Roteiro de Estudos **OBMEP NA ESCOLA – 2018** **N1 – CICLO 4**

Neste ciclo, continuando o estudo que foi iniciado no Ciclo 1, vamos voltar a estudar aritmética. Os principais conteúdos que serão desenvolvidos neste quarto ciclo são:

Encontro 1	Encontro 2
• Notação posicional • O algoritmo da divisão Euclidiana • Fenômenos periódicos • Padrões geométricos e aritméticos	• Múltiplos e divisores • Critérios de divisibilidade • Números primos e fatoração • mmc e mdc

- Textos:

Apostila do PIC "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar. http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf

- Notação posicional (seção 1.2)
- O algoritmo da divisão Euclidiana (seção 2.1)
- Fenômenos periódicos (seção 2.2)

Círculos de Matemática da OBMEP – Volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e Álgebra – Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas

- Percebendo padrões (capítulo 4)
- Múltiplos divisores e primos (capítulo 11)
- Dígitos e sistema decimal (capítulo 13)

Exercício 1. Retire 10 dígitos do número 12345123451234512345 de modo que o número remanescente seja o maior possível. E para formar o menor número, como deveríamos proceder?

Exercício 2. Determine o menor número com 10 algarismos tal que a soma dos seus algarismos é igual a 40.

Exercício 3. A figura a seguir indica a multiplicação do número de três algarismos A2A pelo número de um algarismo A. O resultado é o número de três algarismos B6B. Determine os algarismos A e B.

$$\begin{array}{ccc} A & 2 & A \\ & \text{x} & A \\ \hline B & 6 & B \end{array}$$

Exercício 4. O número 1089 tem uma propriedade interessante. Quando efetuamos a multipicação deste número por 9, obtemos o número 9801 que é o número 1089 com os seus algarismos escritos na ordem inversa.

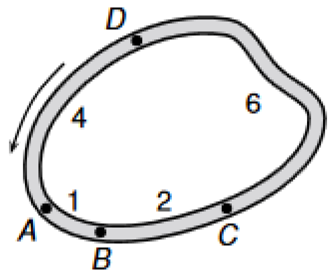
$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 8 & 9 \\ & & \times & 9 \\ \hline 9 & 8 & 0 & 1 \end{array}$$

Encontre um número de cinco algarismos ABCDE que tem esta mesma propriedade. Ou seja, o resultado da multiplicação desse número por 9 é igual ao número de cinco algarismo EDCBA, que tem os algarismos do número ABCDE escritos na ordem inversa.

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ & & & \times & 9 \\ \hline E & D & C & B & A \end{array}$$

Exercício 5. Se o resto da divisão de um número n por 8 é igual a 5, então qual é o resto da divisão deste mesmo número n por 4?

Exercício 6. (2ª fase da OBMEP 2006 – Nível 1 – Questão 6) A figura ao lado representa o traçado de uma pista de corrida. Os pontos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.



(a) Quais são os pontos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são eses postos?
(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Exercício 7. Considere a seguinte sequência de números:

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...

formada alternadamente pelos números 1, 2, 3, 4, 5 em ordem crescente e pelos números 5, 4, 3, 2, 1 escritos em ordem decrescente. Qual é o algarismo que aparece na posição 2015 desta sequência?

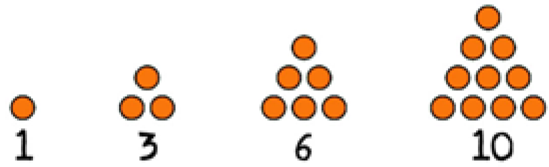
Exercício 8. Qual é algarismo da unidade da representação decimal do número 2^{2015}?

Exercício 9. João decidiu nadar de três em três dias. O primeiro dia que ele nadou foi um sábado, o segundo dia foi uma terça-feira, o terceiro dia foi uma sexta-feira, e assim por diante. Em qual dia da semana João estará nadando pela centésima vez?

Exercício 10. (OBMEP 2013 – 1ª FASE – N1Q12) Qual é o algarismo das dezenas da soma

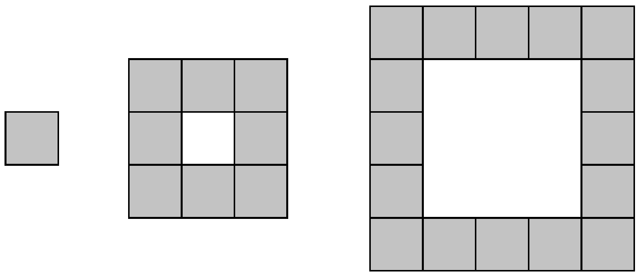
$$\underbrace{7}_{\substack{\text{um}\\\text{sete}}} + \underbrace{77}_{\substack{\text{dois}\\\text{setes}}} + \underbrace{777}_{\substack{\text{três}\\\text{setes}}} + \cdots + \underbrace{777\ldots77}_{\substack{\text{setenta e seis}\\\text{setes}}} + \underbrace{777\ldots777}_{\substack{\text{setenta e sete}\\\text{setes}}}$$

Exercício 11. [números triangulares] Observe a sequência de figuras.

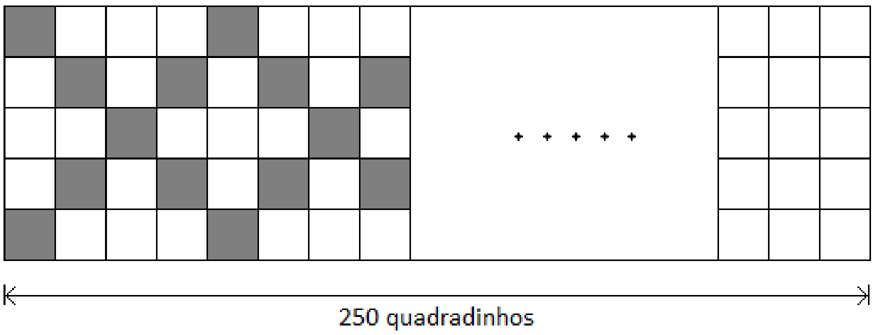


A primeira figura possui 1 bolinha. A segunda figura possui 1+2=3 bolinhas. A terceira figura possui 1+2+3=6 bolinhas e a quarta figura possui 1+2+3+4=10 bolinhas. Continuando desse modo, calcule o número de bolinhas das figuras 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Qual é o número de bolinhas da centésima figura, ou seja, calcule o valor da soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

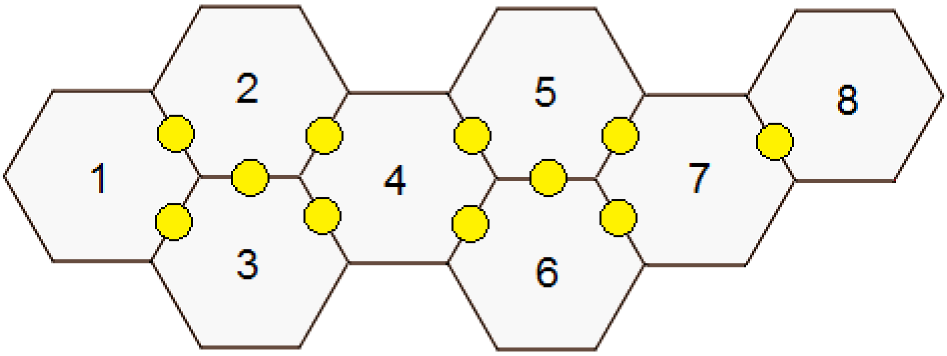
Exercício 12. (XXVIII – 28ª OBM – 2006 – 1ª fase – N1Q13) Usando pastilhas de cerâmica preta na forma de quadradinhos foi composta uma decoração numa parede, mostrada parcialmente abaixo. Quantas pastilhas foram empregadas em toda a decoração considerando-se que na última peça montada foram utilizadas 40 pastilhas pretas?



Exercício 13. (Banco de Questões 2006 – pg 17) Uma faixa quadriculada tem 5 quadradinhos na altura e 250 quadradinhos no comprimento. Alguns quadradinhos serão pintados de cinza, começando da esquerda, conforme o modelo ilustrado na figura, e continuando com este padrão até chegar ao final da faixa à direita. Nesta faixa, quantos quadradinhos não serão pintados?



Exercício 14. (OBMEP 2014 – 1ª fase – N1Q18) Gustavo fez uma tira com 300 hexágonos, fixando-os pelos lados comuns com um adesivo redondo, como na figura. Quantos adesivos ele usou?



Solução do exercício 1.
Veja o exercício 16 da página 11 da apostila Encontros de Aritmética.
O maior número é 5534512345 e o menor número é 1112312345. Veja a solução deste problema no vídeo 2 da parte de aritmética do canal PICOBMEP no YouTube. Além disso, observamos que os vídeos de 1 a 5 deste canal contêm explicações interessantes sobre o sistema decimal de numeração e sobre as quatro operações. Recomendamos que todos os alunos assistam a esses vídeos.

Solução do exercício 2.
Este é o exercício 17 da página 12 da apostila Encontros de Aritmética.
Para o número ser o menor possível, devemos colocar o menor algarismo mais a esquerda do número. Assim vamos colocar o algarismo 1 à esquerda do número. Logo à direita desse algarismo 1, vamos colocar a maior quantidade possível de algarismos zero. Mas como a soma dos algarismos deve ser 40, devemos ter algarismos não nulos mais a direita do número que será formado. Quanto mais noves forem colocados à direita do número, mais destes algarismos zero poderão ser utilizados. Dividindo 40 por 9 obtemos $40 = 4 \times 9 + 4$. Portanto podemos colocar 4 algarismos 9 mais a direita do número. Como a soma dos dez algarismos deve ser 40, o número procurado é 1000039999. (Veja a solução de um problema bastante similar a este no vídeo 3 da parte de aritmética do canal PICOBMEP no YouTube)

Solução do exercício 3.
Este é o problema 13.1, página 116, do livro Círculos de Matemática da OBMEP.
Como o resultado da multiplicação é um número de três algarismos, então o algarismo A só pode ser 1, 2 ou 3. Logo não "vai 1" quando multiplicamos A pelo algarismo A da casa da unidade do número A2A. Assim A vezes A é igual a B e A vezes 2 é igual a 6. Daí obtemos que A=3 e B=9.

Solução do exercício 4.
Este é o exercício 4, nível 2, página 34, do Banco de Questões de 2014.

(a) Vamos começar olhando o algarismo mais a esquerda do número ABCDE. Observe que o algarismo A não pode ser maior do que 1 pois se A≥2 então na multiplicação de 9 por A obteríamos um número com dois algarismos. Daí, na multiplicação de 9 por A, teríamos o "vai um" e o resultado da multiplicação seria um número com seis algarismos. Assim a única possibilidade é A=1.

(b) Agora vamos olhar para o lado direito do número ABCDE. Como 9xE deve ser um número que termina em A=1, a única possibilidade é E=9. Por enquanto, vemos que a multiplicação desejada tem a seguinte forma.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 8 & \\ 1 & B & C & D & 9 \\ & & & \times & 9 \\ \hline 9 & D & C & B & 1 \end{array}$$

(c) Agora vamos calcular B. Primeiramente observe que B não pode ser maior do que ou igual a 2 pois se este fosse o caso, na multiplicação de 9 por B teríamos o "vai um" para cima do A=1. Daí multiplicando o 9 pela A=1, teríamos que somar com este algarismo e o resultado não seria E=9. Portanto concluímos que B=0 ou que B=1. O caso B=1 não é possível pois se este fosse o caso, teríamos D=9 e a multiplicação teria a seguinte forma que não é uma conta válida para nenhum valor de C.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 8 & \\ 1 & 1 & C & 9 & 9 \\ & & & \times & 9 \\ \hline 9 & 9 & C & 1 & 1 \end{array}$$

Portanto somente podemos ter B=0, e a multiplicação toma a seguinte forma.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 8 & \\ 1 & 0 & C & D & 9 \\ & & & \times & 9 \\ \hline 9 & D & C & 0 & 1 \end{array}$$

(d) Agora vamos calcular D. Na multiplicação de 9 por D, devemos somar 8 para obter um número que termina com o algarismo B=0. A única possibilidade é D=8 pois 9x8+8=80. Daí chegamos na seguinte multiplicação.

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 8 & \\ 1 & 0 & C & 8 & 9 \\ & & & \times & 9 \\ \hline 9 & 8 & C & 0 & 1 \end{array}$$

(e) Falta somente determinar C. Testando todas as possibilidades, a única que faz a conta fechar é C=9. Neste caso, obtemos a multiplicação.

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 8 & 8 & \\ 1 & 0 & 9 & 8 & 9 \\ & & & \times & 9 \\ \hline 9 & 8 & 9 & 0 & 1 \end{array}$$

Portanto concluímos que ABCDE = 10989.

Solução do exercício 5. Sabemos que o resultado da divisão de n por 8 tem resto 5. Isto significa que se temos n bolinhas, então podemos organizar estas bolinhas em alguns grupos com 8 bolinhas cada e sobram 5 bolinhas que não podem formar um novo grupo com 8 bolinhas. Agora cada um dos grupos com 8 bolinhas pode ser dividido em dois grupos com 4 bolinhas e as 5 bolinhas que sobraram podem ser divididas em um novo grupo com 4 bolinhas e sobra apenas uma bolinha que não pode formar nenhum novo grupo com 4 bolinhas. Daí o resto da divisão de n por 4 é 1.

Solução do exercício 6. (Prova da OBMEP 2006 – Nível 1 – 2ª fase – Questão 6)
Este também é o exercício 4 da página 29 da apostila Encontros de Aritmética.

(a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão de 1km+2km+6km+4km = 13km. Por isto, para percorrer 14km é preciso dar uma volta completa e percorrer mais 1km. A única forma de percorrer 1km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

(b) Como 100 = 7x13 + 9, uma corrida de 100km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e a percorrer mais 9km. A única forma de percorrer 9km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

(c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de dar uma certa quantidade de voltas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a distância restante. Do ponto de vista matemático, este procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13. Por uma inspeção direta, pode-se verificar que é possível executar qualquer corrida com comprimento igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12km. Se a corrida tem comprimento um múltiplo qualquer de 13km, podemos começar num ponto, dar um certo número de voltas, e voltar para o mesmo ponto de partida. E se a corrida tem um comprimento maior que 13, efetuamos a divisão deste número por 13. O quociente corresponde ao número de voltas e o resto é um pedaço de uma volta de comprimento de 1km até 12km, que sempre pode ser percorrido, como comentamos anteriormente. Por exemplo, se a extensão da corrida é 109 = 8x13 + 5, ela deve começar no posto D, dar 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorre o trecho de D a B, que tem 5km.

Solução do exercício 7.
Este é o exercício 7 da página 32 da apostila Encontros de Aritmética.
Na sequência dada é importante observar que o seguinte bloco de algarismos

1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2

fica se repetindo infinitamente, como está ilustrado na figura a seguir.

$\boxed{1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2}\ \boxed{1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2}\ \boxed{1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2}\ \circ\circ\circ$

Dividindo 2015 por 8 (que é a quantidade de algarismos no bloco que fica se repetindo), obtemos $2015 = 251 \times 8 + 7$. Daí, para chegar até o algarismo da posição 2015, devemos escrever 251 blocos de oito algarismos cada, e depois mais sete algarismos. Portanto o número que está na posição 2015 é o número da sétima posição dentro do bloco, ou seja, é o número 3.

Solução do exercício 8.
Este é o exercício 8 da página 33 da apostila Encontros de Aritmética.
Calculando as primeiras potências de 2 obtemos

$$\begin{array}{llll} 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16 \\ 2^5 = 32 & 2^6 = 64 & 2^7 = 128 & 2^8 = 256 \end{array}$$

Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, etc, em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente. Dividindo 2015 por 4 obtemos quociente 503 e resto 3, de modo que $2015 = 503 \times 4 + 3$. Na sequência acima, os expoentes que deixam resto 3 quando divididos por 4 definem potências de 2 com último algarismo 8 ($2^3 = 8$, $2^7 = 128$, etc). Daí o algarismo da unidade de 2^{2015} é 8.

Solução do exercício 9.
Este é o exercício 9 da página 33 da apostila Encontros de Aritmética.
Na tabela a seguir ilustramos os dias da semana em que João está nadando nas primeiras 21 vezes.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
6	4	2	7	5	3	1
13	11	9	14	12	10	8
20	18	16	21	19	17	15

Analisando a tabela vemos, por exemplo, que os múltiplos de 7 sempre estão na quarta-feira, que os números que deixam resto 1 quando divididos por 7 estão no sábado e que os números que deixam resto 2 quando divididos por 7 estão na terça-feira. Dividindo 100 por 7 obtemos quociente 14 e resto 2. Daí concluímos que na centésima vez, João estará nadando em uma terça-feira.

Solução do Exercício 10. Aproveite este exercício para relembrar o algoritmo da soma de números naturais: escrevemos um número embaixo do outro, unidade em baixo de unidade, dezena embaixo de dezena, centena embaixo de centena, etc. Primeiro somamos todos os algarismos da casa da unidade. Deixamos o último algarismo desta soma embaixo e mandamos o restante para cima. E daí, repetimos o procedimento para os algarismos da casa das dezenas, das centenas, etc.

(Primeira solução) Vamos efetuar a soma dada procedendo como no algoritmo descrito acima. Ao somar os algarismos das unidades encontramos 7x77=539. Logo, deixamos o 9 como o algarismo da unidade da soma, e enviamos o 53 que deve ser adicionado à casa das dezenas. Ao somar os algarismos das dezenas entramos 7x76=532 que somado ao 53 resulta 585. Deixamos o 5 como o algarismo da dezena da soma, e enviamos o 58 que deve ser adicionado à casa das centenas. Portanto, concluímos que os dois últimos algarismos da soma são 59 e, assim, o algarismo da dezena da soma é o número 5.

(Segunda solução) Alternativamente, podemos observar que os algarismos da dezena e da unidade da soma só dependem da soma dos algarismos da unidade e da dezena das parcelas. Ou seja, na soma dada, em cada parcela podemos desconsiderar os algarismos que estão à esquerda do algarismo da dezena e podemos apenas considerar a soma $7 + 77 + 77 + \cdots + 77 = 7 + 76 \times 77 = 5859$. Daí vemos que a soma dada tem como os dois últimos algarismos o número 59 e, assim, o algarismo da dezena da soma é o número 5.

Solução do Exercício 11. Para as figuras de 5 a 10 encontramos as seguintes quantidades de bolinhas:

Figura 5:	1+2+3+4+5=15
Figura 6:	1+2+3+4+5+6=21
Figura 7:	1+2+3+4+5+6+7=28
Figura 8:	1+2+3+4+5+6+7+8=36
Figura 9:	1+2+3+4+5+6+7+8+9=45
Figura 10:	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55

Agora queremos generalizar e calcular a soma $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$.

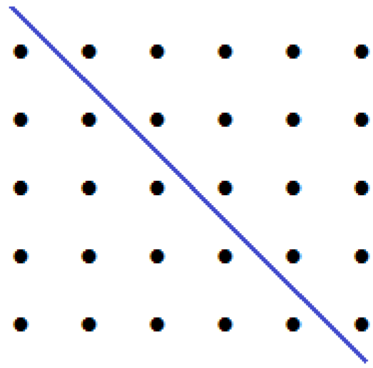
(Primeira solução) Para calcular esta soma, escrevemos suas parcelas de trás para frente assim: $S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$. Agora somamos $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$ com $S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$ somando cada parcela da primeira soma com a correspondente parcela da segunda soma, obtendo

$$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1)$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101$$

Como temos 100 parcelas iguais a 101, o resultado da soma anterior é igual a $2S = 100 \times 101$. Daí $S = \frac{100\times101}{2} = 5050$.

(Segunda solução) Vamos ilustrar esta segunda solução de maneira geométrica, calculando, para exemplificar, a soma dos 5 primeiros números naturais 1+2+3+4+5. Para fazer isso, montamos um retângulo com 5x6=30 bolinhas e dividimos esse retângulo por uma linha, como ilustrado a seguir.



Observe que do lado de baixo desta linha e do lado de cima desta linha temos exatamente a mesma quantidade de bolinhas 1+2+3+4+5. Portanto, em cada metade, esta quantidade de bolinhas é igual à metade do total de bolinhas do retângulo. Daí

$$1+2+3+4+5=\frac{5\times 6}{2}=15$$

Para calcular a soma $1+2+\cdots+100$ podemos proceder do mesmo modo, fazendo um retângulo com 100×101 bolinhas e dividindo este retângulo por uma linha de modo que do lado de baixo e do lado de cima da linha as quantidades de bolinhas são igual à soma desejada $1+2+\cdots+100$. Portanto o valor desta soma é igual à metade do número total de bolinhas do retângulo com 100x101 bolinhas. Daí

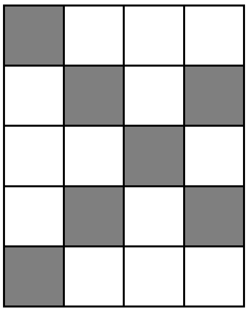
$$1+2+\cdots+100=\frac{100\times 101}{2}=5050$$

Solução do Exercício 12. Na última peça da decoração foram utilizadas 40 pastilhas pretas. Esta peça é um quadrado. Vamos calcular a quantidade de pastilhas pretas em cada lado deste quadrado. Retirando os quatro cantos, ficamos com 40-4=36 pastilhas pretas. Dividindo por 4 lados, obtemos 36÷4=9 pastilhas pretas dentro de cada lado do quadrado. Retornando com as pastilhas dos cantos, a última peça da decoração é um quadrado de lado 9+2=11.

De modo alternativo, esta quantidade 11 pode ser encontrada através de um cálculo algébrico. Seja *n* o número de pastilhas pretas em cada lado de uma peça. Então, são necessárias $4\cdot(n-2)+4=4n-8+4=4n-4$ pastilhas pretas para formar a peça inteira. Na última peça da decoração temos $4n-4=40$. Resolvendo esta equação obtemos $n=11$.

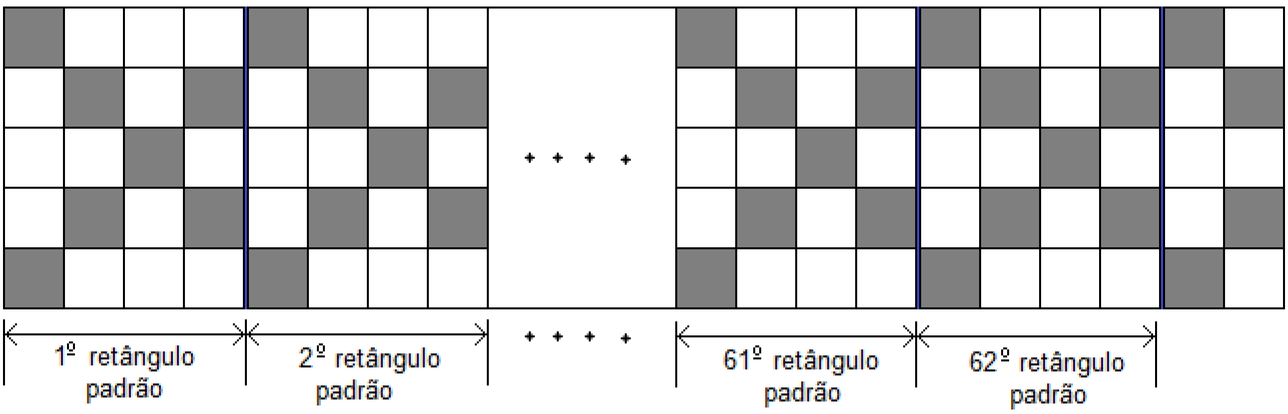
Agora note que para contar a quantidade total de pastilhas pretas utilizada para formar toda a decoração, basta observar que cada peça da esquerda se encaixa na peça da direita. Se encaixarmos todas, teremos um quadrado completamente preto de lado igual a 11 quadradinhos. Portanto, o número de pastilhas pretas utilizada foi $11^2 = 121$.

Solução do Exercício 13. Observe que a figura dada no enunciado tem alguma espécie de simetria, algo que se repete de tempos em tempos. Neste tipo de questão, quando percebemos uma repetição, algo periódico, precisamos encontrar esse padrão que fica se repetindo infinitamente. Observe que, neste exercício, para pintar toda a faixa, basta copiar lado-a-lado o retângulo padrão de 5 linhas e 4 colunas mostrado na figura ao lado.



Neste retângulo padrão temos 7 quadradinhos pintados e 13 quadradinhos não pintados. Precisamos saber quantos retângulos padrão cabem na faixa. A faixa tem 250 colunas e cada retângulo padrão tem 4 colunas. Da divisão de 250 por 4 temos que $250 = 4 \times 62 + 2$, e concluímos que na faixa cabem 62 retângulos padrão, sobrando ainda duas colunas.

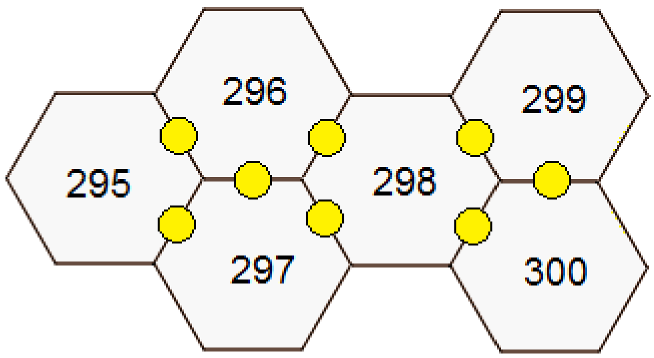
Nos 62 retângulos padrão temos $62 \times 13 = 806$ quadradinhos não pintados. Falta agora verificar quais os quadradinhos não pintados nas duas colunas finais da faixa. Ora, essas duas colunas finas são as duas primeiras colunas do retângulo padrão. Portanto, nessas colunas temos 6 quadradinhos não pintados. Finalmente, o número de quadradinhos não pintados em toda a faixa é $806 + 6 = 812$.



Solução do Exercício 14. (Primeira solução) Para fixar o trio de hexágonos 1-2-3, Gustavo usou três adesivos. O mesmo ocorreu para fixar os demais noventa e nove trios de hexágonos: 4-5-6, 7-8-9, 10-11-12, ..., 298-299-300. Como são 100 trios e 3 adesivos para cada trio, Gustavo usou $100 \times 3 = 300$ adesivos nessa montagem de trios.

Agora, para fixar um trio no outro, Gustavo usou dois adesivos. Como o primeiro trio não precisou ser fixado a ninguém, Gustavo usou então $99 \times 2 = 198$ adesivos para juntar um trio no outro. No total, ele usou $300 + 198 = 498$ adesivos.

(Segunda solução) Para fixar os quatro primeiros hexágonos 1-2-3-4, Gustavo usou cinco adesivos. Na sequência, para fixar os adesivos 4-5-6-7, Gustavo também usou cinco adesivos. Isso segue até o final da figura montada pelo Gustavo, com exceção da última sequência em que são usados 2 cartões a menos. Como temos 300 cartões, temos 100 desses conjuntos de quatro cartões, lembrando que no último desses conjuntos são usados apensas 3 cartões. Daí concluímos que foram usados $100 \times 5 - 2 = 498$ adesivos (ou $99 \times 5 + 3 = 498$).



Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N1 – CICLO 4 – Encontro 2

Este segundo encontro do ciclo 4 é uma continuação natural do primeiro encontro. Vamos continuar estudando a apostila do PIC "encontros de aritmética" de L. Cadar e F. Dutenhefner, mas neste segundo encontro serão realizados estudos sobre as seguintes seções desta apostila.

- Múltiplos e divisores (seção 2.4)
- Números primos e fatoração (seção 2.5)
- Critérios de divisibilidade (seção 2.6)
- mmc e mdc (seções de 3.1 a 3.5)

Além desta apostila também indicamos as videoaulas do Módulo de divisibilidade da 6ª série do Portal da Matemática.

Para aprofundar ainda mais os estudos, indicamos os seguintes materiais teóricos do Portal da Matemática:

- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: múltiplos e divisores – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/k2sgczml2e8k4.pdf

- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: critérios de divisibilidade – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfuewdw2kdcg4.pdf

- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: mdc e mmc – material teórico, parte I: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8ex39lt2qn8kw.pdf

- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: mdc e mmc – material teórico, parte II: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/543nomntcq4o0.pdf

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N1 – ciclo 4 – Encontro 2
ENUNCIADOS

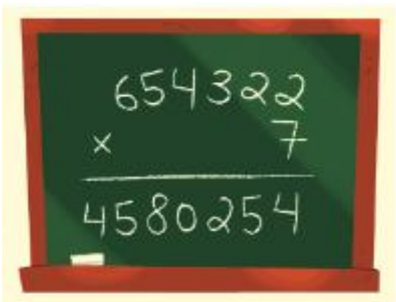
Exercício 1.
Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma para ela?

Exercício 2.
Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?

Exercício 3. (Prova da 1ª fase OBMEP 2015 – Nível 1 – Questão 14)
Observe as engrenagens da figura. Quantas voltas a engrenagem com 12 dentes deve dar ara que a engrenagem com 9 dentes dê 200 voltas?

Exercício 4. (Prova da 1ª fase OBMEP 2015 – Nível 1 – Questão 2) O número $4\,580\,254$ é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7 ?

(a) $4\,580\,249$
(b) $4\,580\,248$
(c) $4\,580\,247$
(d) $4\,580\,246$
(e) $4\,580\,245$



Exercício 5. Mariana subtraiu do maior múltiplo de 41 com quatro algarismos o menor múltiplo de 41 também com quatro algarismos. Qual é o resultado desta subtração?

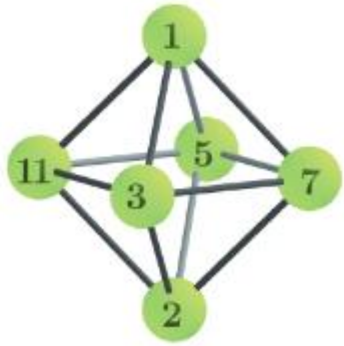
Exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 13) O produto de um número de dois algarismos pelo número formado pelos mesmos dois algarismos, escritos em ordem inversa, é 2944. Qual é a soma dos dois números multiplicados?

Exercício 7. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – N1 – questão 17) Um feirante tem cinco cestas que contêm limões e laranjas. A quantidade total de frutas em cada cesta está indicada pelo número correspondente. Ele apontou para uma das cestas e disse: "Se eu vender esta cesta, o número de limões passará a ser o dobro do número de laranjas". Quantas frutas tem a cesta para a qual ele apontou?

Exercício 8. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2011 – N1 – questão 18) Um salão de festas comporta 700 pessoas, entre convidados e garçons. Um garçom atende no máximo 10 convidados e todo convidado deve ser atendido por um garçom. Qual é o número máximo de pessoas que podem ser convidadas para uma festa nesse salão?

Exercício 9. Qual é o resto da divisão do resultado da soma $59\,372\,934 + 47\,807\,183$ por 4 ?

Exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2017 – N1 – questão 6)
Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1, 2, 3, 5, 7 e 11, como na figura. Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio



$$3 \to 1 \to 3 \to 2 \to 3 \to 11 \to 1$$

ela obtém $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 11 \times 1 = 594$.

(a) Descreva um passeio no qual a formiguinha obtém, ao final, o número 45.
(b) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 ao final de um passeio.
(c) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 40 ao final de um passeio.
(d) Quantos passeios diferentes a formiguinha pode fazer para obter, ao final, o número 30?

Exercício 11. Dois rolos de arame, um de 210 metros e o outro de 330 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. De que modo isto pode ser feito se desejamos obter a menor quantidade possível de pedaços?

Exercício 12. Uma lâmpada pisca de 14 em 14 segundos e outra lâmpada pisca de 20 em 20 segundos. Um cronômetro zerado foi ligado exatamente quando estas lâmpadas piscaram juntas. Se o cronômetro foi desligado na primeira vez que as lâmpadas piscaram juntas novamente, que tempo ele marcou?

Exercício 13. No conjunto dos números inteiros de 1 até 2017, quantos são os números:

(a) que são múltiplos de 18 e de 24 ao mesmo tempo?

(b) que são múltiplos de 18 ou que são múltiplos de 24?

Exercício 14. Qual é a menor quantidade possível de placas quadradas que são necessárias para cobrir uma superfície retangular com 105 centímetros de largura por 165 centímetros de comprimento?

Solução do exercício 1.
Este é o Problema 11.3, página 92, do livro Círculos de Matemática da OBMEP.
Dividindo 237 por 31 obtemos quociente 7 e resto 20, ou seja, se a professora conseguir uma quantidade tal que, somada com 20 dê 31, então ela consegue entregar mais uma bala para cada aluno. Portanto, a professora precisa de 11 balas a mais.

Solução do exercício 2.
Este é o Problema 11.8, página 94, do livro Círculos de Matemática da OBMEP.
Dividir certa quantidade por 15 e obter resto 7, significa agrupar em alguns grupos de 15 elementos e em um único grupo de 7 elementos. Daí, para dividir esta mesma quantidade por 3, podemos dividir cada grupo de 15 elementos em cinco grupos de 3 elementos e podemos dividir o grupo de 7 elementos em dois grupos de 3 elementos, sobrando um elemento sozinho. Portanto vemos que a divisão desta quantidade por 3 deixa resto 1.

De modo análogo, como os grupos de 15 elementos podem ser divididos em três grupos de 5 elementos cada, basta dividir o grupo de 7 elementos em um grupo de 5 elementos, sobrando 2 elementos que não formam um novo grupo de 5 elementos. Portanto o resto da divisão desta quantidade por 5 é igual a 2. A soma dos restos dessas duas divisões é 1+2=3.

Solução do exercício 3. (Prova da 1ª fase OBMEP 2015 – Nível 1 – Questão 14)
http://www.obmep.org.br/provas_static/sf1n1-2015.pdf
A engrenagem do meio é apenas uma transmissora do movimento, servindo para que as engrenagens externas girem solidárias e na mesma direção. Cada dente girado da engrenagem com 12 dentes provoca o movimento de exatamente um dente da engrenagem do meio. Ela realiza a conexão entre as engrenagens externas. Se a engrenagem com 9 dentes deu 200 voltas, foram girados 9 x 200 = 1800 dentes. Para que a engrenagem com 12 dentes tenha girado o mesmo número de dentes foram necessárias 1800 ÷ 12 = 150 voltas.

Solução do exercício 4. (Prova da 1ª fase OBMEP 2015 – Nível 1 – Questão 2)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2015.pdf
Se somamos ou se subtraímos 7 de um múltiplo de 7 continuamos com um múltiplo de 7. Como $4\,580\,247 = 4\,580\,254 - 7$, concluímos que $4\,580\,247$ é um múltiplo de 7. Este fato também pode ser verificado diretamente, efetuando-se a divisão e notando-se que o resto obtido é zero.

Solução do exercício 5. O menor número com quatro algarismos é 1000 e o maior número com 4 algarismos é 9999. Dividindo 1000 e 9999 por 41 obtemos, respectivamente, 1000=24×41+16 e 9999=243×41+36. Portanto 1000 deixa resto 16 quando dividido por 41. Para obter o primeiro múltiplo de 41 maior do que 1000 devemos, então, somar 41-16=25. Portanto 1025 é o menor múltiplo de 41 com quatro algarismos. Por outro lado, 9999 deixa resto 36 quando dividido por 41. Daí para achar o maior múltiplo de 41 que é menor do que 9999 devemos subtrair 36. Portanto, 9999-36=9963 é o maior múltiplo de 41 com quatro algarismos. A diferença encontrada por Mariana foi de 9963-1025=8938.

Solução do exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 13)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2014.pdf
Este exercício pode ser utilizado para iniciar o estudo de como é possível contar e listar todos os divisores de um número natural. Veja os exemplos 35 e 36 das páginas 53-54 da apostila Encontros de Aritmética.

Fatorando obtemos $2944 = 2^7 \cdot 23$. Daí segue que 2944 possui $(7+1)\times(1+1) = 16$ divisores e que o conjunto de divisores de 2944 é {1, 2, 4, 8, 16, 23, 32, 46, 64, 92, 128, 184, 368, 736, 1472, 2944}. Mais ainda, também vemos que 2944 pode ser escrito como um produto de dois números naturais do seguinte modo: $2944 = 1 \cdot 2944$, $2944 = 2 \cdot 1472$, $2944 = 4 \cdot 736$, $2944 = 8 \cdot 368$, $2944 = 16 \cdot 184$, $2944 = 23 \cdot 128$, $2944 = 32 \cdot 92$ e $2944 = 46 \cdot 64$. Como este último produto satisfaz as condições do enunciado, e também como é o único nas condições descritas, temos que a soma procurada é 64 + 46 = 110.

Solução do exercício 7. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – N1 – questão 17)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2012.pdf
Quando for vendida a cesta apontada pelo feirante, o número de limões passará a ser o dobro do de laranjas, ou seja, o número total de frutas nas quatro cestas restantes passará a ser o triplo do número de laranjas. Portanto, o número total de frutas passará a ser múltiplo de 3. Vamos agora analisar todas as possibilidades de venda de uma cesta.

Cesta vendida com 23 frutas. Sobram 8 + 11 + 13 + 18 = 50 frutas.
Cesta vendida com 18 frutas. Sobram 8 + 11 + 13 + 23 = 55 frutas.
Cesta vendida com 13 frutas. Sobram 8 + 11 + 18 + 23 = 60 frutas.
Cesta vendida com 11 frutas. Sobram 8 + 13 + 18 + 23 = 62 frutas.
Cesta vendida com 8 frutas. Sobram 11 + 13 + 18 + 23 = 65 frutas.

A única maneira possível de somar o número de frutas de quatro cestas para obter um múltiplo de 3 está representada pela expressão 8 + 11 + 18 + 23 = 60. Logo o feirante apontou a cesta com 13 frutas.

Solução do Exercício 8. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2011 – N1 – questão 18) http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2011.pdf

Para cada grupo de 10 convidados é necessário um garçom. Obtemos então 11 pessoas no salão para cada grupo de 10 convidados. Dividindo 700 por 11 obtemos $700 = 63 \times 11 + 7$. Vemos então que podemos colocar no salão 63 grupo de 11 pessoas (10 convidados e 1 garçom) e ainda sobram 7 lugares no salão. Isto significa que podemos colocar no salão $630 = 63 \times 10$ convidados e $63 = 63 \times 1$ garçons e ainda sobrarão 7 lugares no salão. Para ter a capacidade máxima do salão utilizada, estes 7 lugares podem ser ocupados por 6 convidados sendo atendidos por 1 garçom extra. Portanto, podemos ocupar os 700 lugares do salão com $630 + 6 = 636$ convidados e com $63 + 1 = 64$ garçons.

Solução do exercício 9. Para resolver o exercício é claro que podemos efetuar a soma e em seguida efetuar a divisão por 4. Caso um aluno tenha resolvido o exercício deste modo, ótimo, ele realizou um procedimento adequado para obter a resposta correta do exercício. Entretanto, aqui, queremos aproveitar este exercício para explorar o critério de divisibilidade por 4. Deste modo a solução apresentada nestas notas pode ser comparada em termos de tempo de resolução, quantidade de contas e maior potencialidade para se cometer erros de contas com uma outra solução possivelmente obtida pelos alunos.

Critério de divisibilidade por 4 (veja exemplo 39, página 57 da apostila Encontros de Aritmética). Para um número natural ser divisível por 4 basta que o número formado pelos seus dois últimos algarismos seja divisível por 4. Mas ainda o resto da divisão de um número por 4 é igual ao resto da divisão por 4 do número formado pelos seus dois últimos algarismos.

Assim para determinar o resto da divisão de $59\,372\,934$ por 4, basta dividir 34 por 4. Este resto é igual a 2. Para o número $47\,807\,183$, basta dividir 83 por 4. Neste caso obtemos resto 3. Somando os restos, obtemos 2+3=5=4+1. Portanto, o resto da divisão da soma dada por 4 é igual a 1.

Solução do Exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2007 – N1 – questão 6) http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n1-2017.pdf

(a) Como $45 = 3 \times 3 \times 5$ a formiguinha deve visitar duas vezes a bolinha 3 e ela deve visitar uma única vez a bolinha 5. Existem várias possibilidades de tais passeios. Eis algumas possibilidades:

$$3 \to 1 \to 3 \to 1 \to 5$$
$$5 \to 1 \to 3 \to 1 \to 3$$
$$1 \to 3 \to 1 \to 5 \to 1 \to 3$$
$$1 \to 3 \to 1 \to 5 \to 1 \to 3 \to 1$$

(b) A fatoração do número 52 em produto de números primos é $52 = 2 \times 2 \times 13$. A formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 em um passeio pois, no objeto só aparecem números primos e o número 13 não é um dos números do objeto.

(c) A fatoração do número 40 em produtos de números primos é $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Assim, para obter o número 40 em um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5. Como não há vareta ligando as bolinhas 1 e 2, para passar três vezes pela bolinha 2 a formiguinha é obrigada a passar pelo menos três vezes pela vareta que liga as bolinhas 2 e 5 e, ao fazer isso, ela passa pelo menos duas vezes pela bolinha 5. Assim, é impossível para a formiguinha fazer um passeio passando somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5.

(d) A fatoração do número 30 em produto de números primos é $30 = 2 \times 3 \times 5$. Para obter o número 30 no final de um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2, 3 e 5, passando uma única vez pelas bolinhas 2, 3 e 5. A formiguinha não pode passar mais de duas vezes pela bolinha 1, pois, se isso acontecesse, ela passaria mais de uma vez pelas bolinhas 3 ou 5. Assim, temos as seguintes situações:

- obter 30 sem passar pela bolinha 1
- obter 30 passando somente uma vez pela bolinha 1;
- obter 30 passando duas vezes pela bolinha 1;

Na primeira situação, a formiguinha tem duas possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 3 ou 5) e, em cada uma delas, uma única direção a seguir. Temos, então $2 \times 1 = 2$ possibilidades. São as seguintes

- $3 \to 2 \to 5$
- $5 \to 2 \to 3$

Na segunda situação, a formiguinha tem quatro possibilidades ara iniciar seu passeio (bolinhas, 1, 2, 3 ou 5) e, em cada uma delas, duas direções a seguir. Então temos $4 \times 2 = 8$ possibilidades. São elas:

- $1 \to 3 \to 2 \to 5$
- $1 \to 5 \to 2 \to 3$
- $2 \to 3 \to 1 \to 5$
- $2 \to 5 \to 1 \to 3$
- $3 \to 1 \to 5 \to 2$
- $3 \to 2 \to 5 \to 1$
- $5 \to 1 \to 3 \to 2$
- $5 \to 2 \to 3 \to 1$

Na terceira situação, a formiguinha tem três possibilidades: iniciar e terminar na bolinha 1, iniciar na bolinha 1 e terminar na bolinha 2, ou iniciar na bolinha 2 e terminar na bolinha 1; em cada uma delas, ela tem duas direções a seguir. Temos então $3 \times 2 = 6$ possibilidades. São as seguintes:

- $1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 1$
- $1 \to 5 \to 2 \to 3 \to 1$
- $1 \to 3 \to 1 \to 5 \to 2$
- $1 \to 5 \to 1 \to 3 \to 2$
- $2 \to 3 \to 1 \to 5 \to 1$
- $2 \to 5 \to 1 \to 3 \to 1$

No total temos $2 + 8 + 6 = 16$ passeios diferentes em que a formiguinha obtém, ao final o número 30.

Observação. Os exercícios de 11 a 14 exploram os conceitos de mmc e de mdc.

Solução do exercício 11.
Caso os alunos apresentem dificuldades na resolução deste exercício, sugerimos que ele seja explorado como ele está resolvido na página 64, exercício 1, da apostila Encontros de Aritmética.

Seja d o comprimento, em metros, de cada um dos pedaços que será obtido com os cortes dos rolos de arame. Se o arame de 210 metros será dividido em m pedaços e se o arame de 330 metros será divido em n pedaços, vemos que $m \times d = 210$ e que $n \times d = 330$. Daí segue que d é um divisor de 210 e que d é um divisor de 330. Para obter a menor quantidade possível de pedaços, cada pedaço deve ser do maior comprimento possível e, assim, $d = mdc(210,330) = 30$. Portanto um rolo está dividido em $m = \frac{210}{30} = 7$ pedaços e o outro rolo está dividido em $n = \frac{330}{30} = 11$ pedaços. A menor quantidade de pedaços que pode ser obtido com os cortes dos rolos de arame em pedaços de mesmo comprimento é, então, $7 + 11 = 18$.

Solução do exercício 12.
Este é o exercício 4 da página 69 da apostila Encontros de Aritmética.

Como uma das lâmpadas pisca de 14 em 14 segundos, ela vai piscar nos instantes 0, 14, 28, 42, ... ou seja, em todos os números que são múltiplos de 14. De modo análogo, a lâmpada que pisca de 20 em 20 segundos pisca em todos os instantes que são múltiplos de 20. Deste modo, as lâmpadas vão piscar juntas em todos os instantes que são múltiplos comuns de 14 e de 20. Como queremos determinar o primeiro instante em que elas vão piscar juntas, identificamos este instante como o mínimo múltiplo comum de 14 e de 20. Como $mmc(14, 20) = 140$, concluímos que as lâmpadas vão piscar juntas após 140 segundos de o cronômetro ser ligado. Convertendo em minutos e segundos, 140 segundos corresponde a 2 minutos e 20 segundos. É este o tempo que estará registrado no cronômetro.

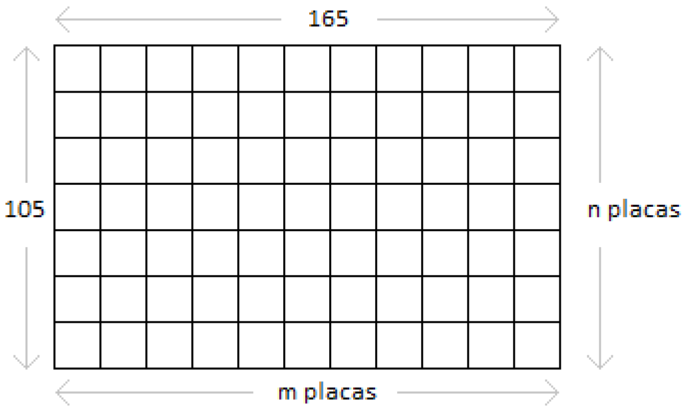
Solução do exercício 13.
Veja o exercício 22 da página 84 da apostila Encontros de Aritmética.

(a) Para um número ser múltiplo de 18 e de 24, ele deve ser um múltiplo do $mmc(18, 24) = 72$. Dividindo 2017 por 72 obtemos $2017 = 28 \times 72 + 1$. Portanto os múltiplos de 72 menores do que 2017 são: 1×72, 2×72, 3×72, ..., 28×72. Assim existem 28 números que são múltiplos de 18 e de 24 entre 1 e 2017.

(b) Dividindo 2017 por 18 e por 24 obtemos $2017 = 112 \times 18 + 1$ e $2017 = 84 \times 24 + 1$. Como no item (a), isto implica que existem 112 múltiplos de 18 e que existem 84 múltiplos de 24 entre 1 e 2017. No total, na união, 112+84=196 alguns números foram contados duas vezes, a saber, os números que são múltiplos de 18 e de 24 ao mesmo tempo. A quantidade desses números foi calculada no item (a). Portanto devemos subtrair da soma 112+84=196 a quantidade 28 de números que foram contados duas vezes. Portanto concluímos que existem 112+84-28=168 números entre 1 e 2017 que são múltiplos de 18 ou que são múltiplos de 24.

Solução do exercício 14. (Veja o exercício 3 da página 66 e exercício 25 da página 86 da apostila Encontros de Aritmética)

Suponhamos que o terreno 165×105 seja coberto por $m \times n$ placas quadradas com d centímetros de lado cada uma. Desse modo $m \times d = 165$ e $n \times d = 105$. Isto implica que d é um divisor comum de 165 e de 105.



Para cobrir a superfície retangular com a menor quantidade possível de placas é necessário considerar a maior placa possível. Daí devemos considerar o maior valor possível do comprimento d e, assim, concluímos que d é o máximo divisor comum de 165 e de 105. Daí $d = mdc(165,105) = 15$. Cada placa quadrada tem então 15 centímetros de lado, existem $m = \frac{165}{15} = 11$ placas no sentido da largura e existem $\frac{105}{15} = 7$ placas no sentido do comprimento da superfície. O número total de placas utilizado é igual a $m \times n = 11 \times 7 = 77$ placas.

– FIM –