Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N1 – CICLO 2 – ENCONTRO 1

Assuntos a serem abordados:

- Contagem através de listagens e de árvores de possibilidades.
- Princípios aditivo e multiplicativo.
- Resolução de exercícios.

Videoaulas do Portal da Matemática:
2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental da contagem

- Princípio fundamental da contagem
  https://www.youtube.com/watch?v=ReSV1ZHR0iA
- Exercícios sobre o princípio fundamental da contagem – parte 1
  https://www.youtube.com/watch?v=XZM5KGfyAwY
- Exercícios sobre o princípio fundamental da contagem – parte 2
  https://www.youtube.com/watch?v=1L2W0ENxexI

- Videoaulas no canal PICOBMEP no Youtube
Na parte de Contagem do canal picomep no Youtube, vídeo 1 e vídeo 2.

Materiais de apoio a aula disponíveis no Portal da Matemática

- 2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental de contagem – material teórico:
  http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr1740zquo8s.pdf
- 2º ano do ensino médio – princípios básicos de contagem – princípio fundamental de contagem – caderno de exercícios:
  http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/cernvmc6v3ks4.pdf

Referência bibliográfica importante

- Apostila 2 do PIC – Métodos de contagem e probabilidade – Paulo Cezar Pinto Carvalho.

- Capítulos 8 e 9 do livro: Círculos de Matemática da OBMEP – volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra - Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas.

1. Introdução

No capítulo 1 da apostila 2 do PIC ``métodos de contagem e probabilidade'' são apresentadas várias sugestões de como raciocinar sobre problemas de contagem. Para a preparação deste encontro, sugerimos o estudo desta apostila. Mais ainda, nos capítulos 8 e 9 do livro "círculos matemáticos da OBMEP", volume 1, são apresentados vários exercícios e exemplos resolvidos. O estudo desses capítulos também é importante para a preparação deste encontro.

Diferentemente dos roteiros já disponibilizados, neste, além da lista de exercícios para serem trabalhados em sala de aula, também vamos apresentar alguns exemplos resolvidos para ilustrar a metodologia que está sendo apresentada para a solução de problemas de contagem. Os Professores e os Coordenadores devem pensar na melhor estratégia para utilizar esses exemplos.

2. O Princípio Aditivo

Neste encontro pretendemos ensinar estratégias para a resolução de problemas de contagem através da análise do problema, da organização e do uso de raciocínios simples e não vamos deduzir nem utilizar fórmulas prontas que exigem memorização e ainda podem ser utilizadas em situações equivocadas. Os principais resultados que serão utilizados nas soluções dos problemas de contagem são o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

O princípio aditivo é utilizado cotidianamente quando fazemos uma contagem e a separamos em casos. Por exemplo, para contar quantos são os alunos que estão em uma sala de aula, podemos contar os meninos e podemos contar as meninas. O número de alunos na sala será a soma da quantidade de meninos e de meninas. Do mesmo modo, se temos uma pilha de cartas de baralho e queremos contar essas cartas, podemos separar por nipe (paus, copas, espadas e ouros) e depois podemos somar as quantidades de cartas de cada nipe.

Para que esta contagem separada em casos esteja correta é necessário que:

- os casos cubram todas as possibilidades, ou seja, não se pode esquecer de contar nada que deveria ser contado.
- os casos devem ser disjuntos, ou seja, nada pode ser contado mais de uma vez.

Traduzindo estas condições para uma linguagem mais formal, o que está sendo dito é o seguinte: se temos um conjunto escrito como uma união de dois subconjuntos disjuntos, então a quantidade de elementos do conjunto dado é a soma das quantidades de elementos desses dois subconjuntos.

Princípio Aditivo. Sejam A e B conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos com interseção vazia. Se A possui *m* elementos e se B possui *n* elementos, então a união $A \cup B$ possui *m+n* elementos.

Por exemplo, se desejamos contar quantos são os alunos em uma sala de aula, vamos representar por A o conjunto dos meninos e vamos representar por B o conjunto das meninas desta sala. É evidente que a sala de aula é a união $A \cup B$. Como a interseção $A \cap B$ é vazia, então a quantidade de elementos em $A \cup B$ é igual à soma da quantidade de elementos em A com a quantidade de elementos em B. Ou seja, é a quantidade de meninos mais a quantidade de meninas.

Exemplo 1. Quantos são os números inteiros entre 1 e 20 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 7?

Solução. Existem 6 múltiplos de 3 entre 1 e 20, a saber {3, 6, 9, 12, 15, 18} e existem 2 múltiplos de 7 neste conjunto, a saber {7, 14}. Como esses conjuntos são disjuntos, então existem 6+2=8 múltiplos de 3 ou de 7 entre 1 e 20.

Exemplo 2. Em uma escola, 153 alunos estudam pela manhã, outros 92 estudam a tarde e outros 136 estudam a noite. Quantos alunos desta escola estudam pela manhã ou à noite?

Solução. Pela manhã estudam 153 alunos e a noite estudam 136 alunos. Como são alunos diferentes, o total de alunos que estudam de manhã ou a noite é igual a 153+136=289.

De outro modo o princípio aditivo também pode ser enunciado do seguinte modo.

Princípio Aditivo. Suponha que um evento *X* possa ocorrer de *x* maneiras possíveis e que um evento distinto *Y* possa ocorrer de *y* maneiras possíveis. Então *X* ou *Y* pode ocorrer de *x+y* maneiras diferentes.

O princípio aditivo enunciado logo acima pode ser generalizado para situações em que um conjunto está escrito como a união de mais de dois subconjuntos disjuntos. Por exemplo, esta pode ser a situação de uma pilha de cartas de um baralho. Podemos chamar de A o conjunto das cartas de paus, de B o conjunto das cartas de copas, de C o conjunto das cartas de espadas e de D o conjunto das cartas de ouros. Cada carta da pilha está em um desses conjuntos. Logo se contamos os elementos de A, B, C e D não esquecemos de contar nenhuma carta. Isto significa que a pilha de cartas é a união $A \cup B \cup C \cup D$. E como uma carta possui um único nipe, ou seja, como $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$, se contamos os elementos de A, B, C e D então contamos cada carta uma única vez. Deste modo, a quantidade de cartas na pilha é a soma das quantidades de elementos dos conjuntos A, B, C e D.

Exemplo 3. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução. Sejam B_1, B_2 e B_3 as blusas de Maria. Agora vamos representar por A, B e C os conjuntos das maneiras de Maria se vestir, respectivamente, com as blusas B_1, B_2 e B_3. Cada um desses conjuntos possui dois elementos, pois cada blusa pode ser combinada com as duas saias. A união $A \cup B \cup C$ contém todas as maneiras de Maria combinar uma blusa com uma saia. Como os conjuntos A, B e C não possuem interseção, então o conjunto $A \cup B \cup C$ possui 2+2+2=6 elementos. Veremos na próxima seção que esta solução está muito próxima do princípio multiplicativo.

3. <u>Princípio Multiplicativo</u>

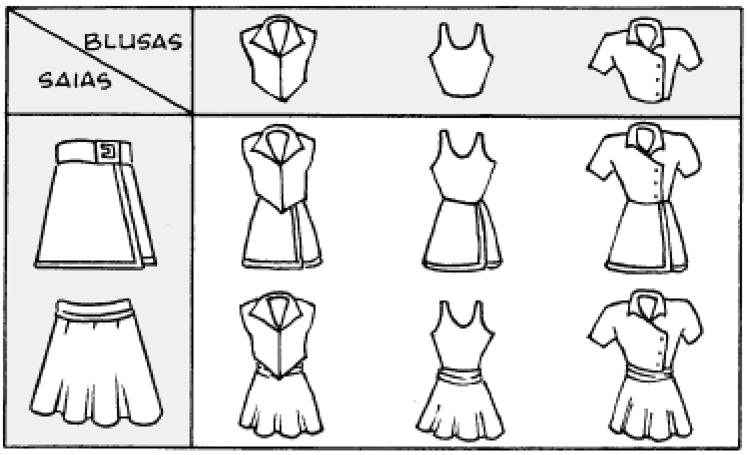
Antes de apresentar formalmente o princípio multiplicativo, vamos explorar alguns exemplos. Nas soluções destes primeiros exemplos sugerimos que sejam listadas todas as possibilidades e que a contagem final seja relacionada com uma multiplicação. Esperamos que esta atitude ajude no entendimento do princípio multiplicativo.

Exemplo 4. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução: Vamos representar por S_1 e S_2 as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

- Se ela escolheu a saia S_1, então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.
- De modo análogo, se ela escolheu a saia S_2, ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

Então, pelo princípio aditivo, ao todo ela pode se vestir de 3+3=6 modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.



Comentário: A resposta 3+3=6 também pode ser escrita como $2\times3=6$. Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos $2\times3=6$, pois temos uma soma de duas parcelas iguais a três.

Exemplo 5. Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Solução: Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

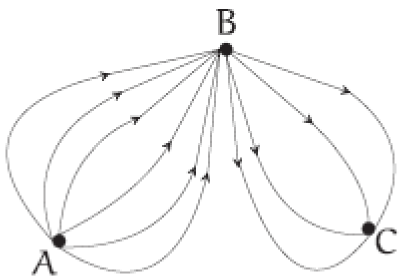
- Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43. São três possibilidades.

Então ao todo temos 3+3+3+3=12 números possíveis.

	1	2	3	4
1		12	13	14
2	21		23	24
3	31	32		34
4	41	42	43	

Comentário: Do jeito como a solução foi organizada, a contagem de todas estas possibilidades também pode ser pensada assim. Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidade (são as quatro linhas da tabela). Uma vez escolhido este primeiro algarismo, sobram 3 possibilidades para a escolha do algarismo seguinte (são os números coloridos das três colunas em cada linha). Daí o total de possibilidades é igual ao produto $4\times3=12$ pois temos uma soma de quatro parcelas iguais a três.

Exemplo 6. (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



Solução. Vamos numerar as cidades de A até B com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Vamos numerar as cidade de B até C também com números 1, 2, 3 e 4. E vamos representar um caminho de A até C como, por exemplo assim 5-3 em que pegamos a estrada 5 para ir de A até B e pegamos a estrada 3 para ir de B até C.

- Se a primeira estrada é a 1, então podemos fazer quatro percursos diferentes: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4.
- Se a primeira estrada é a 2, então também podemos fazer quatro percursos diferentes: 2-1, 2-2, 2-3, 2-4.
- De modo análogo se a primeira estrada é a 3, então também podemos fazer quatro percursos diferentes: 3-1, 3-2, 3-3, 3-4.

Então para cada escolha da estrada de A até B, podemos fazer quatro percursos diferentes para sair de A e chegar até C. Como temos 6 escolhas de estradas de A até B, o número total de percursos de A até C é igual a 4+4+4+4+4+4=6x4=24.

As resoluções destes três primeiros exemplos são aplicações do princípio multiplicativo, que nada mais é do que a interpretação de multiplicação de números inteiros como uma maneira resumida de escrever uma soma de parcelas iguais.

Princípio Multiplicativo: Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual ao produto pq .

Exemplo 7. Em uma sala estão 2 meninos e 3 meninas. De quantos modos diferentes podemos formar um par menino-menina para uma dança?

Solução. O menino pode ser escolhido de 2 modos diferentes e em seguida a menina pode ser escolhida de 3 modos diferentes. Daí o casal pode ser formado de $2 \times 3 = 6$ maneiras diferentes. (solução idêntica a do exemplo 4)

Exemplo 8. Quantos são os números de dois algarismos distintos?

Solução. O algarismo da dezena pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual a zero). Depois de escolhido o algarismo da dezena, o algarismo da unidade pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual ao algarismo da dezena). Portanto existem, 9x9=81 números de dois algarismos distintos. Observe que esses números podem ser representados em uma tabela com 9 linhas (algarismo da dezena) e com 10 colunas (algarismo da unidade), com uma diagonal apagara, correspondente aos números com dois algarismos iguais. Esta tabela possui 9x10-9=90-9=81 números com dois algarismos distintos.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10		12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21		23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32		34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43		45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54		56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65		67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76		78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87		89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	

Exemplo 9. Quantos são os números pares de dois algarismos distintos?

Solução 1. Existem 9 números pares de dois algarismos terminados em zero. Agora se o número não termina em zero, então ele deve terminar com 2, 4, 6, 8. Desse modo existem 4 possibilidades para a escolha do algarismo da unidade. Depois de escolhido o algarismo da unidade, o algarismo da dezena pode ser escolhido de 8 maneiras diferentes (devemos excluir o zero e o algarismo que já foi escolhido na unidade). Então existem 8x4=32 números pares de dois algarismos distintos terminados com 2, 4, 6 ou 8. Somando com os 9 que terminam com zero, obtemos um total de 32+9=41 números.

Solução 2. De outro modo, uma estratégia bastante comum utiliza em problemas de contagem é contar com excesso e depois subtrair desta contagem os casos não desejados. Neste exercício podemos contar quantos são os números pares de dois algarismos e, em seguida, subtrair a quantidade de números pares com dois algarismos iguais. Existem 45=9x5 números pares de dois algarismos (9 dígitos para a casa da dezena e 5 dígitos para a casa da unidade). Desses 45 números devemos desconsiderar os números 22, 44, 66 e 88 que possuem algarismos iguais. Portanto existem 45-4=41 números pares com dois algarismos distintos.

	0	2	4	6	8
1	10	12	14	16	18
2	20		24	26	28
3	30	32	34	36	38
4	40	42		46	48
5	50	52	54	56	58
6	60	62	64		68
7	70	72	74	76	78
8	80	82	84	86	
9	90	92	94	96	98

Nas soluções de muitos problemas de contagem pode ser necessário o uso tanto do princípio multiplicativo quanto do princípio aditivo, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 10. Suponha que temos uma coleção com 5 livros de álgebra, 7 livros de combinatória e 10 livros de geometria. Se todos os livros são diferentes, de quantas maneiras podemos selecionar dois livros de assuntos diferentes?

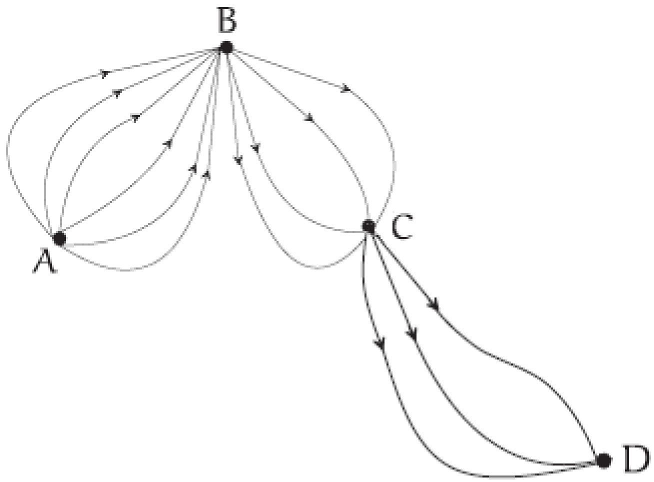
Solução. Primeiramente observe que existem três possibilidades de escolhas de dois dos três assuntos: álgebra-combinatória ou álgebra-geometria ou combinatória-geometria. Então vamos contar quantas são as escolhas em cada um desses casos:

- Álgebra-combinatória: 5x7=35
- Álgebra-geometria: 5x10=50
- Combinatória-geometria: 7x10=70

Ao todo vemos que existem 35+50+70=155 escolhas diferentes.

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para uma situação em que mais de duas decisões devem ser tomadas. Se escolhas diferentes de uma decisão não modificar a quantidade de escolhas de uma outra decisão, então para saber o número total de possibilidades basta multiplicar o número de escolhas de cada uma das decisões.

Exemplo 11. Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?

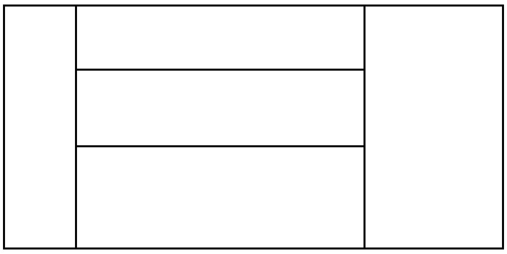


Solução: Para o trecho AB podemos escolher uma entre 6 estradas disponíveis. Uma vez escolhida esta estrada, para o trecho BC, temos 4 escolhas. Depois de escolhida esta estrada, temos 3 possibilidades para o trecho CD. Portanto temos $6 \times 4 \times 3 = 72$ modos diferentes de dirigir de A até D.

Exemplo 12. Quantos são os números naturais de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é $9\times 9\times 8=648$.

Exemplo 13. O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?



Solução: Devemos considerar dois casos, analisando separadamente se as regiões da esquerda e da direita são coloridas da mesma cor ou com cores diferentes. Suponhamos então que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com a mesma cor. Neste caso:

- A região da esquerda pode ser colorida com 5 cores.
- A região da direita pode ser colorida de uma única cor: a mesma cor da região da esquerda.
- A faixa horizontal de cima pode ser colorida com 4 cores, pois não podemos repetir a cor das regiões laterais.
- A faixa horizontal do meio pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- A faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5\times 1\times 4\times 3\times 3=180$ possibilidades.

Suponhamos agora que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com cores diferentes. Neste caso:

- Existem 5 opções de cores para a região da esquerda.
- Em seguida existem 4 opções de cores para a região da direita, pois ela deve ser colorida com uma cor diferente da região da esquerda.

- Daí podemos colorir a faixa horizontal de cima com 3 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais.
- Em seguida podemos colorir a faixa horizontal do meio com 2 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- Finalmente a faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 2 cores pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5\times 4\times 3\times 2\times 2=240$ possibilidades. Somando, concluímos que o retângulo pode ser colorido de $180+240=420$ maneiras diferentes.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N1 – ciclo 2 – Encontro 1
ENUNCIADOS

Exercício 1. Um grupo de 4 alunos (Alice, Bernado, Carolina e Daniel) tem que escolher um líder e um vice-líder para um debate.

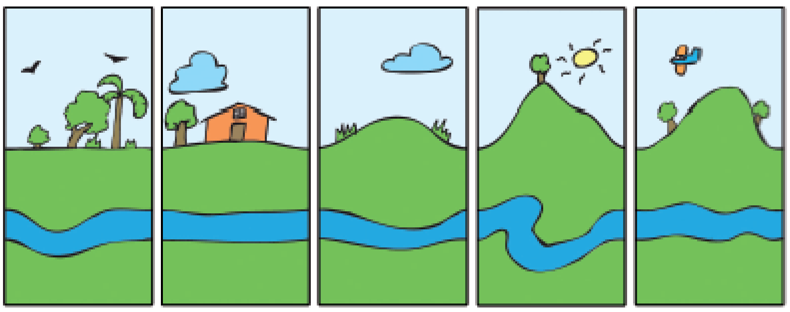
(a) Faça uma lista de todas as possíveis escolhas.
(b) Conte o número de possíveis escolhas e verifique que o Princípio Multiplicativo fornece a resposta correta.

Exercício 2. Um time de futebol de campo com 11 jogadores precisa eleger um capitão e um vice-capitão.

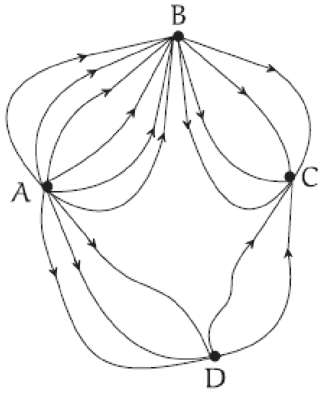
(a) De quantas maneiras esta escolha pode ser feita?
(b) Neste caso é viável listar todas estas possibilidades?

Exercício 3. (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

(a) uma semana
(b) um mês
(c) dois meses
(d) quatro meses
(e) seis meses



Exercício 4. A figura a seguir ilustra o mapa das estradas ligando 4 cidades. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?

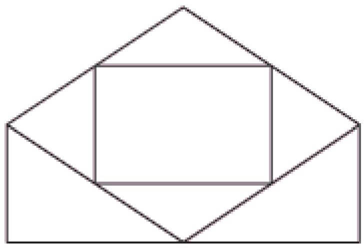


Exercício 5. Quantos são os anagramas da palavra **MALUCO** em que entre duas vogais existe uma consoante e entre duas consoantes existe uma vogal?

Exercício 6. De quantas maneiras podemos colocar dois carros diferentes em duas das seis vagas de um estacionamento?

Exercício 7. (OBMEP 2006 - N1Q7 – 1ª fase) Dois casais estão sentados em um banco de um parque, posando para uma fotografia. De quantas maneiras diferentes essas quatro pessoas podem se sentar de modo que cada marido apareça ao lado de sua esposa na fotografia?

Exercício 8. (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase) De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?



(a) 68
(b) 96
(c) 108
(d) 120
(e) 150

Solução do exercício 1. (apostila 2, exercício 1, página 11)

(a) Os pareces (líder,vice) podem ser listados assim:

(Alice, Bernardo)	(Alice, Carolina)	(Alice, Daniel)
(Bernardo, Alice)	(Bernardo, Carolina)	(Bernardo, Daniel)
(Carolina, Alice)	(Carolina, Bernardo)	(Carolina, Daniel)
(Daniel, Alice)	(Daniel, Bernardo)	(Daniel, Carolina)

(b) Por uma contagem direta verifica-se que são 12 pares (líder, vice). Aplicando o princípio multiplicativo vemos que existe 4 escolhas para o líder. Depois de escolhido o líder, existem 3 escolhas para o vice-líder. Daí a quantidade de pares (líder, vice) é igual ao produto $4\times 3=12$.

Solução do exercício 2. O capitão pode ser escolhido de 11 maneiras diferentes. Depois de escolhido o capitão, podemos escolher o vice-capitão de 10 maneiras diferentes. Daí a quantidade possível de escolhas de um par (capitão, vice) é igual a $11\times 10=110$. Neste caso, como são 110 casos possíveis, pode ser bastante trabalhoso e não muito eficiente a listagem explicita de todas estas possibilidades. Quando o número total de possibilidades é muito grande, só podemos encontrar a quantidade dessas possibilidades através de algum método de contagem, como o princípio multiplicativo. Se você ainda não está convencido, liste todas as possibilidades de escolhas de 6 números para um sorteio da Mega-Sena.

Solução do exercício 3. Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Em seguida, na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $\frac{120}{30}=4$ meses.

Solução do exercício 4. (Fomin, capítulo 2) O percurso A-B-C pode ser percorrido de $6\times 4=24$ maneiras distintas. O percurso A-D-C pode ser percorrido de $3\times 2=6$ maneiras distintas. Ao todo, existem $24+6=30$ maneiras de sair da cidade A e chegar na cidade C.

Solução do exercício 5. Vamos começar observando que existem 2 possibilidades distintas para esse anagrama: ou ele começa com uma vogal, ou ele começa com uma consoante. Se é escolhida uma destas duas possibilidades, podemos colocar as 3 vogais nas 3 respectivas posições do anagrama de $3\times2\times1=6$ maneiras distintas. E em seguida, podemos colocar as 3 consoantes nas 3 posições restantes também de $3\times2\times1=6$ maneiras distintas. Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é igual a $2\times6\times6=72$.

Solução do exercício 6. O primeiro carro pode ocupar uma das 6 vagas do estacionamento. Em seguida, o segundo carro pode ocupar uma das 5 vagas restantes. Portanto, o número total de possibilidade é igual a $6\times5=30$.

Solução do exercício 7. (OBMEP 2006 - N1Q7 – 1ª fase)

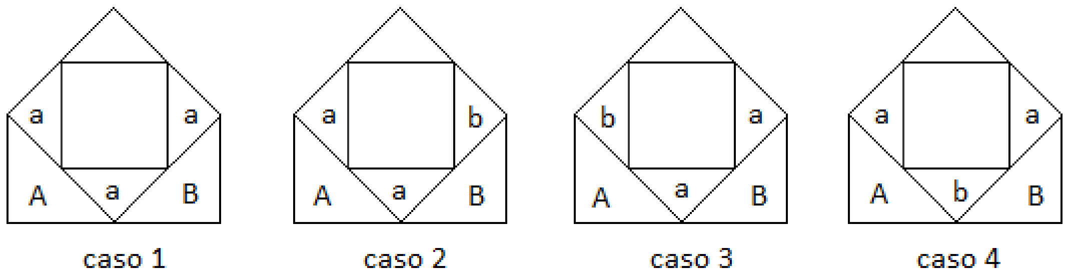
Primeira solução. Suponhamos que as posições no banco são nomeadas ordenadamente como A, B, C, D.

- No banco A pode se sentar qualquer uma das 4 pessoas.
- Depois de escolhida a pessoa que vai ocupar o banco A, no banco B só pode se sentar o cônjuge dessa pessoa. Logo existe uma única possibilidade de escolha para o banco B.
- Depois de escolhidas as pessoas dos bancos A e B, no banco C pode se sentar qualquer um do outro casal. Logo são duas possibilidades para o banco C.
- E depois de se sentarem as pessoas dos bancos A, B e C, existe uma única possibilidade para o banco D, a saber, a pessoa que ainda não se sentou.

Pelo princípio multiplicativo, existem $4\times1\times2\times1=8$ casos possíveis.

Segunda solução. São dois os casais a se sentarem no banco: C1 e C2. Existem duas escolhas para esses casais ocuparem o banco: C1-C2 (C1 a esquerda de C2) ou o contrário C2-C1 (C1 a direita de C2). Uma vez definida esta escolha, existem duas possibilidades (homem-mulher ou mulher-homem) para o casal C1 ocupar os seus dois lugares e, em seguida, também existem duas possibilidades (homem-mulher ou mulher-homem) para o casal C2 ocupar os seus dois lugares. Portanto, existem $2\times2\times2=8$ maneiras dos dois casais se sentarem no banco.

Solução do exercício 8. (OBMEP 2013 - N2Q19 – 1ª fase) Primeiramente pintamos o quadrado e o triângulo superior, o que pode ser feito de $3\times2=6$ maneiras diferentes. Uma vez isso feito, dividimos o problema em quatro casos de acordo com as cores dos triângulos menores da parte de baixo, como na figura a seguir. As letras minúsculas a e b indicam cores diferentes; notamos que como o quadrado já foi pintado, para os três triângulos menores só restam duas cores disponíveis. As letras A e B servirão apenas para denotar os triângulos maiores no que segue.



- Caso 1: temos duas escolhas para a; uma vez feita essa escolha, podemos pintar A com duas cores, bem como B. Isto pode ser feito de $2 \times 2 \times 2 = 8$ maneiras diferentes.
- Caso 2: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, podemos pintar A com duas cores e B com apenas uma. Isso pode ser feito de $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$ maneiras diferentes.
- Caso 3: esse caso é idêntico ao caso 2.
- Caso 4: temos duas escolhas para a e uma para b; feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar A e B. Isso pode ser feito de $2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$ maneiras diferentes.

No total temos $6 \times (8 + 4 + 4 + 2) = 6 \times 18 = 108$ maneiras diferentes de pintar a figura.

Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N1 – CICLO 2 – ENCONTRO 2

Assunto: resolução de exercícios de contagem.

Material: esta lista de exercícios que foi elaborada com questões de provas anteriores da OBMEP.

O objetivo deste encontro é utilizar os estudos realizados no encontro anterior na resolução de questões de provas anteriores da OBMEP.

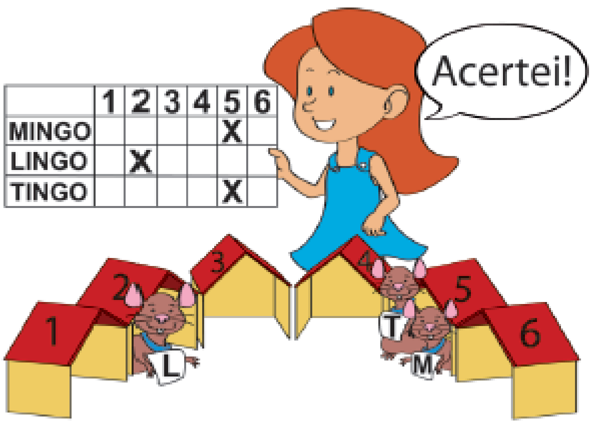
Deste modo, todas as questões sugeridas para este encontro já estiveram em alguma prova da OBMEP.

Exercício 1. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2017 – Nível 1 – Questão 17)
Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

Exercício 2. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 9)
O Campeonato Brasileiro de Futebol de 2005 foi disputado por 22 times. Cada time enfrenta cada um dos outros duas vezes, uma vez em seu campo e outra no campo do adversário. Quantas partidas serão disputadas por cada time?

Exercício 3. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 18)
Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

Exercício 4. (Prova 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 1 – Questão 4)
Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.

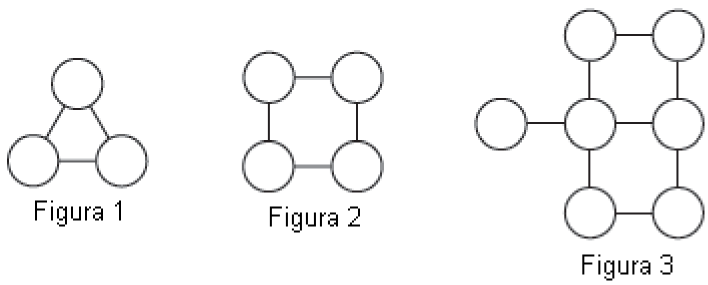


(A) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
(B) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?
(C) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

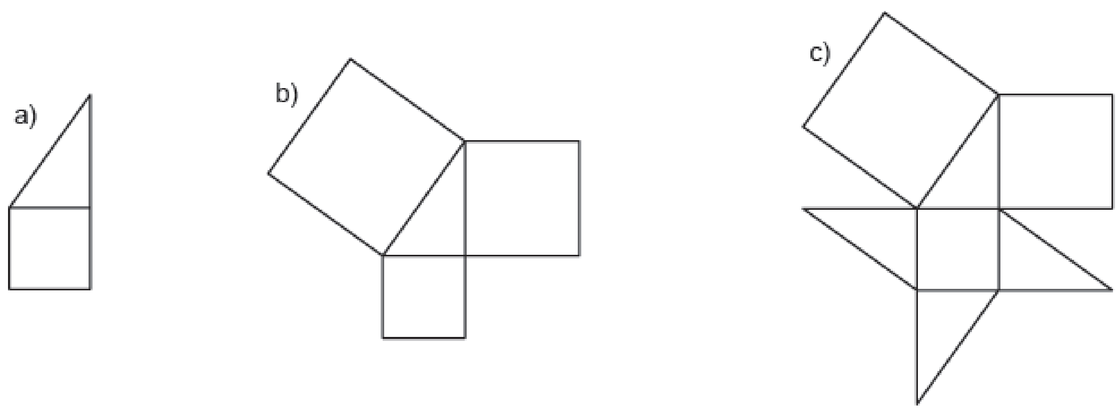
Exercício 5. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 15)
Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 16)
Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

Exercício 7. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2009 – Nível 1 – Questão 5)
Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul, preto ou vermelho de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir cada uma destas figuras?



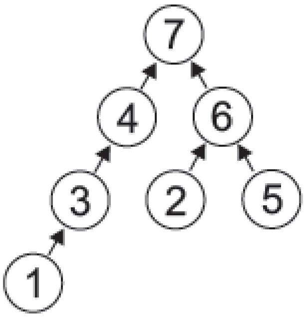
Exercício 8. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 2 – Questão 5)
João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Determine de quantas maneiras João pode pintar cada uma das seguintes figuras.

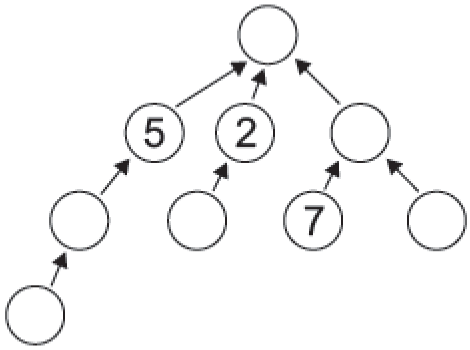


Exercício 9. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 5)
Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura a seguir, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

(A) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de 3x2x2 maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?
(B) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?
(C) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?
(D) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 5)
Os círculos da figura abaixo a esquerda foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.

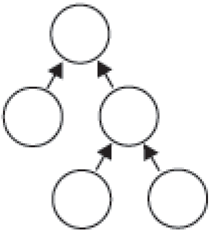


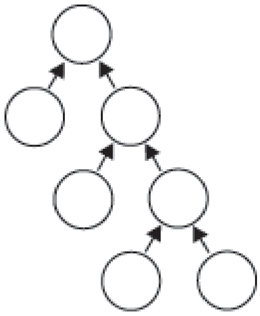


(A) Complete a figura acima a direita com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

(B) De quantas maneiras a figura a seguir a esquerda pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?

(C) De quantas maneiras a figura a seguir a direita pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?





Exercício 11. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – Nível 2 – Questão 18)
O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

Exercício 12. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 5)
Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

(A) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
(B) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
(C) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Exercício 13. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2016 – Nível 2 – Questão 5)
Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1ª posição seja maior do que 1, o da 2ª posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas 52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2.

(A) Se a senha de Fernanda começar com 9467, qual deve ser o algarismo da 5ª posição?
(B) Se Fernanda começar a formar sua senha escolhendo o algarismo 7 para a 5ª posição, quantas são as possibilidades de escolha para a 4.ª posição?
(C) Quantas senhas Fernanda poderá formar?

Solução do exercício 1. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2017 – Nível 1 – Questão 17)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2017.pdf
Podemos dividir o problema em dois casos: quando os dois 9´s aparecerem juntos ou quando eles ficarem separados.

Observe o esquema: __2__0__1__7__

No primeiro caso, podemos colocar dois 9´s juntos em qualquer dos espaços vazios. Neste caso obtemos 5 possibilidades. No segundo caso, escolhemos primeiramente um lugar para colocar o primeiro dos números 9 (5 possiblidades) e, a seguir, um lugar para colocar o segundo número 9 (4 possibilidades). Há nesse caso, então, 5 x 4 = 20 possibilidades; porém, como os dois números 9 são indistinguíveis, devemos dividir esse resultado por 2. Conclusão: há 10 possibilidades para o caso dos 9´s aparecerem separados. Logo, no total teremos 5 + 10 = 15 possibilidades.

Solução do exercício 2. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 9)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2005.pdf
Como há 22 times no campeonato e cada time só não enfrenta a si próprio, então ele joga 21 vezes (com os outros 21 times) em seu campo e mais 21 vezes nos campos dos adversários. No total, cada time disputa 21 + 21 = 42 partidas.

Solução do exercício 3. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 18)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2008.pdf
Para cada uma das camisas pretas e azul é possível escolher três camisas de cor diferente, num total de 3x3=9 possibilidades; notamos que estar com uma camisa preta de mangas curtas é diferente de estar com uma de mangas compridas. Para as camisas cinza e branca podemos escolher qualquer calça, num total de 2x4=8 possibilidades. Ao final, temos 9+8=17 possibilidades.

Uma outra maneira de resolver a questão é a seguinte: são 5 as possibilidades de escolha de camisas e quatro a de calças, logo, sem levar em conta as cores, há 5x4=20 modos de se vestir. Destes, devemos descontar os casos em que se repetem as cores de calça e camisa, que são apenas três: camisa preta de mangas compridas com calça preta, camisa preta de mangas curtas com calça preta e camisa azul com calça azul. Logo, são 20–3=17 maneiras diferentes de se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas.

Solução do exercício 4. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 1 – Questão 4)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2011.pdf

(A) Cristina pode preencher cada uma das três linhas do cartão de 6 maneiras diferentes; logo o número de maneiras de preencher o cartão é 6x6x6=216.

(B) Se os ratinhos escolhem casinhas diferentes, então o primeiro tem 6 escolhas possíveis, o segundo tem 5 escolhas possíveis e o terceiro tem 4. Logo o número de maneiras em que Cristina pode preencher o cartão é 6x5x4=120.

(C) Há três pares de ratinhos: ML, MT e LT. Para preencher o cartão, Cristina deve escolher uma destas três possibilidades, em seguida ela deve escolher uma das seis casinhas para esses dois ratinhos a ocuparem e finalmente ela deve escolher uma casinha diferente para o terceiro ratinho. Logo o número de cartões possíveis neste caso é igual a 3x6x5=90.

Solução do exercício 5. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2005 – Nível 1 – Questão 15)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2005.pdf
Os números da rifa comprados por Marcelo possuem quatro algarismos sendo que exatamente três deles são iguais a 7 e o outro algarismos é diferente de 7 e de 0. Observe primeiramente que existem 4 possíveis lugares para esse algarismo diferente aparecer: **777x**, **77x7**, **7x77** ou **x777**. Então para formar um desses números de rifa, primeiramente devemos escolher uma dessas quatro possibilidades e em seguida escolher uma das oito possibilidades para **x**, uma vez que ele deve ser diferente de 7 e de 0. Portanto Marcelo comprou 4x8=32 números de rifa.

Solução do exercício 6. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 16)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2012.pdf
Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequências de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3. Vamos contar separadamente os casos em que o número possui exatamente um algarismos 2, ou o número possui exatamente dois algarismos 2, ou o número possui exatamente três algarismos 2.

- Números com exatamente um algarismos 2. Esses números são da forma **2xx** ou **x2x** ou **xx2** em que **x** é qualquer algarismos diferente de 3 e de 2. Portanto o algarismo **x** pode ser escolhido de oito maneiras diferentes. Pelo princípio multiplicativo existem 3x8x8=192 desses números.
- Números com exatamente dois algarismos 2. Esses números são da forma **22x** ou **2x2** ou **x22** em que **x** é qualquer algarismos diferente de 3 e de 2. Portanto o algarismo **x** pode ser escolhido de oito maneiras diferentes. Pelo princípio multiplicativo existem 3x8=24 desses números.

- Existe apenas o número **222** com exatamente três algarismos 2.

Somando obtemos um total de 192+24+1=217 possibilidades.

Solução do exercício 7. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2009 – Nível 1 – Questão 5)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2009.pdf

Figura 1. Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de 3x2x1=6 maneiras diferentes.

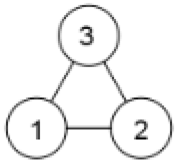
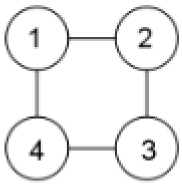


Figura 2. Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

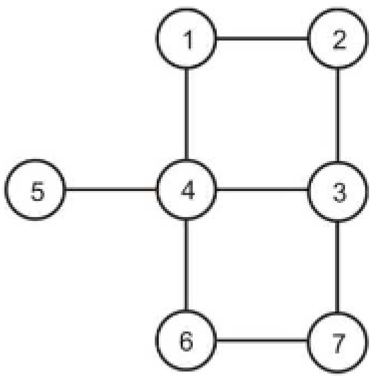


1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é 3x2x2=12.

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é 3x2x1=6.

No total, a figura 2 pode ser pintada de 12+6=18 maneiras diferentes.

Figura 3. As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e, portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ela tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos 18x2=36 possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos.



1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos 1x2=2 possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade.

No total, há 36x2 + 36x1 = 108 maneiras diferentes de pintar a figura 3.

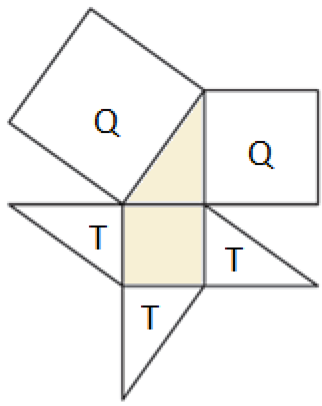
Solução do exercício 8. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2011 – Nível 2 – Questão 5)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2011.pdf

a) Podemos resolver alguns problemas de contagem através da listagem explicita de todas as possibilidades. No caso deste item, as possibilidades de cores para o quadrado e o triângulo são respectivamente: (azul, vermelho), (azul, amarelo), (vermelho, azul), (vermelho, amarelo), (verde, azul), (verde, vermelho) e (verde, amarelo). Portanto a primeira figura pode ser colorida de 7 maneiras diferentes. Observamos que estas 7 possibilidades serão utilizadas no item c.

b) Observe que os quadrados fazem fronteira apenas com o triângulo central. Deste modo, se sabemos qual é a cor do triângulo central, cada um dos três quadrados pode ser pintado com a mesma quantidade de possibilidades.
   - Se o triângulo está colorido de azul, então cada quadrado pode ser colorido de duas maneiras: vermelho ou verde. Aqui obtemos 2x2x2=8 possibilidades.
   - Se o triângulo está colorido de vermelho, então cada quadrado pode ser colorido de duas maneiras: azul e verde. Aqui obtemos 2x2x2=8 possibilidades.
   - Se o triângulo está colorido de amarelo, então cada quadrado pode ser colorido de três maneiras: azul, vermelho ou verde. Aqui obtemos 3x3x3=27 possibilidades.

   Então, ao todo, a segunda figura pode ser colorida de 8+8+27=43 possibilidades.

c) Observe que cada um dos quadrados indicados com a letra Q só faz fronteira com o triângulo sombreado. Daí a cor deste triângulo define quantas são as possibilidades de cores para os quadrados Q. Do mesmo modo, observe que cada um dos triângulos indicados com a letra T só faz fronteira com o quadrado sombreado. Daí a cor deste quadrado define de quantas maneiras cada um destes triângulos pode ser colorido. Daí podemos fazer uma contagem separando as 7 possibilidades de cores para o triângulo e o quadrado sombreado.

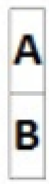


		Quantidade de possibilidades		
Triângulo sombreado	**Quadrado sombreado**	**Quadrados Q**	**Triângulos T**	**Total de possibilidades**
azul	vermelho	2	2	$2^2 \times 2^3 = 32$
	verde	2	3	$2^2 \times 3^3 = 108$
vermelho	azul	2	2	$2^2 \times 2^3 = 32$
	verde	2	3	$2^2 \times 3^3 = 108$
amarelo	azul	3	2	$3^2 \times 2^3 = 72$
	vermelho	3	2	$3^2 \times 2^3 = 72$
	verde	3	3	$3^2 \times 3^3 = 243$

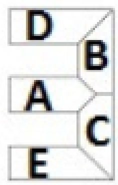
Portanto existem $32 + 108 + 32 + 108 + 72 + 72 + 243 = 667$ maneiras diferentes de coloração da terceira figura.

Solução do exercício 9. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 2 – Questão 5)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2012.pdf

(A) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de 3x2=6 maneiras distintas.

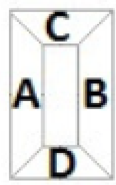


(B) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C. A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há 3x2x1x2x2=24 maneiras distintas para pintar o algarismo 3.



(C) Vamos distinguir dois casos.

- As cores de A e B coincidem. Neste caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de 3x2x2=12 maneiras distintas.
- As cores de A e B são diferentes. Neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de 3x2x1x1=6 maneiras distintas.



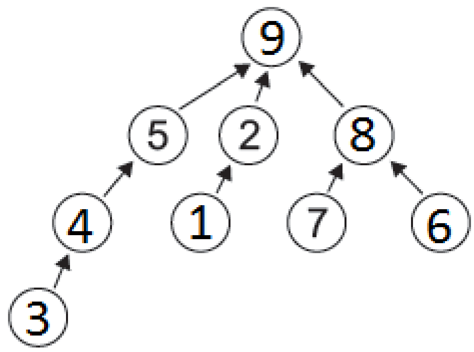
Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de 12+6=18 maneiras distintas.

(D) O algarismo dois pode ser colorido de 12 maneiras. O algarismo zero pode ser colorido de 18 maneiras. O algarismo um pode ser colorido de 6 maneiras. E o algarismo três pode ser colorido de 24 maneiras. Pelo princípio multiplicativo, o número 2013 pode ser colorido de 12×18×6×24=31104 maneiras distintas.

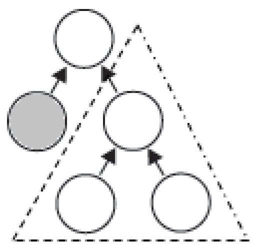
Solução do exercício 10. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2008 – Nível 1 – Questão 5)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2008.pdf

(A) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como demonstramos a seguir.

- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.



(B) 1ª solução: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à direita. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das duas maneiras ilustradas a seguir.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

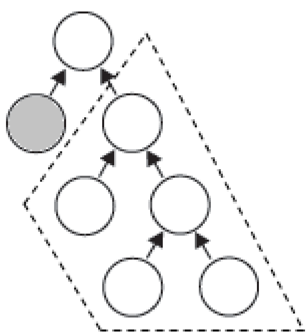
Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

(B) 2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é 2 + 6 = 8 .

(C) 1ª solução: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. Na figura a seguir, a casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (B) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:



- preenchemos o círculo do topo com o 7: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6: 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.

(C) 2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então

- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (B), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (B). Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de 8 + 40 = 48 maneiras diferentes.

Solução do exercício 11. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – Nível 2 – Questão 18)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2014.pdf

Vamos fazer essa contagem pensando em colocar os algarismos na unidade, dezena, centena e unidade de milhar do número. Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo zero não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para se colocar o algarismo zero. Colocado o zero sobram então três posições para se colocar o algarismo ímpar, e como há cinco algarismos ímpares, temos um total de 3×5=15 possibilidades para se colocar o algarismo ímpar no número. Colocado o algarismo zero e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há apenas 4 possibilidades de escolha: 2, 4, 6 e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos assim 3×4=12 possibilidades de se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número. Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é 3×15×12=540.

Solução do exercício 12. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 5)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2012.pdf

(A) O número 9 pode ser escrito como soma de duas parcelas inteiras positivas de quatro maneiras diferentes: 1+8, 2+7, 3+6 ou 4+5. Como a ordem em que os cartões são escolhidos não altera sua soma, segue que Vítor pode escolher dois cartões azuis cujos números somam 9 de 4 maneiras diferentes.

(B) Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um par de cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9. Os números desses cartões podem ser escolhidos de 4 maneiras diferentes, como vimos no item anterior. Para cada um desses pares, a cor do cartão com o menor número pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes, bem como a cor do cartão com o maior número; no total, as cores dos cartões de um par podem ser escolhidas de 3x3=9 maneiras diferentes. Como são 4 pares, o número total de escolhas é 4x9=36.

(C) Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um trio de cartões cuja soma seja igual a 9. Quanto aos números, há sete possibilidades para esses trios:

1+1+7, 1+2+6, 1+3+5, 1+4+4, 2+2+5, 2+3+4, 3+3+3.

Observamos que esses trios são de três tipos diferentes:

1º tipo: cartões com os três números iguais: 3+3+3.
2º tipo: cartões com os três números diferentes: 1+2+6, 1+3+5, 2+3+4.
3º tipo: cartões com dois números iguais e o outro diferente: 1+1+7, 1+4+4, 2+2+5.

- Há uma única maneira de escolher cartões para o 1º tipo, a saber, pegar o cartão de número três de cada uma das três cores existentes.
- Para os trios do 2º tipo, cada um dos números pode aparecer em qualquer uma das cores. Neste caso, há 3x3x3=27 maneiras de escolher um desses trios. Como são 3 trios, o total aqui é 3x27=81 possibilidades.
- Para um trio do 3º tipo, devemos escolher duas cores distintas para os números repetidos, o que pode ser feito de 3 maneiras (AB, AV e BV) e depois uma cor qualquer para o número diferente, o que pode ser feito de 3 maneiras. Neste caso, o total de possibilidades é 3x3=9. Como são 3 trios desse tipos obtemos 3x9=27 possibilidades.

Finalmente, o número total de possibilidades é a soma das possibilidades de cada caso, ou seja, 1+81+27=109.

Solução do exercício 13. (Prova da 2ª fase da OBMEP 2016 – Nível 2 – Questão 5)
http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2016.pdf

(A) Os possíveis algarismos para a 5ª posição são 6, 7, 8, 9. Como 6, 7 e 9 já foram escolhidos, podemos apenas escolher o algarismo 8 para a 5ª posição.

(B) Os possíveis algarismos para a 4ª posição são 5, 6, 7, 8, 9. Entretanto, como o 7 já foi utilizado na 5ª posição, sobram apenas as possibilidades 5, 6, 8 ou 9 para a 4ª posição. Portanto a 4ª posição pode ser preenchida de quatro possibilidades.

(C) Observamos primeiramente que há 4 possibilidades de escolha para a 5ª posição. Estas possibilidades são 6, 7, 8, 9. Feita uma dessas escolhas, vemos que há somente 4 possibilidades de escolha para a 4ª posição. De fato, o item (B) ilustra o que ocorre se o algarismo 7 ocupasse a 5ª posição e, é claro, o mesmo ocorre se 6, 8 ou 9 ocupar a última posição. Em cada um dos casos, há 4 possibilidades para a 4ª posição.

Feitas as escolhas das duas últimas posições, vemos também que há 4 escolhas para a terceira posição: das possibilidades 4, 5, 6, 7, 8, 9 devemos excluir duas escolhas já feitas.

Utilizando exatamente o mesmo raciocínio, teremos também 4 escolhas para a segunda posição e 4 escolhas para a primeira posição.

Pelo princípio multiplicativo, há $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ senhas diferentes que Fernanda poderá formar.

--- FIM ---