

## **Roteiro de Estudos OBMEP NA ESCOLA – 2018 Grupo N3 – Ciclo 1**



### **a) Introdução**

Com mais de 10 anos de tradição, a OBMEP é muito mais do que a aplicação de uma prova e a entrega de medalhas e menções honrosas para alguns estudantes. Hoje a OBMEP é um programa nacional com ações diversificadas que têm contribuído para a melhoria da qualidade do ensino de matemática no país da 6ª série do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio.

Para aumentar ainda mais o impacto da OBMEP na melhoria da qualidade do ensino da matemática no país, o desafio consiste em envolver cada vez mais as escolas, as secretarias de ensino, os professores e os alunos nas ações propostas pela OBMEP ao longo de todo o ano escolar e na ampliação da utilização dos materiais didáticos elaborados pela OBMEP: provas anteriores, bancos de questões, apostilas, livros, plataformas virtuais, etc.

Desde a sua primeira edição, muitos desses materiais são enviados para as escolas e também são disponibilizados na internet. A partir de 2014, através do Programa OBMEP na Escola, esta sendo oferecida uma formação de professores que utiliza esses próprios materiais e promove encontros para os professores estudarem matemática, trocarem experiências e tirarem suas dúvidas para se sentirem mais seguros e preparados para utilizarem os materiais da OBMEP e trabalharem com a metodologia do ensino de matemática através da resolução de problemas.

A formação que o professor recebe e o aprendizado que ele adquire participando do Programa OBMEP na Escola são uteis e trarão consequências positivas para todos os alunos de todas as salas de aula que esse professor trabalhar. Entretanto, a aplicação do programa, em horário diferenciado, na sua turma de 20 alunos convidados terá um impacto bem maior e o aprendizado desses alunos e do professor será muito mais intenso.

Através do Programa OBMEP na Escola, da utilização cada vez maior dos materiais e dos recursos didáticos da OBMEP, da formação dos professores e da ampliação da divulgação da OBMEP nas escolas, entre outros resultados, deseja-se que:

- O número de alunos participantes da primeira fase da OBMEP aumente;
- Também aumente a qualidade da participação dos alunos na primeira fase, com o aumento das notas obtidas pelos alunos;
- As escolas divulguem e, de algum modo, valorizem os alunos que foram aprovados para a segunda fase;
- As escolas promovam ações metodológicas, em colaboração com os Professores Habilitados, para garantirem um bom desempenho dos alunos classificados para a segunda fase da OBMEP;

- A escola incentive fortemente e promova ações para garantir que todos os alunos classificados façam a prova da segunda fase da OBMEP, diminuindo drasticamente a evasão nesta prova;
- As escolas realizem cerimônias regionais de premiação dos alunos que receberam medalhas ou menção honrosa;

## **b) Planejamento Acadêmico**

Em 2018, o Planejamento Acadêmico do Programa OBMEP na Escola prevê a realização de 7 ciclos de estudos com duração de três semanas cada um. A organização de cada ciclo é a seguinte:

- **1ª semana:** encontro de formação entre os coordenadores e os professores da Educação Básica que atuam no Programa OBMEP na Escola.
- **2ª semana:** (encontro 1) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.
- **3ª semana:** (encontro 2) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.

Na primeira semana de cada ciclo, organizado pelos Coordenadores, é realizado o encontro de formação dos Professores da Educação Básica. Fortemente recomendado para ser presencial, este encontro é uma oportunidade para um estudo dos conteúdos matemáticos propostos no ciclo, através da leitura e da análise do que está proposto para ser executado nos encontros com os alunos. Também devem ser abordadas nesse encontro as listas de exercícios que serão utilizadas pelos professores nas aulas para os alunos convidados nos encontros 1 e 2, realizados na segunda e na quarta semana do ciclo.

O encontro entre professores e coordenadores não deve ser utilizado unicamente para discussões de assuntos administrativos. Mais do que isso, este é um encontro para estudo de matemática, dos materiais disponibilizados pela OBMEP, das listas de exercícios, das apostilas, das videoaulas, etc. Espera-se que após este encontro de formação, cada professor da escola básica se sinta mais seguro e preparado para ministrar as aulas para a sua turma de alunos convidados e, mais ainda, se sinta confortável para utilizar os materiais da OBMEP nas suas aulas regulares.

## 1ª semana: encontro de formação (Coordenadores e professores)

No início de todos os ciclos, a primeira atividade que deve ser realizada é o encontro de formação entre professores e coordenadores. Nesse encontro que antecede as aulas que serão ministradas para os alunos, espera-se que sejam discutidos os conteúdos, os exercícios, as estratégias para o desenvolvimento dos estudos e os materiais de apoio ao ensino que foram disponibilizados. Dois aspectos fundamentais devem ser enfatizados nesse encontro:

- a metodologia a ser utilizada se baseia no ensino da matemática através da resolução de problemas. Assim, em cada roteiro de estudos são fornecidas listas de problemas, uma a cada aula, que devem ser trabalhadas junto aos alunos. Espera-se que ao longo desse trabalho uma discussão qualitativa sobre conceitos e resultados correlatos aos assuntos em foco seja estimulada.
- o aluno convidado deve ter o pleno conhecimento de que a atividade presencial é apenas o início do processo de ensino inerente ao ciclo. Não é esperado que essa atividade presencial seja amplamente abrangente e conclusiva quanto a formação do aluno em relação aos conteúdos abordados. Então, os materiais presentes no **Portal da Matemática** (<http://matematica.obmep.org.br/>) irão complementar essa ação formativa. Logo, o aluno deve ser claramente informado da existência do Portal, dos materiais complementares lá existentes e da forma de acesso a esse ambiente virtual. As atividades presenciais e virtuais se complementam e cabe ao professor enfatizar isso junto aos alunos, incentivando continuamente a participação dos alunos nas atividades presentes no Portal. Salientamos que não é aceitável atitudes que se omitam de buscar essa parceria entre ações presenciais e virtuais.

Para que esse encontro de formação seja o mais proveitoso possível, antes da sua realização, recomendamos que os coordenadores e os professores:

- façam um estudo preliminar de todo este roteiro.
- assistam os vídeos indicados do Portal da Matemática ou do canal PICOBMEP no YouTube.
- resolvam os exercícios propostos.
- anotem suas dúvidas.

Durante esse encontro de formação deseja-se que:

- seja realizado um estudo dos materiais indicados e sejam esclarecidas as dúvidas.
- caso exista infraestrutura disponível, sejam discutidas algumas videoaulas.

- o coordenador deve promover discussões dos conceitos e dos exercícios mais importantes das aulas que serão ministradas para os alunos convidados.
- o coordenador auxilie os professores na preparação das aulas.
- ocorra uma troca de experiências e o compartilhamento de ideias entre os professores.

No que segue vamos detalhar os conteúdos das duas aulas (encontro 1 e encontro 2) deste ciclo que devem ser ministradas para os alunos convidados, indicando referências bibliográficas, videoaulas relacionadas e as listas de problemas que direcionarão o estudo a ser realizado em cada aula.

- Assuntos a serem abordados:

**Álgebra:** fatoração de expressões algébricas; identidades algébricas notáveis; equações e inequações lineares; sistemas de duas equações lineares em duas variáveis.

**Funções:** coordenadas no plano; conceito de função e seu gráfico; proporcionalidade e porcentagem; função afim e seu gráfico.

- Material a ser estudado pelo professor:

Os textos e videoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e que eles deverão estudar para se preparem para as aulas com seus alunos são:

**Álgebra:**

- Textos:

1. Material Teórico do Portal da Matemática: “Fatoração de Expressões Algébricas” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/d8j2qoh4umg4c.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/d8j2qoh4umg4c.pdf)

2. Material Teórico do Portal da Matemática: “Produtos Notáveis” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/5hn3yxxx6ckk4.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5hn3yxxx6ckk4.pdf)

3. Material sobre equações e inequações lineares, seções 2.1, 2.4 e 2.8, Prof. Francisco de Assis Magalhães Gomes.

<http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo2.pdf>

4. Material Teórico do Portal da Matemática: “Sistemas de Equações do 1º Grau” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática,

“Sistemas de Equações do Primeiro Grau com Duas Incógnitas” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/csbjkmptgggk.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/csbjkmptgggk.pdf)

- Videoaulas do Portal da Matemática:

1. No Módulo “Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=14>), assistir as videoaulas:

- Produtos Notáveis – Parte 1;
- Produtos Notáveis – Parte 2;
- Produtos Notáveis – Parte 3;
- Produtos Notáveis – Parte 4;
- Produtos Notáveis – Parte 5;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 1;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 2;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 3;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 4;
- Resolução de Exercícios: Produtos Notáveis – Parte 5;
- Resolução de Exercícios: OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática);
- Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 1;
- Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 2;
- Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 3.

2. No Módulo “Equações e Inequações do Primeiro Grau” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=44>), assistir as videoaulas:

- Equações;
- Resolução de Equações 1;
- Resolução de Equações 2;
- Exercícios sobre Equações 1;
- Exercícios sobre Equações 2;
- Exercícios sobre Equações 3;
- Exercícios sobre Equações 4;
- Exercícios sobre Equações 5;
- Exercícios sobre Equações 6;
- Conceito de Inequação;
- Inequações Equivalentes;
- Exercícios de Inequações 1;
- Exercícios de Inequações 2;

- Exercícios de Inequações 3.

3. No Módulo “O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=49>), assistir as videoaulas:

- Equação do Primeiro Grau com duas Incógnitas;
- Resolução de Sistemas de Equações do Primeiro Grau com duas Variáveis;
- Métodos da Adição e Substituição;
- Exercícios de Sistemas de Equações 1;
- Exercícios de Sistemas de Equações 2;
- Exercícios de Sistemas de Equações 3;
- Discussão de Sistemas de Equações.

### **Funções:**

- Textos:

1. Material Teórico do Portal da Matemática: “O Plano Cartesiano” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/u49fw5fm9u0.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/u49fw5fm9u0.pdf)

2. Material Teórico do Portal da Matemática: “Funções - Noções Básicas - Parte 1” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, “Funções - Noções Básicas - Parte 2” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/dalwp3y2r604k.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dalwp3y2r604k.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/8f05gs9zxxg08w.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8f05gs9zxxg08w.pdf)

3. Material Teórico do Portal da Matemática: “A Noção de Razão e Exercícios” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Proporção e Conceitos Relacionados” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Propriedades de Proporções” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Números Diretamente e Inversamente Proporcionais” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Porcentagem” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/bzl4vx6dr7s4c.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bzl4vx6dr7s4c.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/c89zmw0n6cgks.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmw0n6cgks.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/cfea7ykbmvsc.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cfea7ykbmvsc.pdf)

4. Material Teórico do Portal da Matemática: “Funções Afins - Noções Básicas” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/brc70d5silssg.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brc70d5silssg.pdf)

- Videoaulas do Portal da Matemática:

1. No Módulo “O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=49>), assistir as videoaulas:

- Plano Cartesiano;
- Plano Cartesiano 2;

2. No Módulo “Funções - Noções Básicas” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=34>), assistir as videoaulas:

- Função Real de Variável Real, Plano Cartesiano e Gráfico;
- Funções: Conceitos Básicos.

3. No Módulo “Razões e Proporções” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=57>), assistir as videoaulas:

- Razões;
- Exercícios sobre Razões 1;
- Exercícios sobre Razões 2;
- Exercícios sobre Razões 3;
- Proporções;
- Proporções 2;
- Propriedades das Proporções 1;
- Propriedades das Proporções 2;
- Propriedades das Proporções 3;
- Números Diretamente Proporcionais;
- Números Inversamente Proporcionais.

4. No Módulo “Função Afim” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=35>), assistir as videoaulas:

- Função Afim: Definição e Propriedades Básicas;
- Gráfico da Função Afim;

- Função Afim: Caracterização;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 1;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 2;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 3;
- Função Afim: Resolução de Exercícios – Parte 4.



## ENCONTRO 1

### 2ª semana: aula para alunos convidados

- Assuntos a serem abordados: **Álgebra** – fatoração de expressões algébricas; identidades algébricas notáveis; equações e inequações lineares; sistemas de duas equações lineares em duas variáveis.

- Textos para consulta:

1. Material Teórico do Portal da Matemática: “Fatoração de Expressões Algébricas” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/d8j2qoh4umg4c.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/d8j2qoh4umg4c.pdf)

2. Material Teórico do Portal da Matemática: “Produtos Notáveis” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/5hn3yxxx6ckk4.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5hn3yxxx6ckk4.pdf)

3. Material sobre equações e inequações lineares, seções 2.1, 2.4 e 2.8, Prof. Francisco de Assis Magalhães Gomes.

<http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo2.pdf>

4. Material Teórico do Portal da Matemática: “Sistemas de Equações do 1º Grau” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, “Sistemas de Equações do Primeiro Grau com Duas Incógnitas” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/csbjkmptgggk.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/csbjkmptgggk.pdf)

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de oito exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Exercícios adicionais sobre os assuntos abordados podem ser encontrados, por exemplo, nos textos para consulta acima e nas provas e bancos de questões da OBMEP.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N3 – Ciclo 1 – Encontro 1  
**ENUNCIADOS**

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo da aula com os alunos convidados. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

**Exercício 1 (Questão 16 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):**

Partindo do mesmo ponto, Ana e Beatriz começam, ao mesmo tempo, uma corrida de bicicleta de ida e volta entre duas cidades distantes 150 km uma da outra. Ana e Beatriz mantêm velocidades constantes e Beatriz percorre, a cada hora, 10 km a mais que Ana. Beatriz completa o percurso de ida e inicia o de volta. Elas se cruzam no momento em que Beatriz completa 30 km no percurso de volta. Qual é a velocidade de Ana?

**Exercício 2 (Questão 1 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):**

Após lançar 2014 vezes uma moeda, Antônio contou 997 caras. Continuando a lançar a moeda, quantas caras seguidas ele deverá obter para que o número de caras fique igual à metade do número total de lançamentos?

**Exercício 3 (Questão 2 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009):**

Para achar o número de seu sapato, Maurício mediu o comprimento de seu pé em centímetros, multiplicou a medida por 5, somou 28, dividiu tudo por 4 e arredondou o resultado para cima, obtendo o número 40. Qual das alternativas mostra um possível comprimento do pé do Maurício?

- A) 24 cm
- B) 25 cm
- C) 26 cm
- D) 27 cm
- E) 28 cm

**Exercício 4 (Questão 7 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):**

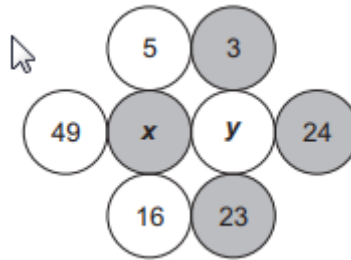
A soma de dois números é 3 e a soma de seus cubos é 25. Qual é a soma de seus quadrados?

**Exercício 5 (Questão 2 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2017):**

Se  $a - b = 1$  e  $ab = 1$ , qual é o valor de  $a^2 + b^2$ ?

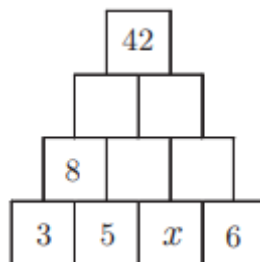
**Exercício 6 (Questão 7 (modificada) – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2010):**

Na figura,  $x$  é a média aritmética dos números que estão nos quatro círculos claros e  $y$  é a média aritmética dos números que estão nos quatro círculos escuros. Quais são os valores de  $x$  e  $y$ ?



**Exercício 7: (Questão 39 – Banco de Questões 2010 – Nível 3)**

Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual é o valor de  $x$ ?



**Exercício 8 (Questão 76 – Banco de Questões 2010 – Nível 3):**

Sendo  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x > y$  e  $z \neq 0$ , encontre a única desigualdade falsa dentre as desigualdades abaixo.

- A)  $x + z > y + z$
- B)  $x - z > y - z$
- C)  $xz > yz$
- D)  $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$
- E)  $xz^2 > yz^2$

**Solução do Exercício 1:**

Se  $v$  é a velocidade de Ana, então a velocidade desenvolvida por Beatriz é  $v + 10$ . No momento em que as duas se cruzam, a distância percorrida por Ana é  $150 - 30 = 120$  km e a percorrida por Beatriz é  $150 + 30 = 180$  km. Como  $\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}}$  e o tempo gasto pelas duas até o momento do encontro é o mesmo, então  $\frac{120}{v} = \frac{180}{v+10}$ , ou seja,  $120(v + 10) = 180v$ . Resolvendo essa equação linear para  $v$ , obtém-se  $v = 20$  km/h.

**Solução do Exercício 2:**

Seja  $x$  o número de caras consecutivas obtidas após os primeiros 2014 lançamentos. Então, de acordo com o enunciado do problema,  $x$  deverá satisfazer a igualdade  $997 + x = \frac{2014+x}{2}$ , ou seja,  $1994 + 2x = 2014 + x$ . Resolvendo essa equação, obtém-se  $x = 20$ .

**Solução do Exercício 3:**

Seja  $x$  o comprimento do pé do Maurício. Então,  $39 < \frac{5x+28}{4} \leq 40$ , e segue que  $156 < 5x + 28 \leq 160$ . Logo,  $128 < 5x \leq 132$ , ou seja,  $25,6 < x \leq 26,4$ . A única alternativa que satisfaz essas desigualdades é a alternativa C.

**Solução do Exercício 4:**

Sejam  $x$  e  $y$  os dois números. Vamos usar as conhecidas identidades do quadrado da soma  $(x + y)^2$  e do cubo da soma  $(x + y)^3$  para encontrar uma identidade para a soma dos quadrados  $x^2 + y^2$ :  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  e  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ . Do quadrado da soma podemos concluir que  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$  e do cubo da soma podemos concluir que  $3x^2y + 3xy^2 = (x + y)^3 - (x^3 + y^3)$ . Evidenciando o produto  $3xy$  no lado esquerdo da última identidade, obtemos  $3xy(x + y) = (x + y)^3 - (x^3 + y^3)$  e, isolando o produto  $xy$  (não há problema em dividir por  $x + y$ , pois  $x + y = 3$ ), temos  $xy = \frac{(x+y)^3 - (x^3 + y^3)}{3(x+y)}$ . Substituindo esse produto na identidade da soma dos quadrados temos  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - \frac{2}{3} \frac{(x+y)^3 - (x^3 + y^3)}{x+y}$ . Agora, como  $x + y = 3$  e  $x^3 + y^3 = 25$ , então  $x^2 + y^2 = 3^2 - \frac{2}{3} \frac{3^3 - 25}{3} = \frac{77}{9}$ .

**Solução do Exercício 5:**

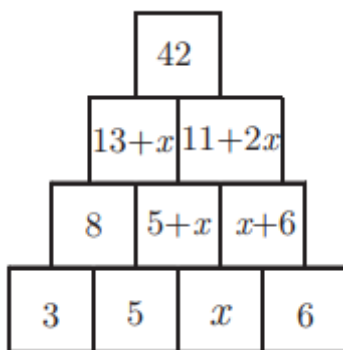
Como  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  e como, pelo enunciado,  $a - b = 1$  e  $ab = 1$ , então  $1 = 1^2 = a^2 - 2 \cdot 1 + b^2 = a^2 - 2 + b^2$  e, logo,  $a^2 + b^2 = 3$ .

**Solução do Exercício 6:**

Temos  $x = \frac{5+49+16+y}{4} = \frac{70+y}{4}$  e  $y = \frac{3+24+23+x}{4} = \frac{50+x}{4}$ . Logo,  $4x - y = 70$  e  $4y - x = 50$ . Resolvendo o sistema formado por essas duas últimas equações, obtém-se  $x = 22$  e  $y = 18$ .

**Solução do Exercício 7:**

Usando a regra dada, preenchamos as casas vazias a partir da segunda linha a contar de baixo e obtemos a figura abaixo. Logo,  $(13 + x) + (11 + 2x) = 42$ . Resolvendo essa equação, obtemos  $x = 6$ .

**Solução do Exercício 8:**

Nessa questão usaremos as propriedades de desigualdades seguintes. Podemos somar o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade sem alterar seu sentido. Podemos multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo sem alterar seu sentido. Assim, se  $x > y$ , então  $x + z > y + z$  (somando  $z$  qualquer a ambos os membros) e  $xz > yz$  (multiplicando por  $z > 0$  em ambos os membros) Logo, (A) e (B) estão corretas, pois foi somado  $z$  e  $-z$  a ambos os membros, bem como (D) e (E), pois ambos os membros foram multiplicados por  $\frac{1}{z^2}$  e  $z^2$ , ambos positivos, já que  $z \neq 0$ . A opção (C) é falsa, porque  $z$  pode ser negativo. Por exemplo, se  $x = 5$ ,  $y = 3$  e  $z = -2$ , temos  $5 > 3$  e, no entanto,  $xz = 5 \cdot (-2) = -10 < -6 = 3 \cdot (-2) = yz$ .

## ENCONTRO 2

### 3ª semana: aula para alunos convidados

- Assuntos a serem abordados: **Funções**: Coordenadas no plano, conceito de função e seu gráfico, proporcionalidade e porcentagem, função afim e seu gráfico.

- Textos para consulta:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, “O Plano Cartesiano” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/u49fw5fm9u0.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/u49fw5fm9u0.pdf)

2. Material Teórico do Portal da Matemática, “Funções - Noções Básicas - Parte 1” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor) e Material Teórico do Portal da Matemática, “Funções - Noções Básicas - Parte 2” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/dalwp3y2r604k.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dalwp3y2r604k.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/8f05gs9zxg08w.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8f05gs9zxg08w.pdf)

3. Material Teórico do Portal da Matemática, “A Noção de Razão e Exercícios” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Proporção e Conceitos Relacionados” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Propriedades de Proporções” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Números Diretamente e Inversamente Proporcionais” – F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), Material Teórico do Portal da Matemática, “Porcentagem” – U. L. Parente, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/bzl4vx6dr7s4c.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bzl4vx6dr7s4c.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/c89zmw0n6cgks.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmw0n6cgks.pdf)

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/cfea7ykbmvsc.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cfea7ykbmvsc.pdf)

4. Material Teórico do Portal da Matemática, “Funções Afins - Noções Básicas” – A. P. Neto, A. C. M. Neto (revisor).

[http://matematica.obmep.org.br/uploads/material\\_teorico/brc70d5silsg.pdf](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brc70d5silsg.pdf)

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de oito exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos

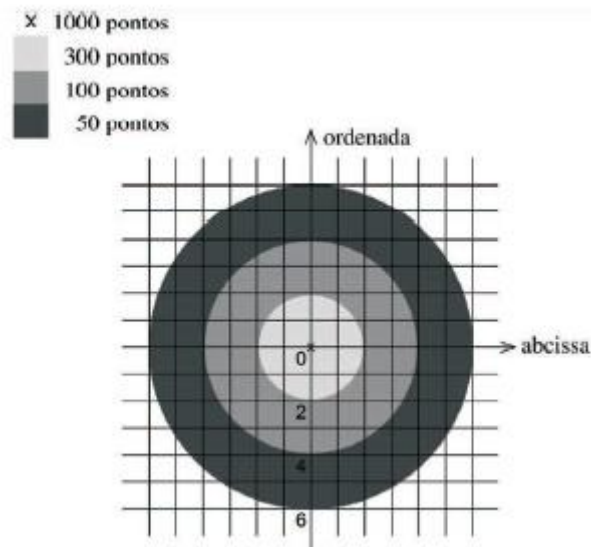
alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados. Exercícios adicionais sobre os assuntos abordados podem ser encontrados, por exemplo, nos textos para consulta acima e nas provas e bancos de questões da OBMEP.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA 2018 – N3 – Ciclo 1 – Encontro 2  
**ENUNCIADOS**

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo da aula com os alunos convidados. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

**Exercício 1 (Questão 25 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):**

Manoel testa sua pontaria lançando cinco flechas que atingiram o alvo nos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ , de coordenadas  $A = (1, -1)$ ,  $B = (2, 5)$ ,  $C = (-1, 4)$ ,  $D = (-4, -4)$  e  $E = (6, 5)$ . A tabela mostra quantos pontos se ganha quando a flecha acerta um ponto dentro de cada uma das três regiões, conforme mostra a figura.

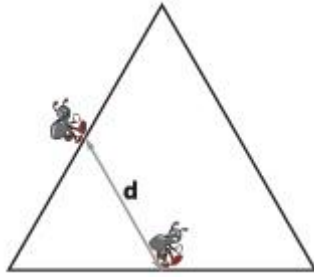


- Marque os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ .
- Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo?
- Ao todo, quantos pontos Manoel fez?

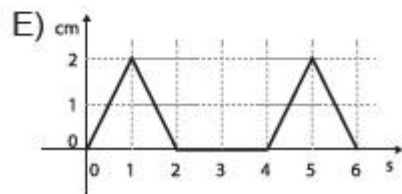
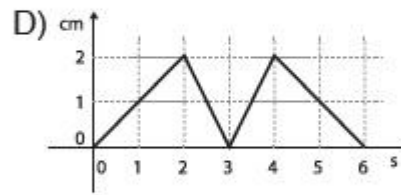
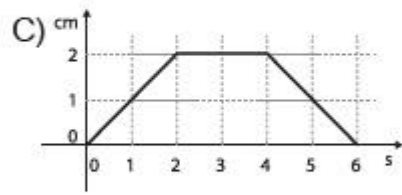
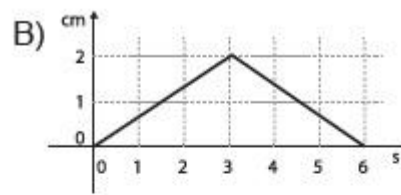
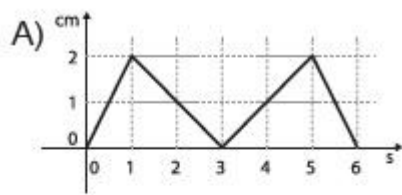
**Exercício 2 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):**

Duas formiguinhas partiram ao mesmo tempo e em direções diferentes de um mesmo vértice de um triângulo equilátero de lado 2 cm. Elas andaram sobre os lados do triângulo à velocidade de 1 cm/s, até retornar ao vértice inicial.



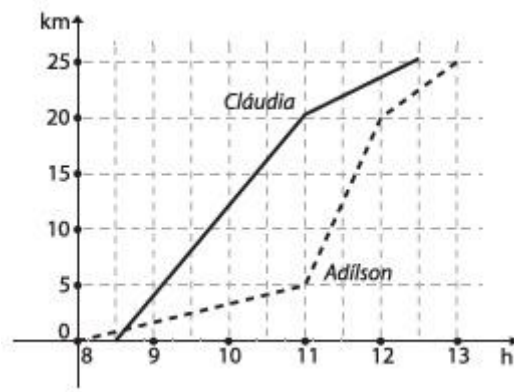


Qual dos gráficos abaixo descreve a distância  $d$  entre as duas formiguinhas em função do tempo?



**Exercício 3 (Questão 15 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):**

Em um mesmo dia, Cláudia partiu de Quixajuba para Pirajuba, enquanto Adílson partiu de Pirajuba para Quixajuba. O gráfico mostra a distância de cada um deles ao respectivo ponto de partida durante todo o trajeto, em função do tempo. A que horas eles se encontraram na estrada?



**Exercício 4 (Questão 104 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):**

Uma companhia tem um lucro de 6% nos primeiros R\$ 1 000,00 reais de venda diária e de 5% em todas as vendas que excedam R\$ 1 000,00 reais, nesse mesmo dia. Qual é o lucro dessa companhia, em reais, num dia em que as vendas alcançam R\$ 6 000,00 reais?

**Exercício 5 (Questão 10 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2006):**

Um trabalho de Matemática tem 30 questões de Aritmética e 50 de Geometria. Júlia acertou 70% das questões de Aritmética e 80% do total de questões. Qual o percentual das questões de Geometria que ela acertou?

**Exercício 6 (Questão 4 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):**

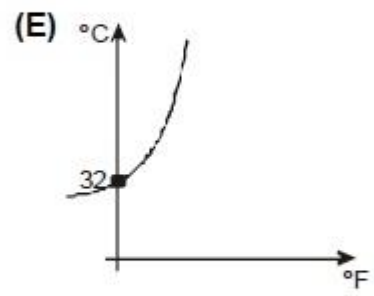
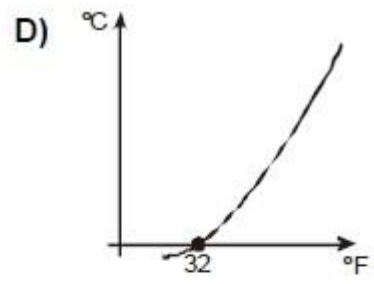
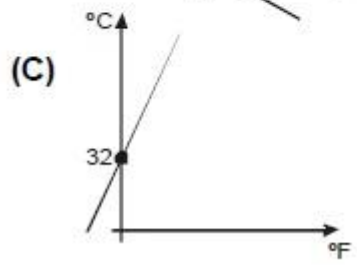
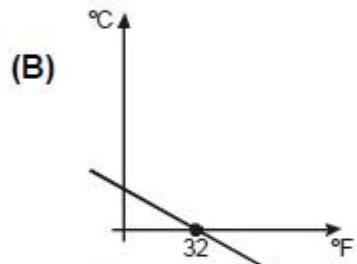
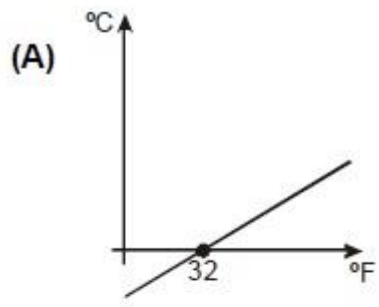
Guilherme precisa chegar em 5 minutos ao aeroporto, que fica a 5 km de sua casa. Se nos 2 primeiros minutos seu carro andar a uma velocidade média de 90 km/h, qual é a menor velocidade média que ele terá que desenvolver nos próximos 3 minutos para não chegar atrasado ao aeroporto?

**Exercício 7 (Questão 1 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):**

O pai de Carolina mediu o comprimento da mesa da sala com sua mão e contou 8 palmos. Ela também mediu a mesa do mesmo modo e contou 11 palmos. Qual é o tamanho do palmo de Carolina, se o palmo de seu pai mede 22 centímetros?

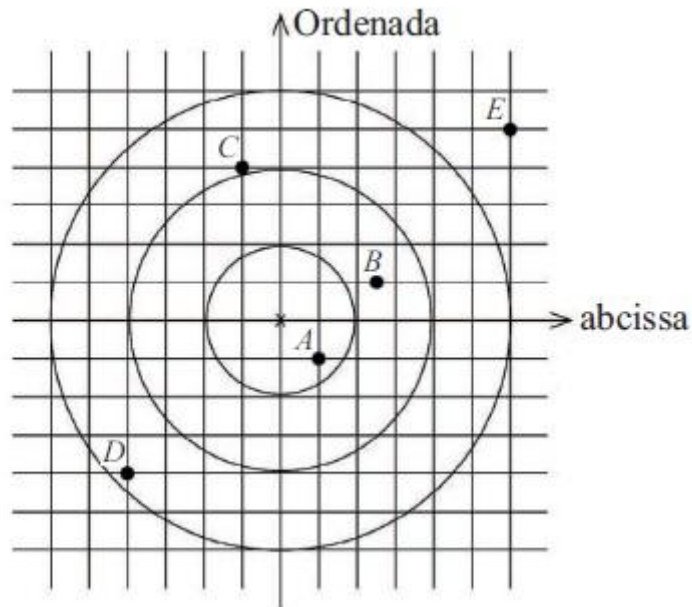
**Exercício 8 (Questão 10 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):**

No Brasil, usa-se a escala *Celsius* para medir temperaturas e, em outros países, usa-se a escala *Fahrenheit*. Para converter uma temperatura da escala *Fahrenheit* para a *Celsius*, subtrai-se 32 do valor da temperatura em graus *Fahrenheit* e multiplica-se o resultado por  $\frac{5}{9}$ . Qual dos gráficos representa a relação entre as medidas de uma mesma temperatura em graus *Fahrenheit* (indicados por °F) e em graus *Celsius* (indicados por °C)?



**Solução do Exercício 1:**

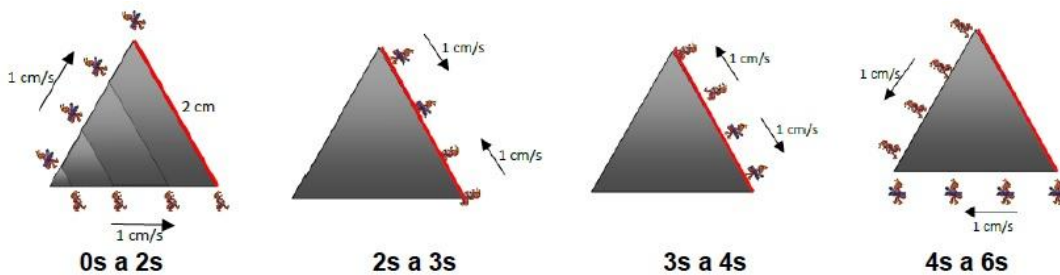
- a) Os cinco pontos dados estão marcados na figura.



- b) No círculo menor temos apenas o ponto  $A$ , portanto Manoel acertou apenas uma vez neste círculo, o que lhe dá 300 pontos.
- c) Para calcular o total de pontos, observe que pelo ponto  $B$  ele ganha 100 pontos, por  $C$  ele ganha 50 pontos e, por  $D$ , 50 pontos. Entretanto, pelo ponto  $E$ , ele não ganha pontos, porque está fora da zona de pontuação. Logo, o número total de pontos que Manoel fez é  $300 + 100 + 50 + 50 = 500$ .

**Solução do Exercício 2:**

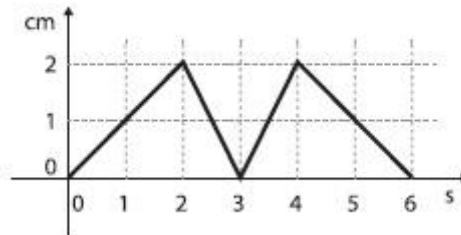
As figuras abaixo mostram as posições relativas das formiguinhas em diferentes intervalos de tempo de 0s a 6s.



- Na primeira figura, observamos que em qualquer instante o ponto de partida e as formiguinhas formam um triângulo equilátero; desse modo, de 0s a 2s, a

distância entre as formiguinhas é igual à distância percorrida, ou seja, varia em 1cm/s.

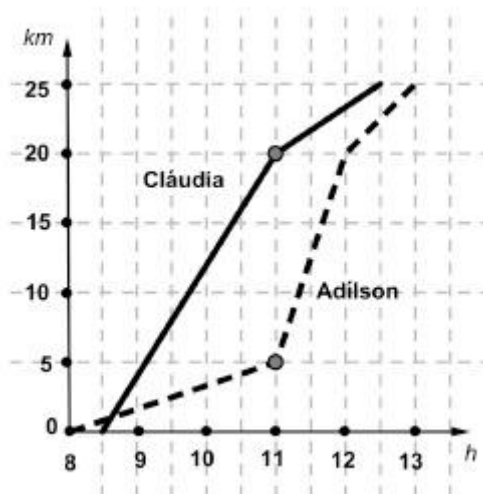
- Na segunda figura, vemos que as formiguinhas andam uma em direção à outra e que a distância entre elas decresce em 2cm/s; desse modo, elas vão se encontrar no ponto médio do lado do triângulo no instante 3s.
- Na terceira figura elas já estão se afastando à velocidade de 2cm/s.
- Na quarta figura elas estão retornando ao ponto de partida e, de modo análogo à primeira figura, a distância entre elas decresce em 1cm/s.



Logo, o gráfico que melhor representa a distância entre as duas formigas em função do tempo é o da alternativa (D).

### Solução do Exercício 3:

Observamos no gráfico que a distância total percorrida por Cláudia, e por Adilson, é de 25 km (Cláudia em 4 horas e Adilson em 5 horas). Logo, para determinar o horário do encontro entre eles, devemos determinar em que momento a soma das distâncias percorridas é igual a 25 km. Os pontos assinalados no gráfico mostram que às 11 horas Cláudia e Adilson haviam percorrido, respectivamente, 20 km e 5 km; logo, foi nesse horário que eles se encontraram.



**Solução do Exercício 4:**

Nos primeiros R\$ 1 000,00, a companhia tem lucro de  $1\ 000 \times 6\% = 60$  reais e, para os R\$ 5 000,00 restantes, tem lucro de  $5\ 000 \times 5\% = 250$  reais. Logo, o lucro da companhia nesse dia é de R\$ 310,00.

**Solução do Exercício 5:**

O número de questões de Aritmética que Júlia acertou foi  $70\%$  de  $30 = \frac{70}{100} \times 30 = 21$ . Por outro lado, o total de questões que ela acertou foi  $80\%$  de  $(30 + 50) = \frac{80}{100} \times 80 = 64$ . Assim, Júlia acertou  $64 - 21 = 43$  das 50 questões de Geometria. Logo o percentual de acertos em Geometria foi de  $\frac{43}{50} = \frac{86}{100} = 86\%$ .

**Solução do Exercício 6:**

Nos dois primeiros minutos, o carro andou a  $90 \frac{km}{h} = \frac{90km}{60\ min} = 1,5 \frac{km}{min}$ , ou seja, Guilherme andou, nos primeiros 2 minutos,  $2 \times 1,5 = 3\ km$ . Falta percorrer  $5 - 3 = 2\ km$  no tempo de 3 minutos. A velocidade suficiente para isto é

$$\frac{2\ km}{3\ min} = \frac{2\ km}{3\ min \cdot \frac{1}{60}\ h/min} = \frac{\frac{2}{1}\ km}{h} = 40\ km/h$$

**Solução do Exercício 7:**

O comprimento da mesa é  $8 \times 22 = 76$  centímetros; logo, o palmo de Carolina mede  $\frac{176}{11} = 16$  centímetros.

**Solução do Exercício 8:**

De acordo com o enunciado, a expressão que fornece a temperatura *Celsius* ( $^{\circ}C$ ) em função da temperatura *Fahrenheit* ( $^{\circ}F$ ) é  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$  (\*). Essa expressão é da forma  $C = aF + b$ , onde  $a = \frac{5}{9}$  e  $b = -\frac{160}{9}$ . Logo, seu gráfico é uma reta, excluindo assim as opções (D) e (E). Esta reta corta o eixo  $^{\circ}F$  no ponto de ordenada  $C = 0$ , o que acontece quando  $F = 32$ , de acordo com a expressão (\*). Isto elimina a opção (C). Além disso, como  $a = \frac{5}{9} > 0$ , a inclinação da reta é positiva, o que elimina a opção (B). Dessa forma, a resposta é a opção (A).