilidade 5".

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 4 – Encontro 1
ENUNCIADOS

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo desse encontro. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Exercício 1:
Coloque algarismos no lugar dos asteriscos de modo que o número $32*35717*$ seja divisível por 8 e por 9.

Exercício 2:
Foi cortado um buraco quadrado ao longo das retas impressas em um pedaço de papel quadriculado quadrado. O resto do papel quadriculado pode ter exatamente

a) nove quadrados?
b) dez quadrados?

Exercício 3:
Os números $1, 2, \ldots, 10$ estão escritos no quadro. Dois números quaisquer a e b podem ser apagados e substituídos pelo número a-b. Depois desse processo ser repetido diversas vezes, pode acontecer do único número restante no quadro ser zero?

Exercício 4:
Calcule o resto da divisão de 2^{10000} por 3.

Exercício 5 (Questão 2 – Lista 5 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2007):
Uma loja distribui 9999 cartões entre os seus clientes. Cada um dos cartões possui um número de 4 algarismos, entre 0001 e 9999 (está se admitindo, por exemplo, que os número 0001 ou 0023 ou 0234 têm 4 algarismos, ou seja, algarismos zero à esquerda são considerados). Se a soma dos primeiros 2 algarismos for igual à soma dos 2 últimos, o cartão é premiado. Por exemplo, o cartão 0743 é premiado. Prove que a soma dos números de todos os cartões premiados é divisível por 101.

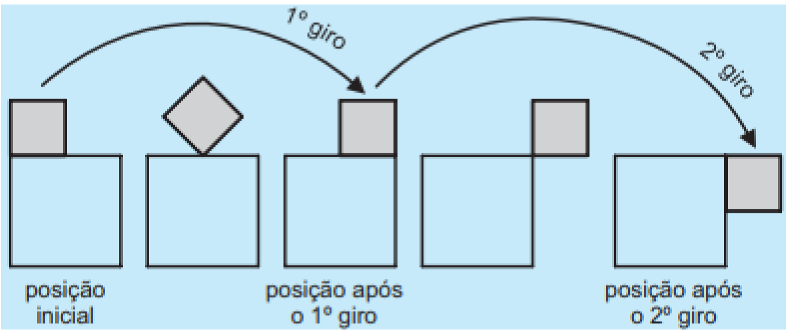
Exercício 6 (Questão 1 – Lista 2 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2008):
Quantos zeros existem no final do número $9^{2007}+1$?

Exercício 7 (Questão 20 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2006):
O número $abcde$ tem cinco algarismos distintos e diferentes de zero, cada um deles representado por uma das letras a, b, c, d, e. Multiplicando-se este número por 4, obtém-se número de cinco algarismos $edcba$. Qual é o valor de $a + b + c + d + e$?

Exercício 8 (Questão 15 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):
O *contrário* de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo não é soma de um número de dois algarismos com seu contrário?

A) 44
B) 99
C) 121
D) 165
E) 181

Exercício 9 (Questão 1 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2012):
Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura abaixo, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior. Como ficaria a figura que representa a posição dos dois quadrados após o 2012° giro?



Exercício 10 (Questão 8 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):
Marcos fez cinco provas de Matemática. Suas notas, em ordem crescente, foram 75, 80, 84, 86 e 95. Ao digitar as notas de Marcos na ordem em que as provas foram realizadas, o professor notou que as médias das duas primeiras provas, das três primeiras, das quatro primeiras e das cinco provas eram números inteiros. Qual foi a nota que Marcos tirou na última prova?

Exercício 11 (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):
Uma sequência de números é definida por $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + a_n^2$, para todo número natural $n \geq 1$. Por exemplo, $a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 3^2 = 12$. Qual é o algarismo das unidades de a_{2015}?

Exercício 12 (Questão 6 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2017):

Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

Solução do Exercício 1:

Pelo critério de divisibilidade por 8, o número $17*$ tem que ser divisível por 8. É fácil verificar que o único algarismo que funciona é o 6. De acordo, com o critério de divisibilidade por 9, a soma dos algarismos do número $32*357176$ tem que ser divisível por 9. Logo, o último algarismo que faltava é o 2. Assim, o número é 322357176.

Solução do Exercício 2:

Podemos definir nossa unidade de comprimento como sendo o comprimento do lados dos quadrados do papel quadriculado. Suponha que o lado do quadrado grande (o papel) seja x unidades e que o lado do buraco seja y unidades. Então, a figura que sobrou no papel consiste em $x^2 - y^2$ quadrados do papel quadriculado.

a) Precisamos resolver a equação $x^2 - y^2 = 9$ ou, equivalentemente, $(x+y)(x-y) = 9$. Como x e y são número naturais e $y < x$, temos $x + y = 9$ e $x - y = 1$. Portanto, $x = 5$ e $y = 4$. Assim, é possível ter 9 quadrados sobrando.

b) Precisamos resolver a equação $x^2 - y^2 = 10$ ou, equivalentemente, $(x+y)(x-y) = 10$. Os números $x + y$ e $x - y$ diferem de $2y$ e, logo, têm a mesma paridade. Eles não podem ser ambos ímpares, já que o produto de dois números ímpares é ímpar, e 10 é par. Mas, eles também não podem ser ambos pares, já que o produto de dois número pares é divisível por 4, e 10 não é. Logo, é impossível ter 10 quadrados sobrando.

Solução do Exercício 3:

Note que $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, que é um número ímpar. Ao apagarmos dois números a e b, e substituí-los por $a - b$, a soma de todos os números no quadro não muda de paridade, pois simplesmente, substituímos a e b, que contribuem com o valor $a + b$ para a soma total, por um número $a - b$, diminuindo a soma total por um número par, $2b$. Portanto, independentemente do número de vezes que repetirmos este processo, a soma dos números no quadro permanecerá ímpar, não podendo nunca terminar resultando em zero, ou qualquer outro número par.

Solução do Exercício 4:

Tem-se que o quociente e o resto da divisão de $2^2 = 4$ por 3 são ambos iguais a 1 e 1, respectivamente, ou seja, $2^2 = 1 \cdot 3 + 1$. Assim, $2^{10000} = 2^{2 \cdot 5000} = (2^2)^{5000} = (1 \cdot 3 + 1)^{5000} = 3t + 1^{5000} = 3t + 1$, para algum t inteiro. Logo, o resto da divisão de 2^{10000} por 3 é igual a 1.

Solução do Exercício 5:

Observe que se o cartão $abcd$ é premiado então o cartão $cdab$ também é premiado. Por exemplo, 2341 e 4123 são ambos premiados. Assim, sempre que $ab \neq cd$, temos dois cartões premiados cuja soma é $abcd + cdab = (ab \times 100 + cd) + (cd \times 100 + ab) = 101(ab + cd)$. Assim, a soma desses dois cartões é divisível por 101. No caso em que o cartão é da forma $abab = ab \times 100 + ab = 101 \times ab$, o número do cartão é divisível por 101. Portanto, a soma de todos os cartões é divisível por 101, já que a soma pode ser feita agrupando cartões do tipo $abcd$ com cartões do tipo $cdab$, e a soma de números divisíveis por 101 também é divisível por 101.

Solução do Exercício 6:

A tabela abaixo mostra como aparecem em ordem, dezena e unidade, os dois últimos algarismos de algumas potências de 9. Observe que esses dois últimos algarismos de 9^0 e 9^{10} são os mesmos. Logo, a partir 9^{10}, a segunda coluna da tabela começará a se repetir, formando uma sequência periódica, de período 10. Como o quociente e o resto da divisão de 2007 por 10 são 200 e 7, respectivamente, ou seja, $2007 = 10 \times 200 + 7$ e os dois últimos algarismos de $9^{10\times 200}$ são 01, então os dois últimos algarismos de 9^{2007} são os dois últimos algarismos de 9^7, ou seja, 69. Portanto, os dois últimos algarismos de $9^{2007} + 1$ são iguais a $69 + 1 = 70$. Assim, existe um único zero no final do número $9^{2007} + 1$.

n	dois últimos algarismos de 9^n
0	01
1	09
2	81
3	29
4	61
5	49
6	41
7	69
8	21
9	89
10	01

Solução do Exercício 7:

A multiplicação pode ser esquematizada como

$$
\begin{array}{r}
a\ b\ c\ d\ e \\
\times\quad\quad\ \ 4 \\
\hline
e\ d\ c\ b\ a
\end{array}
$$

A solução é baseada nas seguintes observações:

i. <u>a só pode ser 1 ou 2</u> porque se $a \geq 3$, então $4a$ é um número de 2 algarismos e, portanto, o número $edcba$ teria 6 algarismos. Mas. a não pode ser 1, pois $edcba$, sendo múltiplo de 4, é par, donde seu último algarismo é par. Logo, $a = 2$.

$$
\begin{array}{r}
2\ b\ c\ d\ e \\
\times\quad\quad\ \ 4 \\
\hline
e\ d\ c\ b\ 2
\end{array}
$$

ii. <u>e só pode ser 8 ou 9</u> porque $2 \times 4 = 8$ e $edcba$ tem apenas 5 algarismos. No entanto, e não pode ser 9 porque $9 \times 4 = 36$ termina em 6, e não em 2. Logo, $e = 8$.

$$
\begin{array}{r}
2\ b\ c\ d\ 8 \\
\times\quad\quad\ \ 4 \\
\hline
8\ d\ c\ b\ 2
\end{array}
$$

iii. <u>b só pode ser 1 ou 2</u> porque $4 \times b$ tem que ser um número de apenas 1 algarismo. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $b = 1$.

$$
\begin{array}{r}
2\ 1\ c\ d\ 8 \\
\times\quad\quad\ \ 4 \\
\hline
8\ d\ c\ 1\ 2
\end{array}
$$

iv. <u>d só pode ser 2 ou 7</u> porque $4d + 3$ é um número terminado em 1. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $d = 7$.

$$
\begin{array}{r}
2\ 1\ c\ 7\ 8 \\
\times\quad\quad\ \ 4 \\
\hline
8\ 7\ c\ 1\ 2
\end{array}
$$

v. <u>c só pode ser 9</u> porque $4c + 3$ é um número terminado em c.

$$
\begin{array}{r}
2\ 1\ 9\ 7\ 8 \\
\times\quad\quad\ \ 4 \\
\hline
8\ 7\ 9\ 1\ 2
\end{array}
$$

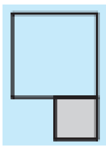
Logo, a resposta é $8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 27$.

Solução do Exercício 8:

(Alternativa E) Seja n um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo das dezenas e b o das unidades; então $n = 10a + b$. Se a e b são ambos diferentes de zero, o contrário de n é $10b + a$. Desse modo, a soma de n e seu contrário é $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ e, portanto, a soma de um número com seu contrário é sempre múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções apresentam múltiplos de 11, com a exceção de 181. As outras opções são todas somas de um número com seu contrário; de fato, $44 = 13 + 31$, $99 = 18 + 81$, $121 = 29 + 92$ e $165 = 69 + 96$. Como foram achadas essas expressões? Tomemos, como exemplo, $165 = 11 \times 15$. O raciocínio inicial mostra que se escolhermos algarismos não nulos a e b de modo que sua soma seja 15, então 165 será a soma do número $10a + b$ e de seu contrário. Por exemplo, podemos tomar $a = 6$ e $b = 9$; para essa escolha obtemos a expressão $165 = 87 + 78$. Outras escolhas são possíveis; por exemplo, $a = 8$ e $b = 7$ leva a $165 = 87 + 78$. O mesmo raciocínio serve para as outras alternativas.

Solução do Exercício 9:

Basta verificar que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial. Como, pela divisão euclidiana $2012 = 8 \times 251 + 4$, após o $2012°$ giro o quadrado cinza terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à seguinte figura.



Solução do Exercício 10:

A tabela abaixo mostra os restos da divisão das notas por 3 e por 4.

	75	80	84	86	95
resto da divisão por 3	0	2	0	2	2
resto da divisão por 4	3	0	0	2	3

Como a média das três primeiras notas é um número inteiro, vemos que a soma das três primeiras notas é um múltiplo de 3. A consulta à tabela mostra que a única maneira de somar três restos na primeira linha de modo a obter um múltiplo de 3 corresponde às notas 80, 86 e 95. Logo, essas foram (não necessariamente nessa ordem) as três primeiras notas. De modo análogo, o fato de que a soma das quatro primeiras notas é um múltiplo de 4 mostra que essas notas devem ser 75, 86, 95 e uma entre 80 ou 84, que correspondem à única maneira possível de somar quatro números da segunda linha e obter um múltiplo de 4. Mas, já sabemos que 80 é uma das três primeiras notas. Logo, as quatro primeiras notas foram 75, 80, 86 e 95, e a última nota foi 84.

Solução do Exercício 11:

Para simplificar nossa escrita, vamos escrever u_n para representar o algarismo das unidades do número a_n. Assim, precisamos determinar u_{2015}. Observemos os três primeiros termos da sequência: $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + 3^2 = 3 + 9 = 12$ e $a_3 = 12 + 12^2 = 12 + 144 = 156$. Agora, é claro que $u_2 = 2$ e $u_3 = 6$. Por outro lado, poderíamos determinar u_3 sem calcular o valor de a_3 . De fato, a_3 é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são 2 e 4, respectivamente. Logo, $u_3 = 2 + 4 = 6$. Aplicando essa mesma ideia para $a_4 = 156 + 156^2$, vemos que u_4 é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são, ambos, iguais a 6. Portanto, $u_4 = 2$. Novamente aplicando este raciocínio, concluímos que $u_5 = 6$, pois é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são iguais a 2 e 4, respectivamente. Assim, aplicando este argumento sucessivamente, a partir do segundo número da sequência, concluímos que os algarismos das unidades dos números da sequência, determinam uma nova sequência que é formada, alternadamente, apenas pelos números 2 e 6. Mais precisamente, $u_n = 2$, sempre que o índice n for par, e $u_n = 6$, sempre que o índice n for ímpar. Consequentemente, $u_{2015} = 6$.

Solução do Exercício 12:

Seja n o número natural do enunciado. Como $n + 1$ é múltiplo de 11, existe um número natural t tal que $n + 1 = 11t$. Do mesmo modo, existe um número natural s tal que $n - 1 = 8s$. Multiplicando membro a membro essas expressões, temos $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1 = 88ts$, ou seja, $n^2 = 88ts + 1$. Essa última expressão mostra que o resto da divisão de n^2 por 88 é igual a 1.

Assuntos a serem abordados:

- Máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc), Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

- Seções 3.1, 3.2, 3.5, 4.1 e 4.2 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar. http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf
- Capítulos 11, 16 e 18 do livro "Círculos de Matemática da OBMEP - Volume 1: Primeiros Passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra", B. Holanda, E. A. Chagas.
- Capítulo 3, seção 4: "O algoritmo de Euclides" do livro "Círculos Matemáticos – A Experiência Russa", D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg.

- Videoaulas do Portal da Matemática:

Máximo Divisor Comum (mdc), Mínimo Múltiplo Comum (mmc) e Algoritmo de Euclides para o Cálculo do mdc:
6º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Divisibilidade" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=23) → videoaulas: "Máximo Divisor Comum", "Propriedades de MDC", "Exercícios de MDC", "Mínimo Múltiplo Comum", "Propriedades de MMC", "Exercícios de MMC".

Tópicos Adicionais → Módulo "Números Naturais – Representação, Operações e Divisibilidade" (http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=52) → videoaulas: "Múltiplos, divisibilidade e MMC", "Divisores e MDC – Algoritmo de Euclides".

Exercício 1:
Use o algoritmo de Euclides para calcular $mdc(372,162)$, e use-o para escrever $mdc(372,162) = 372x + 162y$, para algum inteiro x e algum inteiro y.
(*Obs.*: o procedimento usado para expressar $mdc(372,162)$ como $mdc(372,162) = 372x + 162y$ pode ser realizado de maneira análoga para quaisquer dois inteiros não ambos nulos a e b de forma que, dados inteiros a e b não ambos nulo, existem inteiros x e y tais que $mdc(a, b) = ax + by$. Esta igualdade é conhecida como *Relação de Bézout*).

Exercício 2:
Sejam a, b e c número inteiros tais que a divide bc e $mdc(a, b) = 1$. Prove que a divide c.
(*Dica*: Use a relação de Bézout).

Exercício 3 (Questão 15 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $N/3$, $N/4$, $N/5$, $N/6$ e $N/7$ sejam todos números inteiros?

Exercício 4 (Problema SJ3.9 – Círculo Matemático de Moscou):
Considere todos os inteiros com nove algarismos distintos (em base decimal), todos diferentes de 0. Encontre o mdc de todos eles.

Exercício 5 (Problema 53 – Capítulo 3 – Seçaõ 4 – Círculos Matemáticos – A Experiência Russa):
Encontre o mdc dos números $2n + 13$ e $n + 7$.

Exercício 6 (Problema 54 – Capítulo 3 – Seçaõ 4 – Círculos Matemáticos – A Experiência Russa):
Prove que a fração $\frac{12n+1}{30n+2}$ é irredutível para qualquer inteiro n.

Exercício 7:
Encontre todos os pares ordenados (a, b), com a e b inteiros positivos, tais que $mdc(a, b) = 15$ e $mmc(a, b) = 150$.

Exercício 8 (Problema 16.2 – Círculos de Matemática da OBMEP – Modificada):
Em 2018 foi realizada a edição 40 da OBM, e $mdc(2018,40) = 2$. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc do ano e da edição da OBM realizada no ano?

Exercício 9 (Problema 16.4 – Círculos de Matemática da OBMEP):
O mmc de 12, 15, 20 e k é 420. Qual é o menor valor inteiro positivo de k?

Exercício 10 (Problema 16.5 – Círculos de Matemática da OBMEP):
Senhor Namm assou 252 biscoitos, senhora Clancy assou 105 biscoitos e senhor Palavas assou 168 biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?

Exercício 11 (Problema 16.7 – Círculos de Matemática da OBMEP):
Carlinhos escreve números inteiros positivos diferentes e menores do que 1000 em várias bolas e coloca-as numa caixa, de modo que Mariazinha possa pegar ao acaso duas dessas bolas. Quantas bolas no máximo Carlinhos irá colocar na caixa se os números das duas bolas deverão ter um divisor comum maior do que 1?

Exercício 12 (Problema 16.9 – Círculos de Matemática da OBMEP):
Qual é o maior valor possível do mdc de dois números distintos pertencentes ao conjunto $1,2,3,\ldots,2011$?

Solução do Exercício 1:

Aplicando o algoritmo da divisão euclidiana, obtemos

$$372 = 162 \times 2 + 48$$
$$162 = 48 \times 3 + 18$$
$$48 = 18 \times 2 + 12$$
$$18 = 12 \times 1 + 6$$
$$12 = 6 \times 2 + 0$$

Aplicando o Lema de Euclides à primeira equação acima, obtemos

$$mdc(372{,}162) = mdc(162{,}372 - 162 \times 2) = mdc(162{,}48).$$

Aplicando novamente o Lema de Euclides utilizando as outras igualdades acima:

$$mdc(162{,}48) = mdc(48{,}18) = mdc(18{,}12) = mc(12{,}6) = mdc(6{,}0) = 6.$$

O processo acima é chamado de algoritmo de Euclides para encontrar o mdc. Podemos utilizar as igualdades iniciais para encontrar os valores de x e y.

$$18 - 12 \times 1 = 6.$$

Como $12 = 48 - 18 \times 2$, temos $6 = 18 - (48 - 18 \times 2) \times 1 = 18 \times 3 - 48$. Utilizando agora a outra igualdade $18 = 162 - 48 \times 3$, obtemos $6 = (162 - 48 \times 3) \times 3 - 48 = 162 \times 3 - 48 \times 10$. Finalmente, de $48 = 372 - 162 \times 2$, obtemos

$$6 = 162 \times 3 - (372 - 162 \times 2) \times 10 = 162 \times 23 - 372 \times 10.$$

Logo, $x = -10$ e $y = 23$ é uma solução da equação dada.

Observe que aplicando este processo a qualquer par de números inteiros, obtemos a bem conhecida relação de bezout: Dados os inteiros a e b, existe um par de inteiros (x, y) tal que $ax + by = mdc(a, b)$.

Solução do Exercício 2:

Como $mdc(a, b) = 1$, pela relação de Bezout existem inteiros x, y tais que $ax + by = 1$. Multiplicando a relação por c obtemos $acx + bcy = c$. Como a divide acx e bcy, conclui-se que a divide c.

Solução do Exercício 3:

Para que $N/3$, $N/4$, $N/5$, $N/6$ e $N/7$ sejam todos números inteiros, N deve ser múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor inteiro positivo N possível, ele dever ser o mínimo múltiplo comum (MMC) de 3, 4, 5, 6 e 7, ou seja, $N = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$.

Solução do Exercício 4:

Entre esses números encontramos os números 987654321 e 987654312, que diferem por 9, de modo que o mdc divide 9. Por outro lado, a soma dos algarismos de todos esses números, $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$, é múltiplo de 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, todos esses números são múltiplos de 9. Logo a resposta é 9.

Solução do Exercício 5:

Pelo algoritmo de Euclides, obtemos

$$\begin{aligned} mdc(2n+13, n+7) &= mdc\big(n+7, 2n+13-(n+7)\big) = mdc(n+7, n+6) \\ &= mdc\big(n+6, n+7-(n+6)\big) = mdc(n+6,1) = 1. \end{aligned}$$

Solução do Exercício 6:

Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$\begin{aligned} mdc(12n+1, 30n+2) &= mdc\big(12n+1, 30n+2-2(12n+1)\big) \\ &= mdc(12n+1, 6n) = mdc\big(6n, 12n+1-2(6n)\big) = mdc(6n,1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Em outras palavras $12n+1$ e $30n+2$ não possuem fator comum, isto é, $\frac{12n+1}{30n+2}$ é irredutível.

Solução do Exercício 7:

Como $mdc(a,b) = 15$, existem inteiros positivos x e y tais que $a = 15x$ e $b = 15y$ tais que $mdc(x,y) = 1$. Assim,

$$150 = mmc(a,b) = mmc(15x, 15y) = 15 \cdot mmc(x,y) = 15xy.$$

Daí $xy = 10$. Os valores possíveis do par (x,y) são $(1,10)$, $(2,5)$, $(5,2)$ e $(10,1)$. Em todos esses casos temos $mdc(x,y) = 1$. Assim, todos os pares ordenados procurados são

$$(15,150), (30,75), (75,30), (150,15).$$

Solução do Exercício 8:

Note que se estivermos na edição de número x da OBM, estaremos no ano $1978 + x$. Assim, estamos interessados no maior valor possível de $mdc(x, 1978 + x)$, mas veja que isso é o mesmo que calcular o $mdc(x, 1978 + x - x) = mdc(x, 1978)$. O maior valor possível para esse mdc é 1978, que pode ser atingido tomando $x = 1978$.

Solução do Exercício 9:

Veja que $12 = 2^2 \times 3$, $15 = 3 \times 5$, $20 = 2^2 \times 5$ e $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$. Como $mmc(12,15,20,k) = 420$ e a fatoração de 420 é feita com as maiores potências de primos dos números 12, 15, 20 e k, temos que os fatores 2, 3 e 5 já estão com as potências certas, falta apenas 7, portanto $k = 7$.

Solução do Exercício 10:

O número que queremos deve ser um divisor simultâneo dos três números de biscoitos, como queremos o maior número de biscoitos, estamos procurando o $mdc(252,105,168)$. Temos $mdc(252,105) = mdc(105,252 - 2 \times 105) = mdc(105,42) = mdc(42,105 - 2 \times 42) = mdc(42,21) = 21$. Como $168 = 21 \times 8$, temos $mdc(252,105,168) = 21$.

Solução do Exercício 11:

São 499. Não podemos colocar o número 1 em nenhuma bola, pois o mdc entre 1 e qualquer outro número é 1, assim temos 998 números disponíveis. Além disso, se forem usadas 500 bolas ou mais, haverá duas com números consecutivos, sempre primos entre si, então não podemos colocar mais que 499 bolas. Mas existe uma forma de colocar 499 bolas, usando os números pares de 2 a 998.

Solução do Exercício 12:

O mdc de dois números é divisor de cada um dos dois números, ou seja, cada um dos números é múltiplo do seu mdc. Logo, queremos o maior valor de d que tem dois múltiplos positivos menores ou iguais a 2011. O maior dos dois múltiplos de d é maior ou igual a $2d$, logo $2d \leq 2011 \Leftrightarrow d \leq 1005$. Como 1005 e $2 \times 1005 = 2010$ são ambos menores do que 2011, o valor procurado é 1005.

--- FIM ---