Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N2 – CICLO 4 – ENCONTRO 1

Assuntos a serem abordados:

- Múltiplos, divisores e primos.
- Algoritmo de Euclides: MDC e MMC.

A referência que segue será nossa fonte principal de apoio para *Múltiplos, divisores e primos; Algoritmo de Euclides: mdc e mmc:*

- Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar. http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf

Complementa está referência a seguinte:

- Capítulos 4, 7, 11, 13, 15 e 16 do livro "Círculos de Matemática da OBMEP".

Recomendamos fortemente que sejam assistidas as videoaulas e sejam baixados todos os materiais teóricos do Portal do Saber OBMEP nos seguintes links

- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: múltiplos e divisores – material teórico: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/k2sgczml2e8k4.pdf
- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: critérios de divisibilidade – material teórico: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfuewdw2kdcg4.pdf
- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: mdc e mmc – material teórico, parte I: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8ex39lt2qn8kw.pdf
- 6ª série – Módulo: divisibilidade – Aula: mdc e mmc – material teórico, parte II: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/543nomntcq4o0.pdf
- 8ª série - Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana: (Divisibilidade e o Teorema da Divisão Euclidiana) https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=33

A seguir estamos disponibilizando uma lista com 12 exercícios. O professor deverá discutir esses exercícios com seus alunos, acompanhando e auxiliando no entendimento das estratégias de resoluções apresentadas pelos alunos. É importante incentivar o envolvimento coletivo de todos nessas discussões das resoluções, cabendo ao professor enfatizar e aprofundar os conhecimentos matemáticos associados às questões apresentadas. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, então cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Nesse sentido, os materiais de apoio indicados serão elementos auxiliares importantes.

Exercício 1. No número 6a78b, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se x = 6a78b for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?

Exercício 2. O múltiplo irado de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

(a) Qual é o múltiplo irado de 20?

(b) Qual é o múltiplo irado de 9?

(c) Qual é o múltiplo irado de 45?

(d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Exercício 3. O dobro de um número, quando dividido por 5, deixa resto 1. Qual é o resto da divisão deste número por 5?

Exercício 4. (a) A soma de quatro inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

(b) A soma de três inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

Exercício 5. A soma de dois números primos a e b é 34 e a soma dos primos a e c é 33. Quanto vale a + b + c?

Exercício 6. Laura e sua avó Ana acabaram de descobrir que, no ano passado, suas idades eram divisíveis por 8 e que, no próximo ano, serão divisíveis por 7. Vovó Ana ainda não é centenária. Qual a idade de Laura?

Exercício 7. Se $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ e $b = 2^3 \cdot 5^2$, liste todo os divisores comuns de a e de b. Em seguida, determine o mdc (a, b).

Exercício 8. Dois ciclistas correm numa pista circular e gastam, respectivamente, 30 segundos e 35 segundos para completar uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo os dois atletas se encontram, pela primeira vez, no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas? E o menos veloz? Depois de quanto tempo da largada ocorrerá o encontro?

Exercício 9. Durante uma liquidação, duas amigas compraram todas as peças que acharam em uma barraquinha, gastando, respectivamente, R$ 375,00 e R$ 405,00. Se todas as peças tinham o mesmo preço, qual a quantidade mínima de peças que tinha na barraquinha?

Exercício 10. Determine o número natural n tal que o $mmc(n, 6) = 30$ e tal que o resto da divisão de n por 6 deixa resto 3.

Exercício 11. Determine o menor número inteiro positivo n tal que n deixa resto 1 quando dividido por 156 e n também deixa resto 1 quando dividido por 198.

Exercício 12. Qual o Máximo Divisor Comum entre os números 1221, 2332, 3443, 4554, ..., 8998?

Solução do Exercício 1. (Banco de Questão 2010, Nível 1, problema 136)

Como o número x é múltiplo de 45 = 5 x 9, ele também é um múltiplo de 5 e de 9. Todos os múltiplos de 5 terminam em 0 ou em 5. Daí o número procurado tem a forma x = 6a780 ou a forma x = 6a785.

Agora vamos achar o algarismo a, sabendo que para ser múltiplo de 9 a soma dos algarismos de x deve ser um múltiplo de 9.

Se x = 6a780 então 6+a+7+8+0 = 21+a deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é 21+a = 27 donde a = 6 e x = 66780.

Se x = 6a785 então 6+a+7+8+5 = 26+a deve ser um múltiplo de 9. A única possibilidade é 26+a = 27 donde a = 1 e x = 61785.

Portanto o número procurado é x = 66780 ou x = 61785.

Solução do Exercício 2. (Prova da OBMEP 2011 - N2Q3 – 2ª fase)

a) Os primeiros múltiplos naturais de 20 são 20, 40, 60, 80 e 100. Logo o múltiplo irado de 20 é 100.

b) Se os algarismos de um número divisível por 9 são apenas 0 e 1, nesse número devem aparecer pelo menos nove algarismos 1. Para que esse múltiplo seja o menor possível, ele deve ter o menor número de algarismos possível; logo o múltiplo irado de 9 é 111111111.

c) Um múltiplo de 45 é múltiplo de 5 e 9; logo seu algarismo das unidades é 0 ou 5 e a soma de seus algarismos é divisível por 9. Como múltiplos irados são formados apenas pelos algarismos 0 e 1, segue que o múltiplo irado de 45 deve ter 0 como algarismo das unidades; logo esse múltiplo é 1111111110.

d) O número 1110 é o menor número que tem apenas os algarismos 0 e 1 e é, ao mesmo tempo, múltiplo de 3, pois a soma de seus algarismos é 3, e múltiplo de 2, pois seu último algarismo é 0. Logo 1110 é o múltiplo irado de 6. Como os múltiplos irados de 1, 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente, 1, 10, 111, 100 e 10, segue que o menor número cujo múltiplo irado é 1110 é 6.

Solução do Exercício 3. (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 224)

Sabemos que o número inteiro n procurado satisfaz 2n =5m+1, para algum inteiro m. Então o produto 5m = 2n-1 de 5 por m é ímpar, o que implica que m é ímpar. Assim, m = 2k + 1, para algum inteiro k e, portanto,

2n = 5m + 1 = 5(2k + 1) + 1 = 10k + 6 = 2(5k + 3); ou seja, n = 5k + 3 deixa resto 3 na divisão por 5.

Solução do Exercício 4. (Banco de Questões 2011, nível 2, problema 44)

Solução do item (a):

Seja x o menor dos números. Então, a soma em questão é

$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 4x + 6 = 2(x + 3)$:

Este número é par maior que 2, portanto não pode ser um número primo.

Solução do item (b):

Seja y o menor dos números. Então, a soma em questão é

$y + (y + 1) + (y + 2) = 3y + 3 = 3(y + 1)$:

Este número é múltiplo de 3 e maior que 3, logo não pode ser um número primo.

Solução do Exercício 5. (Círculos de Matemática da OBMEP, problema 11.1, pg. 90)

Como $a + b = 34$ é um número par, ou a e b são pares, ou são ambos ímpares. Como o único primo par é 2, teríamos $a + b = 4$, portanto a e b são ímpares. Com a mesma análise verificamos que, como $a + c = 33$, então um dos números é par e o outro é ímpar, e como anteriormente verificamos que a é ímpar, então c é um número primo par, logo $c = 2$, portanto: $a+c = 33$, $a+2 = 33$, $a = 31$. Substituindo na outra equação temos: $a + b = 34$, $31 + b = 34$, $b = 3$. Finalmente, $a + b + c = 31 + 3 + 2 = 36$.

Solução do Exercício 6. (Banco de Questões 2010, nível 1, problema 223)

No próximo ano, Laura e sua avó estarão dois anos mais velhas do que no ano passado. Logo, suas idades no ano passado são múltiplos de 8 que, somados com 2, dão múltiplos de 7. Procuremos esses números.

múltiplos de 7 : 7 14 21 28 35 42 49 56 63 . . . 98 . . .

(múltiplos de 7) − 2 : 5 12 19 26 33 40 47 54 61 . . . 96 . . .

Note que 40 e 96 são os únicos múltiplos de 8 menores do que 100 que aparecem na segunda linha. Como Vovó Ana tem menos do que 100 anos, podemos concluir que ano passado ela tinha 96 anos e Laura 40. Logo, a idade atual de Laura é 41 anos.

Solução do Exercício 7 (Encontros de Aritmética, Exemplo 35, pg. 53 e 54)

Se d é um divisor de a, os únicos fatores primos de d são 2, 3 ou 5. Se d é um divisor de b, os únicos fatores primos de d são 2 ou 5. E, se d é um divisor comum de a e b, fazendo a interseção, vemos que os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Assim $d = 2^x \cdot 5^y$. O número x não pode ser maior que 2 e 3, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações de a e de b. Logo, no máximo podemos pegar x=2. De modo análogo, o número y não pode ser maior que 1 e 2, expoentes do fator primo 5 nas fatorações de a e de b e assim, no máximo podemos pegar y=1. Assim, vemos que x $\in\{0,1,2\}$ e y $\in\{0,1\}$. Fazendo todas as possibilidades, podemos listar os divisores comuns de a e de b.

x=0 e y=0 $\Rightarrow$ $d=2^0 \cdot 5^0 = 1$.
x=0 e y=1 $\Rightarrow$ $d=2^0 \cdot 5^1 = 5$.
x=1 e y=0 $\Rightarrow$ $d=2^1 \cdot 5^0 = 2$.
x=1 e y=1 $\Rightarrow$ $d=2^1 \cdot 5^1 = 10$.
x=2 e y=0 $\Rightarrow$ $d=2^2 \cdot 5^0 = 4$.
x=2 e y=1 $\Rightarrow$ $d=2^2 \cdot 5^1 = 20$.

Desta lista de divisores comuns vemos que mdc(a,b)=20.

Solução do Exercício 8 (Encontros de Aritmética, Exercício 5, pg. 70)

O atleta mais veloz passará pela linha de largada pela primeira vez após 30 segundos, pela segunda vez após 60 segundos, pela terceira vez após 90 segundos, e assim por diante. Ou seja, este atleta passará pela linha de largada nos instantes que são múltiplos de 30, os quais denotamos por

M(30) = {30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360, ...}.

De modo análogo vemos que o outro atleta passará pela linha de largada nos instantes que são múltiplos de 35, ou seja,

M(35) = {35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315, 350, 385, 420, ...}.

Portanto, eles estarão juntos na linha de largada em todos os instantes que são múltiplos comuns de 30 e de 35. Como queremos o primeiro instante que isto vai ocorrer, identificamos este instante como o menor múltiplo comum de 30 e de 35. Analisando os conjuntos M(30) e M(35) vemos que o menor número que aparece nestes dois conjuntos é o 210. Portanto, os dois atletas vão se encontrar pela primeira vez na linha de largada após 210 segundos de dada largada, ou seja, após 3 minutos e 30 segundos. Neste instante o atleta mais veloz estará completado 210/30 = 7 voltas, enquanto o outro atleta estará completando 210/35 = 6 voltas.

Observações: Usamos a notação M(n) para descrever o conjunto dos múltiplos inteiros positivos do número natural n. Por exemplo, os múltiplos de 3 são 3, 6, 9, 12, etc., e denotamos por M(3) = {3, 6, 9, 12, ...}. Além disso, o menor número que aparece nos dois conjuntos M(30) e M(35) é 210 e este número recebe um nome especial, ele é o Mínimo Múltiplo Comum entre 30 e 35 e é denotado por $mmc(30, 35)$.

Solução do Exercício 9:

Vamos chamar de p o preço de cada uma das peças. Observe que, pelo enunciado, não sabemos se p é um número inteiro ou não. Assim, devemos resolver o problema sem utilizar esta hipótese. Se uma das amigas comprou n peças e se a outra amiga comprou m peças, então np=375 e mp=405, de modo que mnp=375m=405n. Como queremos saber a quantidade, n+m, mínima de peças existentes na barraquinha, queremos resolver a equação 375m=405n para os menores valores possíveis (inteiros) de m e n. Isto significa que o número 375m=405n é o menor múltiplo comum de 375 e de 405, que é mmc(375,405)=10125. Daí obtemos 375m=405n=10125 e, portanto, m=10125/375=27 e n=10125/405=25. Portanto a menor quantidade de peças existentes na barraquinha era de 27+25=52. Observe que o preço de cada peça é igual a 375/25= 405/27= 15 reais.

Solução do Exercício 10:

Decompondo em fatores primos obtemos $30 = 2 \times 3 \times 5$. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, como o resto da divisão de n por 6 tem resto 3, então podemos escrever $n = 6q + 3$, para algum número natural q. Logo, obtemos que $n = 3(2q + 1)$. Como $mmc(n, 6) = 2 \times 3 \times 5$ e como 3 já aparece na decomposição de n, temos três possibilidades:

$$2q + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad 2q + 1 = 5 \quad \text{ou} \quad 2q + 1 = 2 \times 5 = 10.$$

A primeira equação $2q + 1 = 2$ resulta em $q = \frac{1}{2}$ que não é um número natural. A terceira equação também resulta em um número não natural, a saber, $q = \frac{9}{2}$. Nos resta somente a segunda equação cuja solução é $q = 2$, de onde obtemos que $n = 6 \times 2 + 3 = 15$.

Observe que a possibilidade $q = 0$ foi descartada, pois neste caso teríamos $n = 3$ e $mmc(3, 6) = 6$ não corresponde a situação proposta na questão.

Solução do Exercício 11 (Encontros de Aritmética, Exercício 28, pg. 88)

Como n deixa resto 1 quando dividido por 156 temos que n tem a forma $n = 156a + 1$. Além disso, como n deixa resto 1 quando dividido por 198, n tem a forma $n = 198b + 1$. Assim vemos que $n - 1 = 156a$ e $n - 1 = 198b$ e, portanto, $n-1$ é um múltiplo comum de 156 e de 198. Como queremos encontrar o menor tal número n, podemos então concluir que n − 1 é o mínimo múltiplo comum de 156 e 198. Usando o dispositivo prático para a fatoração sucessiva obtemos:

156 , 198	2
78 , 99	2
39 , 99	3
13 , 33	3
13 , 11	11
13 , 1	13
1 , 1	1

Logo, $n-1 = mmc(156, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 13 = 5148$ e, portanto, $n = 5149$.

Solução do Exercício 12. (Círculos de Matemática da OBMEP, problema 16.3, pg. 152)

Sendo d o MDC destes números, temos que a diferença entre 1221 e 2332 é 1111, ou seja, 2332 = 1221 + 1111. Na verdade, a diferença entre dois números consecutivos da sequência é 1111. Portanto d = mdc(1221; 2332) = mdc(1221; 2331 - 1221) = mdc(1221; 1111). Como 1111 = 11 x 101 e ambos os fatores são primos, 101 não divide 1221, mas 11 divide todos os 8 números, 11 é o MDC procurado.

Assuntos a serem estudados:

- Razões e proporções;
- Função Afim: interpretações de gráficos de funções afins e tabelas.

Recomendamos fortemente que sejam assistidas as videoaulas e sejam baixados todos os materiais teóricos do módulo razões e proporções da 7ª série do Portal do Saber OBMEP. Ver links:

- 7ª série – Módulo Razões e Proporções – A Noção de Razão e Exercícios – material teórico: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bzl4vx6dr7s4c.pdf

- 7ª série – Módulo Razões e Proporções – Proporções e Conceitos Relacionados – material teórico: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf

- 7ª série – Módulo Razões e Proporções – Propriedades de Proporções – material teórico: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf

A referência que segue será nossa fonte principal de apoio para o estudo da função afim:

- 9ª série – Função Afim – Noções Básicas – material teórico: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brc70d5silssg.pdf

- 9ª série – Função Afim – Resolução de Exercícios – Videoaulas: 72, 73, 74 e 75 https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=35#

A seguir estamos disponibilizando uma lista com 12 exercícios. O professor deverá discutir esses exercícios com seus alunos, acompanhando e auxiliando no entendimento das estratégias de resoluções apresentadas pelos alunos. É importante incentivar o envolvimento coletivo de todos nessas discussões das resoluções, cabendo ao professor enfatizar e aprofundar os conhecimentos matemáticos associados às questões apresentadas. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, então cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Nesse sentido, os materiais de apoio indicados serão elementos auxiliares importantes.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – ciclo 4 – Encontro 2
ENUNCIADOS

Exercício 1: Uma certa mistura de concreto é feita de cimento, areia e terra, na razão de 1: 3: 5 por quilo. Determine a quantidade, em quilos, dessa mistura que pode ser feita com 5 quilos de cimento.

Exercício 2: Rodrigo comprou três cadernos iguais em uma promoção na qual o segundo e o terceiro cadernos eram vendidos, respectivamente, com 20% e 40% de desconto sobre o preço de venda do primeiro caderno. No dia seguinte, terminada a promoção, Gustavo comprou três cadernos iguais aos de Rodrigo, todos sem desconto. Percentualmente, quanto Rodrigo pagou a menos que Gustavo?

Exercício 3: Dona Filó deseja fazer 2, 6kg de biscoitos com três ingredientes: manteiga, açúcar e farinha, os quais devem estar na proporção de (6: 4: 3). Determine, a quantidade, em gramas, de farinha que ela deve usar.

Exercício 4: Alberto, Bernardo e Carlos disputaram uma corrida na qual cada um deles correu com velocidade constante durante todo o percurso. Quando Alberto cruzou a linha de chegada, Bernardo e Carlos estavam 36 e 46 metros atrás dele, respectivamente. Quando Bernardo cruzou a linha de chegada, Carlos estava 16 metros atrás dele. Determine o comprimento da pista.

Exercício 5: Na cidade de Trocalândia, 20% dos gatos pensam que são cachorros e 25% dos cachorros pensam que são gatos. Certo dia, um psicólogo veterinário resolve testar todos os gatos e cachorros de Trocalândia, verificando que 30% do total pensava ser gato. Que proporção dos animais testados era de cães?

Exercício 6: Dois copos de suco, de mesmo volume, foram feitos a partir de uma mistura de água e polpa de fruta. No primeiro copo, a razão entre a polpa e a água utilizadas foi igual a 1:2, enquanto no segundo copo esta mesma razão foi de 3:4. Ao misturarmos estes dois copos em uma jarra, qual será a razão entre polpa e água?

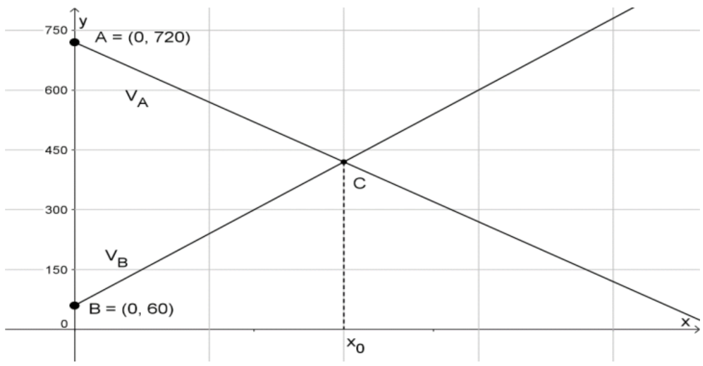
Exercício 7. (OBMEP 2011 – 1ª fase – N2Q15) Alvino está a meio quilômetro da praia quando começa a entrar água em seu barco, a 40 litros por minuto. O barco pode suportar, no máximo, 150 litros de água sem afundar. A velocidade do barco é 4 quilômetros por hora. Em média, no mínimo, quantos litros de água por minuto Alvino deve tirar do barco para chegar à praia?

Exercício 8: Admita que uma locadora de automóveis A aluga um modelo popular ao preço de R$50,00 a diária, mais R$1,00 por quilômetro rodado e que uma outra locadora B aluga o mesmo modelo de carro ao preço de R$80,00 a diária, mais R$0,75 por quilômetro rodado.
(a) Escreva as funções que descrevem, para cada locadora, o valor a ser pago de aluguel em função do número de diárias n e da quantidade de quilômetros rodados x;

(b) Um representante comercial irá visitar algumas cidades de uma região num período de 5 dias. Qual a menor distância percorrida (quilometragem) para que a opção pela locadora B seja mais vantajosa (de menor ou igual custo)?

Exercício 9: Seja P um ponto fora de uma reta r e sejam, também, A e B pontos da reta r. A área do triângulo PAB de base $\overline{AB}$ é proporcional ao comprimento AB da base. Qual o fator de proporcionalidade?

Exercício 10: O reservatório A fornece água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B recebe água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.



Exercício 11: Os preços dos ingressos de um teatro nos setores 1, 2 e 3 seguem uma função polinomial do primeiro grau crescente com a numeração dos setores (função afim com taxa de variação positiva). Se o preço do ingresso no setor 1 é de R $ 120, 00 e no setor 3 é de R$ 400, 00, então qual o preço do ingresso no setor 2?

Exercício 12: Um experimento de Agronomia mostra que a temperatura média da superfície do solo t(x), em °C, é determinada em função do resíduo x, de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela seguinte.

x[g/m^2]		10	20	30	40	50	60	70
t(x) [°C]		7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Qual a lei de formação da função t(x)?

Solução Exercício 1 (Banco de Questões 2007, Nível 1, questão 4, página 43)

De acordo com os dados do problema, misturamos 1 kg de cimento com 3 kg de areia e 5 kg de terra. Pelo conceito de proporção isso equivale a misturar 5 kg de cimento com 15 kg de areia e 25 kg de terra, e essa mistura pesa 5 + 15 + 25 = 45 kg.

Solução do Exercício 2 (Portal do Saber OBMEP, 7ª série – Módulo Razões e Proporções Vídeo Aula 63, https://youtu.be/bO2Nw0Ud6MI)

Se P é o preço de um caderno, Rodrigo pagou pela sua compra

$$P+\frac{80}{100}P+\frac{60}{100}P=\frac{100P+80P+60P}{100}=\frac{240}{100}P$$

enquanto que Gustavo, no dia seguinte, pagou 3P. Portanto, Rodrigo pagou

$$3\cdot P-\frac{240}{100}P=\frac{60}{100}P$$

a menos que Gustavo. Assim, para saber percentualmente quanto Rodrigo pagou a menos do que Gustavo, fazemos a regra de três

3P ____ 100%

0,6P ____ x%

Logo, $x=\frac{60}{3}=20\%$, ou seja, Rodrigo pagou 20% a menos que Gustavo.

Solução do Exercício 3:

Sejam x, y e z as quantidades (em gramas) de manteiga, açúcar e farinha (respectivamente) utilizadas para fazer os biscoitos. Do conceito de proporção, sabemos que

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}.$$

Além disso, pela propriedade $\frac{u}{v}=\frac{a}{b}=\frac{u+a}{v+b}$, obtemos que

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{x+y}{6+4}$$

de sorte que

$$\frac{z}{3} = \frac{x+y}{6+4} = \frac{x+y}{10}.$$

Utilizando mais uma vez esta mesma propriedade, obtemos:

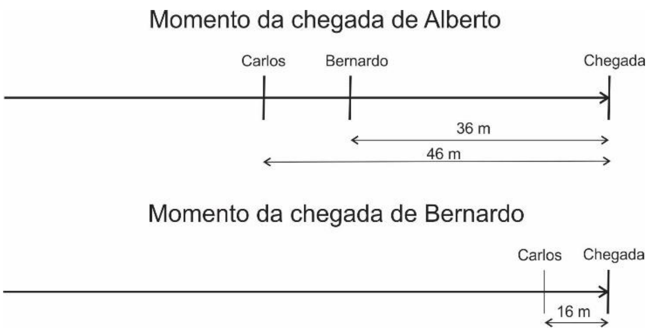
$$\frac{z}{3} = \frac{x+y}{6+4} = \frac{x+y+z}{10+3}.$$

Agora, como 2, 6kg é o mesmo que 2600g, temos x + y +z = 2600. Daí a última igualdade acima fornece

$$\frac{z}{3} = \frac{2600}{13} \Rightarrow z = 600.$$

Solução do Exercício 4: (Banco de Questões 2012, Nível 3, questão 10, página 43)

Seja x o comprimento em metros da pista. A distância entre Bernardo e Carlos era de 10 metros quando Alberto cruzou a linha de chegada, e era de 16 metros quando Bernardo cruzou a linha de chegada. Vemos assim que, durante o intervalo de tempo Δ no qual Alberto e Bernardo completaram a corrida, Bernardo correu 36 metros enquanto Carlos correu 30.



A razão entre as velocidades de Carlos e Bernardo é constante e, em particular, considerando esse intervalo de tempo Δ obtemos

$$\frac{Velocidade\ de\ Carlos}{Velocidade\ de\ Bernardo} = \frac{\frac{30}{\Delta}}{\frac{36}{\Delta}} = \frac{5}{6}.$$

Como Bernardo cruzou a linha de chegada 16 metros à frente de Carlos, considerando o tempo de prova de Bernardo, podemos escrever

$$\frac{5}{6} = \frac{x-16}{x}.$$

E, obtemos a equação $5x = 6(x-16)$, cuja solução é $x = 96$.

Solução do Exercício 5: (Banco de Questões 2013, Nível 2, questão 1, página 35)

Sejam C e G, respectivamente, o número de cães e gatos de Trocalândia. O número de gatos que pensam (sabem) que são gatos é $\frac{80}{100}G$ e o número de cachorros que pensam que são gatos é $\frac{25}{100}C$. Logo, o número total de animais que pensam que são gatos é

$$\frac{80G + 25C}{100}.$$

Segundo a pesquisa do psicólogo veterinário, da população total de animais, 30% pensam que são gatos, assim, devemos ter

$$\frac{80G + 25C}{100} = \frac{30}{100}(G + C)$$
$$\Rightarrow 80G + 25C = 30G + 30C$$
$$\Rightarrow 10G = C.$$

Portanto, a proporção de cães na população de animais é dada por

$$\frac{C}{C + G} = \frac{10G}{10G + G} = \frac{10}{11},$$

sendo esse valor a resposta final.

Solução do exercício 6. (Portal do Saber OBMEP – 7ª série – Módulo: razões e proporções – Aula: Proporções e conceitos relacionados – material teórico – exemplo 5)
Suponha que o volume de cada copo seja x. Segundo o enunciado, no primeiro copo, o volume de polpa seria $\frac{x}{3}$ e o volume de água $\frac{2x}{3}$. No segundo copo, o volume de polpa seria $\frac{3x}{7}$ e o volume de água $\frac{4x}{7}$. Ao misturarmos os dois copos teremos um volume de polpa igual a

$\frac{x}{3} + \frac{3x}{7} = \frac{7x}{21} + \frac{9x}{21} = \frac{16x}{21}$

Além disso, teremos um volume de água igual a

$\frac{2x}{3} + \frac{4x}{7} = \frac{14x}{21} + \frac{12x}{21} = \frac{26x}{21}$

Por fim, calculando a razão entre os volumes de polpa e de água encontrados acima, obtemos:
$\frac{\frac{16x}{21}}{\frac{26x}{21}} = \frac{16x}{21}\frac{21}{26x} = \frac{8}{13}.$

Solução do exercício 7. Alvino está a meio quilômetro da praia a uma velocidade de 4 quilômetros por hora. Sendo assim, ele precisa de 0,5÷4=0,125 horas, ou seja, 0,125×60=7,5 minutos, para alcançar a praia. Como a água entra no barco a 40 litros por minuto, até Alvino chegar à praia 40×7,5=300 litros de água terão entrado no barco. Como o barco suporta 150 litros sem afundar, Alvino terá que tirar 300-150=150 litros de água do barco em 7,5 minutos, ou seja, 150÷7,5=20 litros por minuto.

Solução do Exercício 8

item (a)

Denotemos por C_A e C_B os custos finais dos alugueis desse modelo de carro nas locadoras A e B, respectivamente. Temos:

C_A =50n+x e C_B =80n+0,75x

item (b)

Para um aluguel de cinco dias os custos finais passam a depender apenas da quilometragem percorrida, de acordo com as seguintes funções

$C_A = C_A$ (x)=50.5+x=250+x e $C_B = C_B$ (x)=80.5+0,75x=400+0,75x.

Assim, para que a locação na locadora B seja mais vantajosa (de menor ou igual custo) devemos ter

$400+0,75x \leq 250+x \Rightarrow 0,25x \geq 150$,

Portanto, a menor distância percorrida é x=600 km.

Solução do Exercício 9

É consequência da fórmula para área de um triângulo que tal área é proporcional à metade da medida da altura relativa à base $\overline{AB}$.

Solução do Exercício 10 (Portal do Saber OBMEP, 9ª série – Módulo Função Afim, – Resolução de Exercícios, Exercício 5, Videoaula 74)

https://youtu.be/lyJusL0Sm3Y

Os volumes são dados por funções afins da forma $V(x) = ax + b$, em que a é o coeficiente angular da função (taxa de variação) e $b = V(0)$ é o coeficiente linear.
Na figura, x_0 é o momento que os dois reservatórios estão com o mesmo volume V_0. Como A toca no eixo y em 720, então $b_A = 720$ e da interpretação do enunciado $a_A = -10$ então

$$V_A(x) = -10x + 720.$$

Analogamente, $b_B = 60$ e $a_B = 12$, então

$$V_B(x) = 12x + 60.$$

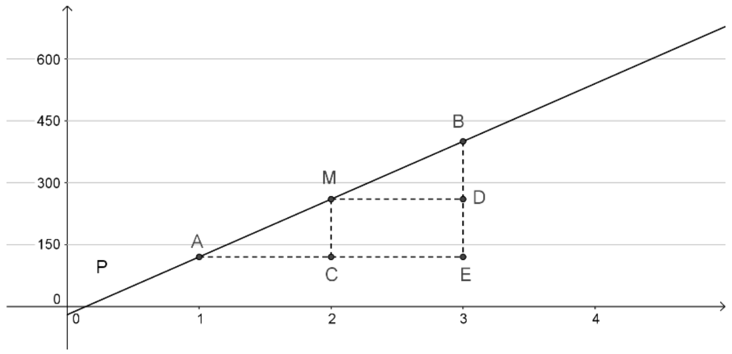
Queremos o x_0 tal que a igualdade é verificada

$$V_B(x_0) = 12x_0 + 60 = -10x_0 + 720 = V_A(x_0),$$

temos então $x_0(12 + 10) = 720 - 60 = 660$ que fornece $x_0 =$ 30 horas.

Solução do Exercício 11 (Portal do Saber OBMEP, 9ª série – Módulo Função Afim, – Resolução de Exercícios, Exercício 14, Videoaula 75)

https://youtu.be/lO3M22KbclM



Se $P(x) = ax + b$ é a relação do preço P em função do setor x, então $P(1) = 120$, $P(3) = 400$ e busca-se o valor de $P(2)$. Fazendo uma análise geométrica do gráfico e usando a congruência dos triângulos ACM e MDB teremos

$$\frac{P(2) - P(1)}{2-1} = a = \frac{P(3) - P(2)}{3-2}$$

Logo, ficamos com $P(2) = \frac{P(3)+P(1)}{2} = \frac{120+400}{2} = 260$ reais.

Solução do Exercício 12 (Portal do Saber OBMEP, 9ª série – Módulo Função Afim, – Resolução de Exercícios, Exercício 12, Videoaula 75)

A taxa de variação da temperatura é $\frac{0,6}{10}$ = 0, 06 $\frac{°C}{g/m^2}$. Para resíduo igual a zero, teríamos, pelo padrão dos valores da tabela, temperatura igual a 7, 24 - 0, 06 = 7, 18 °C. Assim, temos t(x) = 0,06x + 7, 18, para x real positivo.

OBSERVAÇÃO: NOVAMENTE REITERAMOS A NECESSIDADE DE INCENTIVAR OS ALUNOS A UTILIZAREM O PORTAL DO SABER OBMEP. NESSE AMBIENTE EXISTEM VIDEOAULAS, TEXTOS COMPLEMENTARES E LISTAS AUXILIARES DE QUESTÕES.