Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N3 – CICLO 5 – ENCONTRO 1

Assuntos a serem abordados:

- Números primos e fatoração em primos; cálculo do mdc e mmc usando fatoração em primos (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

- Seções 2.5, 3.3, 3.4 e 4.3 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", L. Cadar, F. Dutenhefner.
  http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

Números primos e fatoração em primos; cálculo do mdc e mmc usando fatoração em primos:
Tópicos Adicionais → Módulo "Números Naturais – Representação, Operações e Divisibilidade"
(https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=52) → videoaula: "Números primos – Teorema Fundamental da Aritmética".

Exercício 1:
Dado o par de primos p e $8p^2 + 1$, encontre p.
(*Dica*: Analise os possíveis restos da divisão euclidiana de p por 3).

Exercício 2:
Joana comprou 130 salgadinhos de presunto e 540 quibes para levar a uma festa. Na lanchonete, um dos funcionários decidiu embalar os salgadinhos sem misturá-los. Cada embalagem tinha a mesma quantidade de salgadinhos e, para economizar, o funcionário usou a menor quantidade de embalagens.

a) Quantos salgadinhos havia em cada embalagem?
b) Com quantas embalagens Joana chegou à festa?

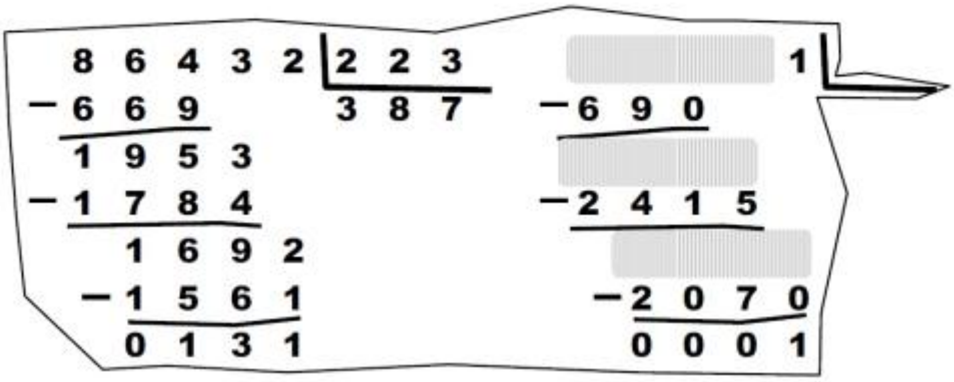
Exercício 3:
Em 1982 ocorreu uma conjunção entre os planetas Júpiter e Saturno, o que significa que podiam ser vistos bem próximos um do outro quando avistados da Terra. Se Júpiter e Saturno dão uma volta completa ao redor do Sol aproximadamente a cada 12 e 30 anos, respectivamente, em qual dos anos seguintes ambos estiveram em conjunção no céu da Terra?

a) 1840
b) 1852
c) 1864
d) 1922
e) 1960

Exercício 4:
A soma de dois números primos positivos a e b é 34 e a soma dos números primos positivos a e c é 33. Qual é o valor de $a + b + c$?

Exercício 5:
Senhor Namm assou 252 biscoitos, senhora Clancy assou 105 biscoitos e senhor Palavras assou 168 biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?

Exercício 6:
Esmeralda fez a lição de casa, mas o cachorro dela, Totopázio, rasgou a folha que ela deveria entregar. A lição de casa de Esmeralda pedia para dividir números de cinco algarismos por números de três algarismos. Um dos pedaços rasgados está exibido abaixo, com algumas partes borradas.



a) Calcule $\mathrm{mdc}(690, 2415, 2070)$.
b) Sabendo que Esmeralda acertou as divisões, determine o dividendo e o divisor da conta da direita.

Exercício 7 (Questão 14 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):
Quantos são os números inteiros p tais que $50^3 < 5^p < 50^4$?

Exercício 8 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):
O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de n?

Exercício 9 (Questão 18 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):
Três amigas foram a uma livraria com seus namorados. Coincidentemente, cada pessoa pagou, por livro, um preço em reais igual à quantidade de livros que comprou. Além disso, cada mulher gastou 32 reais a mais que seu respectivo namorado. Ao final das compras, as mulheres compraram, ao todo, oito livros a mais que os homens. Quantos livros foram comprados no total?

Exercício 10 (Questão 15 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $\frac{N}{3}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam todos números inteiros?

Exercício 11 (Questão 83 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Quais números naturais m e n satisfazem a equação $2^n + 1 = m^2$?

Exercício 12 (Questão 4 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2017):
Neste problema, iremos estudar quantos fatores 2 aparecem na fatoração em primos de números da forma $5^{2^n} - 1$.

a) Sejam x e y dois números inteiros ímpares. Prove que $x^2 + y^2$ possui exatamente um fator 2 em sua fatoração em primos.
b) Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, determine quantos fatores 2 o número $5^4 - 1$ possui.
c) O número $N = 5^{2^{2017}} - 1$ possui quantos fatores 2?
d) Sabendo que o número 5^{20} possui 14 algarismos, prove que $5^{2^{18}+20}$ possui 6 zeros consecutivos em sua representação decimal.

Solução do Exercício 1:

Dividindo p por 3, obtém-se $p = 3q + r$, sendo q e r inteiros, com $r \in \{0, 1, 2\}$. Se $r = 0$, então $p = 3q$ e, portanto, 3 é divisor de p. Como p é primo, então $p = 3$ e, logo, $8p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$, que também é primo. Se $r = 1$, então $p = 3q + 1$ e, logo, $8p^2 + 1 = 8 \cdot (3q + 1)^2 + 1 = 3 \cdot (24q^2 + 16q + 3)$ é divisível por 3. Como $8p^2 + 1$ é primo e divisível por 3, então $8p^2 + 1 = 3$ e, logo, $4p^2 = 1$, o que não é possível, pois $4p^2$ é par e 1 é ímpar. Assim, r não pode ser igual a 1. Se $r = 2$, então $p = 3q + 2$ e, logo, $8p^2 + 1 = 8 \cdot (3q + 2)^2 + 1 = 3 \cdot (24q^2 + 32q + 11)$ é divisível por 3, o que não é possível, conforme explicado anteriormente. Assim, r não pode ser igual a 2. Assim, a única possibilidade é mesmo $p = 3$, sendo $8p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$.

Solução do Exercício 2:

a) Sejam n a quantidade de salgadinhos em cada embalagem, m a quantidade de embalagens com salgadinhos de presunto e k a quantidade de embalagens com quibes. Então, $nm = 130$ e $nk = 540$ e, portanto, n é divisor de 540 e 130. Como foi usada a menor quantidade possível de embalagens, então n deve ser o maior divisor comum de 130 e 540, ou seja, $n = \mathrm{mdc}(540, 130)$. Como as fatorações em números primos de 540 e 130 são $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ e $130 = 2 \times 5 \times 13$, então $n = \mathrm{mdc}(540, 130) = 2 \times 5 = 10$.

b) Joana chegou à festa com $\frac{130}{10} = 13$ embalagens de salgadinhos de presunto e $\frac{540}{10} = 54$ embalagens de quibes, resultando em um total de $13 + 54 = 67$ embalagens.

Solução do Exercício 3:

Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra quando $1982 + 12k = 1982 + 30j$, ou seja, $12k = 30j$, sendo k e j inteiros. Mas, $12k = 30j$, com k e j inteiros, quando $12k = 30j$ é múltiplo de 12 e 30, sendo que o menor múltiplo comum positivo de 12 e 30 é igual a $\mathrm{mmc}(12,30)$. Como as fatorações em primos de 12 e 30 são $12 = 2^2 \times 3$ e $30 = 2 \times 3 \times 5$, então $\mathrm{mmc}(12,30) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$. Logo, os anos em que Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra são $1982 + 60n$, sendo n inteiro. Para $n = -1$, tem-se $1982 + 60 \cdot (-1) = 1922$, que, portanto, é um ano de conjunção, apresentado na alternativa (d). A diferença entre cada um dos anos apresentados nas demais alternativas e 1982 não é um múltiplo de 60 e, logo, os anos apresentados nas demais alternativas não são anos de conjunção.

Solução do Exercício 4:

Como $a + b = 34$ e $a + c = 33$, então $b - c = (a + b) - (a + c) = 34 - 33 = 1$. Como $b - c = 1$, então b e c são números primos positivos consecutivos. Mas, o único par de primos positivos consecutivos é $(2, 3)$. De fato, dados dois inteiros consecutivos p e $p + 1$, um deles é par. Se p for par e primo positivo, então $p = 2$ e, logo, $p + 1 = 3$, que é primo. Se $p + 1$ for par e primo positivo, então $p + 1 = 2$ e, logo, $p = 1$, que não é primo. Assim, $b = 3$ e $c = 2$, e, portanto, $a = 31$. Logo, $a + b + c = 31 + 3 + 2 = 36$.

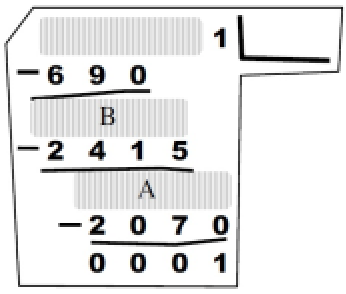
Solução do Exercício 5:

Denotando por n a quantidade de biscoitos em cada pacote, por x a quantidade de pacotes usados pelo senhor Namm, por y a quantidade de pacotes usados pela senhora Clancy e por z a quantidade de pacotes usados pelo senhor Palavras, tem-se $nx = 252$, $ny = 105$ e $nz = 168$. Assim, n é divisor de 252, 105 e 168. O maior valor possível para n é igual ao $\mathrm{mdc}(252, 105, 168)$. As fatorações em primos de 252, 105 e 168 são $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, $105 = 3 \times 5 \times 7$ e $168 = 2^3 \times 3 \times 7$. Logo, $\mathrm{mdc}(252, 105, 168) = 3 \times 7 = 21$.

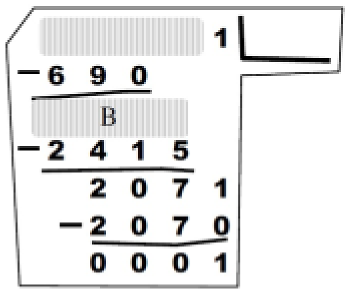
Solução do Exercício 6:

a) Como as fatorações em primos de 690, 2415 e 2070 são $690 = 2 \times 3 \times 5 \times 23$, $2415 = 3 \times 5 \times 7 \times 23$ e $2070 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 23$, então $\mathrm{mdc}(690, 2415, 2070) = 3 \times 5 \times 23 = 345$.

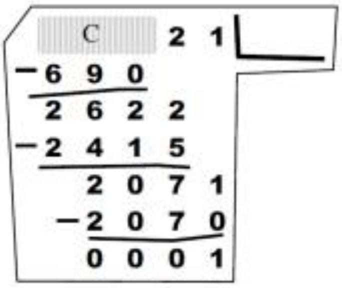
b) Vamos encontrar inicialmente os números A e B, e parte do dividendo, fazendo o processo inverso.

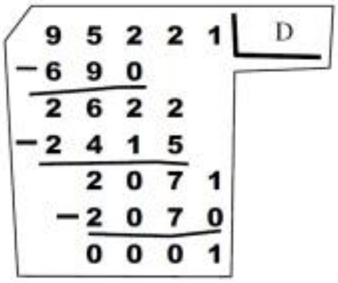


O número A é $2070 + 1 = 2071$.



O número B é $2415 + 207 = 2622$ e, assim, descobrimos o algarismo das dezenas do dividendo, que é 2. Finalmente, o número C é $690 + 262 = 952$ e, portanto, o dividendo é 95221.





Vamos agora encontrar D, o divisor. Como D é divisor de 690, 2415 e 2070, então D é um dos divisores positivos de $\mathrm{mdc}(690, 2415, 2070) = 345$, ou seja, pode ser $1, 3, 5, 15, 23, 69, 115$ ou 345. Veja que o primeiro passo é dividir 952 por D e obter resto 262. Como o resto é sempre menor do que o divisor, então D não pode ser nenhum dos números $1, 3, 5, 15, 23, 69$ e 115. Logo, D só pode ser igual a 345.

Solução do Exercício 7:

A decomposição de 50 em fatores primos é $50 = 2 \times 5^2$. Logo, a dupla desigualdade do enunciado pode ser escrita como $(2 \times 5^2)^3 < 5^p < (2 \times 5^2)^4$, ou seja, $2^3 \times 5^6 < 5^p < 2^4 \times 5^8$. Dividindo todos os termos por 5^6, obtemos $2^3 < 5^{p-6} < 2^4 \times 5^2$, ou seja, $8 < 5^{p-6} < 400$. As únicas potências de 5 que estão entre 8 e 400 são $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$. Logo, $p - 6$ só pode assumir os valores 2 e 3, donde p só pode assumir os valores 8 e 9.

Solução do Exercício 8:

Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, tem-se $n \geq 13$. Por outro lado, $13! = 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}$ e, portanto, $\frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16$. Logo, $n! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$ e, portanto, $n = 16$.

Solução do Exercício 9:

Os dados do problema estão organizados na tabela abaixo:

Pessoa	Quantidade de livros que comprou	Preço por cada livro	Quanto a pessoa gastou
Amiga 1	a_1	a_1	a_1^2
Amiga 2	a_2	a_2	a_2^2
Amiga 3	a_3	a_3	a_3^2
Namorado da amiga 1	n_1	n_1	$n_1^2 = a_1^2 - 32$
Namorado da amiga 2	n_2	n_2	$n_2^2 = a_2^2 - 32$
Namorado da amiga 3	n_3	n_3	$n_3^2 = a_3^2 - 32$

Como $n_i^2 = a_i^2 - 32,\ i = 1,2,3$, então $(a_i - n_i)(a_i + n_i) = 32 = 2^5$. Cada uma das parcelas do membro direito da última igualdade é um número inteiro positivo e, portanto, há apenas duas soluções $(a_i = 9, n_i = 7)$ e $(a_i = 6, n_i = 2)$, devido à decomposição única em fatores primos. Na primeira solução, a mulher comprou dois livros a mais do que o seu namorado e na segunda ela comprou 4 livros a mais do que o namorado. Como as mulheres compraram oito livros a mais do que os homens, só resta a possibilidade de um casal ter comprado $6 + 2 = 8$ livros e os outros dois casais terem comprado, cada um deles $9 + 7 = 16$ livros. Desse modo, a quantidade total de livros comprada foi $8 + 16 + 16 = 40$.

Solução do Exercício 10:

Para que $\frac{N}{3}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam números inteiros, N deve ser um múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor N possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7, que é $3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$.

Solução do Exercício 11:

Como $2^n = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$, pela unicidade da fatoração em números primos, segue que $m - 1$ e $m + 1$ são potências de 2. Como a diferença de $m + 1$ e $m - 1$ é igual a 2, a única solução possível é $m - 1 = 2$ e $m + 1 = 2^2$, donde $m = 3$. Assim, $2^n + 1 = 3^2 = 9$ e obtemos $n = 3$. A resposta é $m = n = 3$.

Solução do Exercício 12:

a) Como x e y são ímpares, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $x = 2x_0 + 1$ e $y = 2y_0 + 1$. Daí, $x^2 + y^2 = (2x_0 + 1)^2 + (2y_0 + 1)^2 = 4x_0^2 + 4x_0 + 1 + 4y_0^2 + 4y_0 + 1 = 4x_0^2 + 4x_0 + 4y_0^2 + 4y_0 + 2 = 2(2x_0^2 + 2x_0 + 2y_0^2 + 2y_0 + 1) = 2(2(x_0^2 + x_0 + y_0^2 + y_0) + 1)$. Assim, o número $x^2 + y^2$ é o produto de 2 por um número ímpar e, portanto, possui apenas um fator 2.

b) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados duas vezes. Temos $5^4 - 1 = (5^2)^2 - 1^2 = (5^2+1)(5^2-1) = (5^2+1^2)(5^2-1^2) = (5^2+1^2)(5+1)(5-1)$. Agora, basta contar os fatores 2 em cada fator. Pelo item anterior, 5^2+1^2 possui apenas um fator 2. Além disso, $5+1=6=2\cdot 3$ possui apenas um fator 2 e $5-1=4=2^2$ possui dois fatores 2. Logo, 5^4-1 possui $1+1+2=4$ fatores 2.

c) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados 2017 vezes. Temos $5^{2^{2017}} - 1 = \left(5^{2^{2016}}\right)^2 - 1^2 = \left(5^{2^{2016}}+1\right)\left(5^{2^{2016}}-1\right) = \left(5^{2^{2016}}+1^2\right)\left(5^{2^{2015}}+1\right)\left(5^{2^{2015}}-1\right) = \cdots = \left(5^{2^{2016}}+1^2\right)\left(5^{2^{2015}}+1^2\right)\ldots(5^2+1^2)(5+1)(5-1)$. Temos 2016 números da forma x^2+y^2, com x e y ímpares, e cada um contribui com apenas um fator 2, de acordo com o item (a). Além disso, $5+1=6$ tem apenas um fator 2 e $5-1=4$ tem dois fatores 2. Assim, o número $N = 5^{2^{2017}} - 1$ possui exatamente $2016\cdot 1+1+2=2019$ fatores 2.

<u>Observação</u>: Repetindo o argumento anterior, é possível mostrar que $5^{2^n}-1$ possui exatamente $n+2$ fatores primos 2.

d) Pelo argumento do item anterior, existe um inteiro k tal que $5^{2^{18}} - 1 = 2^{20}k$. Consequentemente, $5^{2^{18}+20} = (2^{20}k+1)\cdot 5^{20} = (2\cdot 5)^{20}k + 5^{20} = 10^{20}k + 5^{20}$. Como 10^{20} termina em 20 zeros e 5^{20} possui apenas 14 dígitos, então existem pelo menos $20-14=6$ dígitos iguais a zero consecutivos dentre os últimos dígitos da representação decimal de $5^{2^{18}+20}$.

Assuntos a serem abordados:

- Progressões aritméticas e geométricas (Aritmética).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

- Material Teórico do Portal da Matemática: “Definição e Lei de Formação de uma PA”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfuoof00on40o.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: “PAs Inteiras e Soma dos Termos de uma PA”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c2ewtv1sh7ccg.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: “Exercícios de Fixação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/diz2nn99ztkcc.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: “PAs de Segunda Ordem”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/58h5ig7q2uosw.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Definição e Lei de Formação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cosyyelb57kgs.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Exercícios de Fixação”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c8gx0jwf55440.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: Soma dos Termos de uma PG Finita”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddz2r7g2g34sw.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: “Progressões Geométricas: A Soma dos Termos de uma PG Infinita”, U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a10w5cypxbks4.pdf

- Material Teórico do Portal da Matemática: "Exercícios de Aprofundamento", U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brfc7l17uvscg.pdf

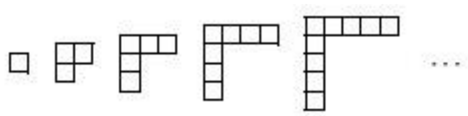
- Videoaulas do Portal da Matemática:

Progressões Aritméticas:
1º Ano do Ensino Médio → Módulo "Progressões Aritméticas" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=79) → videoaulas: "Aula 01: Sequências", "Aula 02: Progressão Aritmética, o início", "Aula 03: Exercícios Introdutórios de PA", "Aula 04: Progressões Aritméticas de Razão e Termos Inteiros", "Aula 05: Soma dos Termos de uma PA", "Aula 06: Exercícios de Fixação I", "Aula 07: Exercícios de Fixação II", "Aula 08: PA de Segunda Ordem".

Progressão Geométrica:
1º Ano do Ensino Médio → Módulo "Progressões Geométricas" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=80) → videoaulas: "Aula 01: A Progressão Geométrica", "Aula 02: Taxa de Crescimento", "Aula 03: A Lei de Formação de uma PG", "Aula 04: Exercícios de Fixação I" ,"Aula 05: Exercícios de Fixação II", "Aula 06: Exercícios de Fixação III", "Aula 07: Soma dos Termos de uma PG Finita", "Aula 08: Exercícios sobre Somas de PGs Finitas", "Aula 09: Soma dos Termos de uma PG Infinita – Parte I", "Aula 10: Soma dos Termos de uma PG Infinita – Parte II", "Aula 11: Exercícios sobre Somas de PGs Infinitas", "Aula 12: Exercícios de Fixação I", "Aula 13: Exercícios de Fixação II", "Aula 14: Exercícios de Fixação III".

Exercício 1 (Problema 0.3 – Círculo Matemático de Moscou):
Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anular é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar o nono. Inverta a orientação novamente, voltando para o dedo mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar dessa forma, ido e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?

Exercício 2 (Problema 2.1 – Círculo Matemático de Moscou):
Eis uma série de figuras:



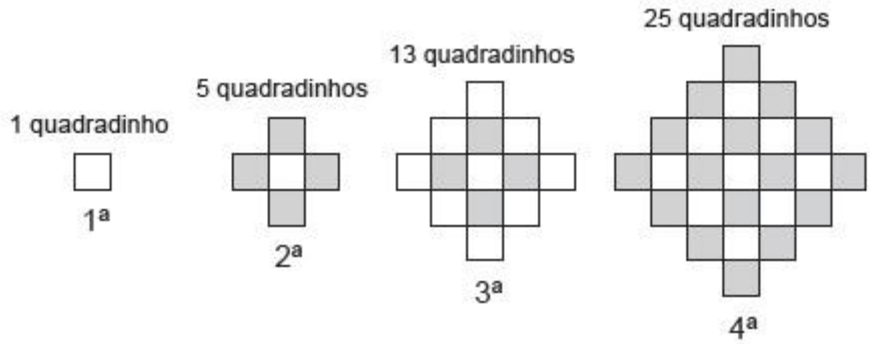
A primeira consiste de um quadrado. Quantos quadrados há na centésima figura? Quantos quadrados há ao todo nas 100 primeiras figuras?

Exercício 3 (Problema 6.7 – Círculo Matemático de Moscou):
Carol está viajando de avião. Primeiro leu um livro; depois dormiu; depois olhou pela janela e depois bebeu um suco de laranja. Cada uma dessas atividades, exceto a primeira, levou exatamente a metade do tempo que a anterior. Ela começou a ler seu livro ao meio-dia e terminou seu suco de laranja às $13:00$h. Quando Carol começou a olhar pela janela?

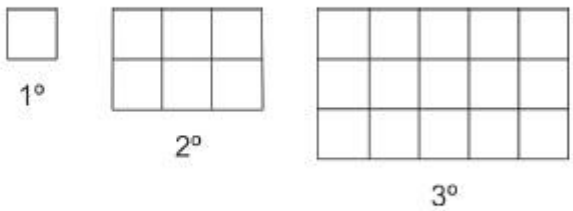
Exercício 4 (Problema 8.4 – Círculo Matemático de Moscou):
Um bando de gansos brancos voou sobre uma cadeia de lagos. Cada vez que chegavam a um lago, metade dos gansos remanescentes mais meio ganso aterrissava no lago, enquanto os outros continuavam a voar. Quando chegaram ao sétimo lago, os últimos gansos aterrissaram. Quantos gansos havia no bando?

Exercício 5 (Problema CI.1 – Círculo Matemático de Moscou):
Um carteiro retira as cartas de uma caixa de correio pública 5 vezes ao dia. Se ele abrir a caixa de correio em intervalos de tempos iguais começando às $07:00$ h e terminando às $19:00$ h, de quanto será o intervalo de tempo?

Exercício 6 (Questão 16 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2009 – Modificado):
Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2018 quadradinhos?



Exercício 7 (Questão 4 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2008):
Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do $100°$ retângulo dessa sequência?



Exercício 8:
A soma dos 15 termos de uma progressão aritmética é 465. Se o primeiro termo dessa progressão é 5, qual é a razão dessa progressão?

Exercício 9:
Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da sétima geração que serão descendentes de uma única coelha (a primeira geração consta de 3 coelhas).

Exercício 10:
Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora e a cada hora após a primeira, a metade do que percorre na hora precedente. Assim, na segunda hora percorre 128 m, na terceira hora 64 m, e assim por diante. Determine o tempo necessário para completar um percurso de 480 m.

Exercício 11:
Numa progressão geométrica de 6 termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 8 e a soma dos dois últimos vale 648. Calcule a razão da progressão.

Exercício 12:
Numa progressão geométrica, o terceiro termo é -48 e o sexto termo é 6. Calcule o primeiro termo e a razão da progressão.

Exercício 13:
A soma dos termos de uma progressão geométrica com uma infinidade de termos é igual a 5. Se o primeiro termo é 3, calcule a razão da progressão geométrica.

Solução do Exercício 1:

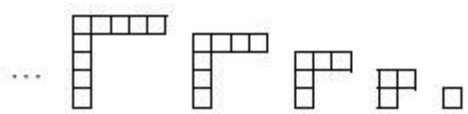
Vamos olhar os números que correspondem ao polegar. Ele começa com o número $a_1 = 1$, depois contamos 4 do indicador ao mindinho e quatro novamente de volta (do anular ao polegar), de modo que o próximo número associado ao polegar é $a_2 = 1 + 8 = 9$. O próximo número associado ao polegar é $a_3 = 1 + 2 \cdot 8 = 17$, e a cada visita subsequente ao polegar é preciso somar 8 ao número anterior. Vemos que a sequência de números associado ao polegar forma uma progressão aritmética de razão 8, logo $a_n = 1 + 8 \cdot (n - 1)$. Como $1000 = 8 \cdot 250$, então $a_{251} = 1001$. Portanto, o indicador será o milésimo.

Solução do Exercício 2:

Há um quadrado na primeira figura e, em cada uma das seguintes, dois a mais que na anterior. Logo, podemos representar essa sequência por $a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1) = 2n - 1$ (a sequência de números naturais ímpares). A centésima figura terá $a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$ quadrados. Para saber quantos quadrados há no total basta calcular a soma de uma progressão aritmética e obtemos o número total de quadrados:

$$S_{100} = \frac{100 \cdot (a_1 + a_{100})}{2} = \frac{100 \cdot 200}{2} = 100^2 = 10000.$$

Podemos também considerar os diagramas em ordem inversa:



Note que a primeira figura (que agora é a última) cabe na segunda (penúltima, agora) para formar um quadrado 2×2. Tudo isso cabe dentro da próxima figura para formar um quadrado 3×3, e assim por diante. Logo as 100 primeiras figuras juntas formam um quadrado 100×100, que contem $100 \cdot 100 = 10000$ pequenos quadrados.

Solução do Exercício 3:

Vamos supor que Carol levou a minutos para ler o livro. Os tempos em que Carol realizou cada uma das atividades formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. O tempo total utilizado para as quatro atividades foi de $a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15a}{8}$ minutos. Como $\frac{15a}{8} = 60$, então $a = 32$. Assim, Carlo demorou 32 minutos em ler o livro e dormiu por 16. Assim, começou a olhar pela janela após $32 + 16 = 48$ minutos, ou seja, às $12{:}48$h.

Solução do Exercício 4:

O problema tem uma solução simples: adicione um ganso ao bando – digamos um ganso cinza, para não ser confundido com os outros. Com o ganso extra, exatamente metade dos gansos irão aterrissar em cada lago. No sétimo lago, exatamente metade dos gansos que chegaram até aí irão aterrissar e só nosso ganso cinza irá continuar voando; logo 1 ganso aterrissa. O número de gansos que aterrissa em cada lago forma um dos valores de uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$. Temos $a_1 = a$ e $a_7 = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{a}{64} = 1$, assim $a = 64$. O número total de gansos brancos é $1 + 2 + 4 + \cdots + 64$. Uma forma simples de calcular a soma é escrevendo:

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 64,$$

$$2S = 2 + 4 + \cdots + 64 + 128.$$

Subtraindo esses valores obtemos que haviam $S = 128 - 1 = 127$ gansos brancos.

Solução do Exercício 5:

Os horários em que o carteiro abre a caixa de correios formam uma progressão aritmética com $a_1 = 7$ e $a_5 = 19 = 7 + 4 \cdot d$, onde d razão da progressão aritmética. Logo $d = 3$ horas.

Solução do Exercício 6:

Considere a_n o número de quadradinhos que a figura n tem a mais da figura anterior. Por exemplo $a_2 = 4$, $a_3 = 4 + 4$, $a_4 = 4 + 4 + 4$ e assim por diante. Ou seja, a sequência de números a_n forma uma progressão aritmética de razão 4. Vemos claramente que $a_n = 4(n - 1)$. A figura n possui $S_n = 1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ quadradinhos. Sabemos que

$$a_2 + \cdots + a_n = \frac{(n-1)(a_2 + a_n)}{2} = \frac{(n-1)\big(4 + 4(n-1)\big)}{2} = \frac{4n(n-1)}{2}$$
$$= 2n(n-1).$$

Comparando $2n^2$ com 2018, temos que $\sqrt{\frac{2018}{2}} \approx 31{,}76$, então calculamos $S_{32} = 2 \times 32 \times 31 + 1 = 1985$, $S_{33} = 2 \times 33 \times 32 + 1 = 2113$. Logo a primeira figura que possui mais de 2018 quadradinhos é a figura 33.

Solução do Exercício 7:

O perímetro da primeira figura é $p_1 = 4$, da segunda figura $p_2 = 4 + 6$, da terceira figura $a_3 = 10 + 6$ e assim por diante. Dessa forma vemos claramente que ao aumentar uma linha, o perímetro aumenta de 2 cm e ao aumentar duas colunas, o perímetro aumenta de 4, totalizando 6 cm a mais que na figura anterior. Assim,

$p_n = 4 + 6 \times (n-1) = 6n - 2$. Logo o perímetro do centésimo quadrado é $p_{100} = 6 \times 100 - 2 = 598$.

Solução do Exercício 8:

Seja a_n o n-ésimo termo da progressão aritmética, nesse caso temos

$$495 = \frac{15 \times (5 + a_{15})}{2}.$$

Daí obtemos $a_{15} = 61$. Como $a_{15} = 5 + r \times (15 - 1)$, onde r é a razão, temos $r = 4$.

Solução do Exercício 9:

Chame q_n o número de coelhos da n-ésima geração. Trata-se de uma progressão aritmética onde $q_1 = 3$ e razão 3, logo $q_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$. A sétima geração consta de $3^7 = 2187$ coelhas.

Solução do Exercício 10:

A distância por hora percorrida pelo alpinista forma uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é $q_1 = 256$ e a razão é $r = \frac{1}{2}$. O termo n-ésimo é $q_n = \frac{256}{2^{n-1}}$ e a soma dos n primeiros termos é $S_n = q_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 256 \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 512 - \frac{512}{2^n} = 480$. Daí $n = 4$.

Solução do Exercício 11:

Sejam $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5$ os 6 termos da progressão geométrica. De acordo aos dados, temos $a + ar = 8$ e $ar^4 + ar^5 = 648$. Observe que $ar^4 + ar^5 = r^4(a + ar) = 8r^4$. Isso implica que $r^4 = \frac{648}{8} = 81$, isto é, $r = 3$.

Solução do Exercício 12:

Seja r a razão da progressão e a o primeiro termo. Então $q_3 = -48 = ar^2$ e $q_6 = 6 = ar^5$. Dividindo ambas equações obtemos $\frac{ar^2}{ar^5} = \frac{1}{r^3} = \frac{-48}{6} = -8$, daí $r = -\frac{1}{2}$. De $-48 = a \times \frac{1}{4}$ obtemos $a = -192$.

Solução do Exercício 13:

Seja $a = 3$ o primeiro termo da progressão e $S = \frac{a}{1-r} = 5$ a soma de todos os termos da progressão geométrica, onde r é a razão. Então $\frac{3}{1-r} = 5 \Longrightarrow 3 = 5 - 5r \Longrightarrow r = \frac{2}{5}$.