Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N3 – CICLO 6 – ENCONTRO 1

Assuntos a serem abordados:

- Teorema de Tales, semelhança de triângulos, razão entre as áreas de figuras semelhantes e Teorema de Pitágoras (Geometria).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

- Material Teórico do Portal da Matemática: "Teorema de Tales - Parte I", M. M. Oliveira e A. C. M. Neto. https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsvqlq1lrux4.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática: "Semelhança entre triângulos", J. Sato e A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c72gbsow17sow.pdf
- Capítulo 2 da Apostila 3 do PIC, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner, páginas 30 a 34 (Propriedade 4 até Exercício 3). http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf
- Capítulo 1 da Apostila 3 do PIC, "Teorema de Pitágoras e Áreas", E. Wagner. http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

Teorema de Tales, semelhança de triângulos:

9º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=10) → videoaulas: "Aplicações do Teorema de Tales", "Prova do Teorema de Tales", "Teorema da Bissetriz Interna", "Teorema da Bissetriz Externa", "Semelhança de Triângulos", "Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 1", "Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 2", "Resolução de Exercícios: Semelhança de Triângulos – Parte 3".

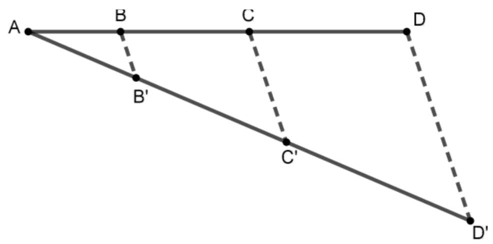
Teorema de Pitágoras:

9º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Teorema de Pitágoras e Aplicações" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=78) → videoaulas: "Aula 1 – 1ª Demonstração: uma demonstração sem contas", "Aula 2 – 2ª

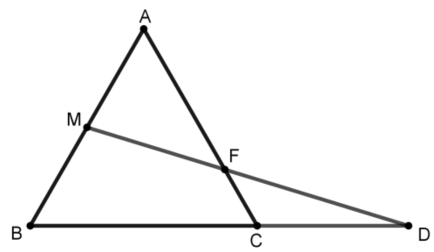
Demonstração: calculando área de duas maneiras diferentes", "Aula 3 – Demonstração de Perigal - Parte 1", "Aula 4 – Demonstração de Perigal - Parte 2", "Aula 5 – Relações métricas simples", "Aula 6 – Uma propriedade dos retângulos", "Aula 7 – A volta do Teorema de Pitágoras", "Aula 8 – Altura de um triângulo em função dos lados e a Fórmula de Herão", "Aula 9 – Um exercício".

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo desse encontro. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

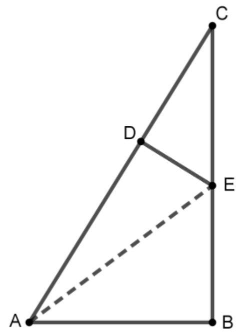
Exercício 1:
A figura abaixo mostra um segmento de reta AD dividido em três partes: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm e $CD = 5$ cm. O segmento de reta AD' mede 13 cm e as retas BB' e CC' são paralelas à reta DD'. Calcule a medida do segmento de reta AB'.



Exercício 2:
O triângulo ABC da figura abaixo é equilátero, $AM = BM = 10$ e $CD = 12$. Calcule a medida de CF.
(*Dica*: Trace a paralela CE a DM)

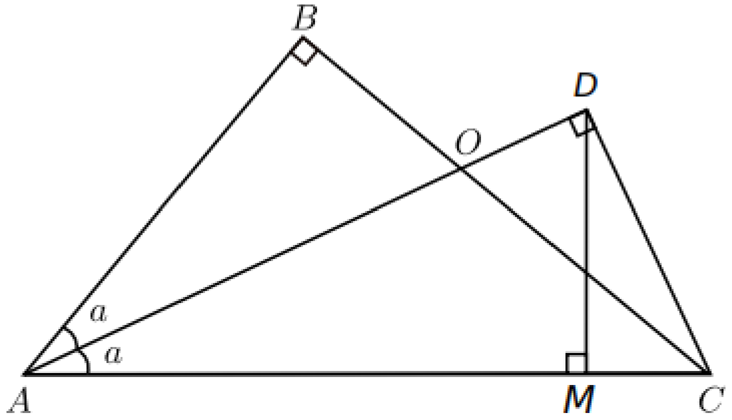


Exercício 3:
Na figura abaixo, ABC e CDE são triângulos retângulos com ângulo reto nos vértices B e D, respectivamente. Sabendo que $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$ e $BE = 2 \cdot DE$, calcule a medida de AE.

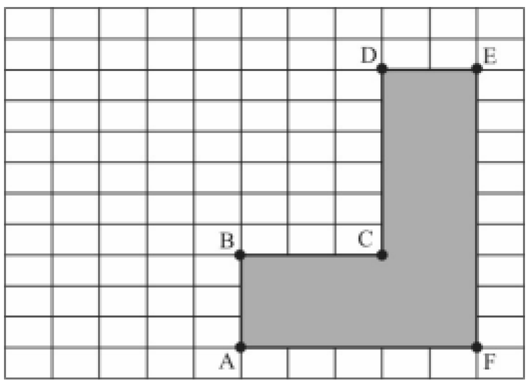


Exercício 4:
Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem a e b, e uma das diagonais mede c. Expresse a medida da outra diagonal em função de a, b e c.

Exercício 5 (Questão 26 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 - 2013):
Na figura abaixo, $CO = 12$ e $DM = 10$. Calcule BO.
(*Dica*: Prolongue os segmentos de reta AB e CD para obter o triângulo ADP)



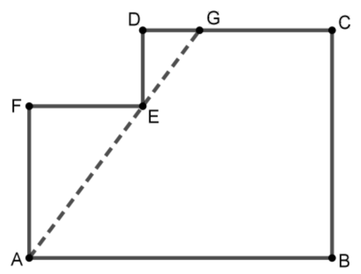
Exercício 6 (Questão 6 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – Lista 12 - 2006):
No diagrama abaixo, todos os quadradinhos têm 1 cm de lado. Qual é o maior comprimento?



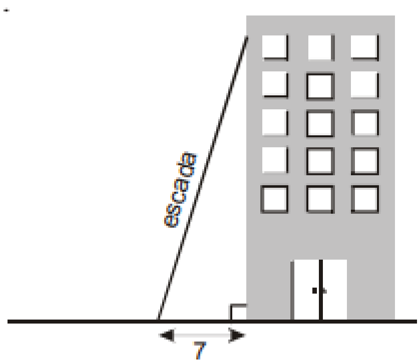
a) AE

b) $CD + CF$
c) $AC + CF$
d) DF
e) $AC + CE$

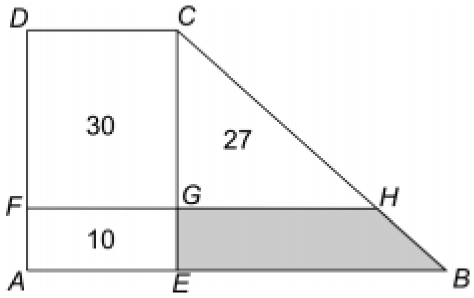
Exercício 7 (Questão 18 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):
A figura mostra um polígono $ABCDEF$ no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E. Sabe-se que $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $EF = 3$ cm e $AF = 4$ cm. Qual é o perímetro do polígono $ABCG$?



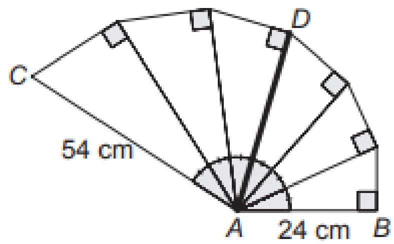
Exercício 8 (Questão 17 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):
O topo de uma escada de 25 m de comprimento está encostado na parede vertical de um edifício. O pé da escada está a 7 m de distância da base do edifício, como na figura. Se o topo da escada escorregar 4 m para baixo ao longo da parede, qual será o deslocamento do pé da escada?



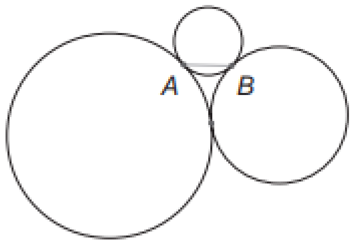
Exercício 9 (Questão 14 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2008):
O trapézio $ABCD$ foi divido em dois retângulos $AEGF$ e $FGCD$, um triângulo GHC e um trapézio $EBHG$. As áreas dos dois retângulos e do triângulo, em cm^2, estão indicadas na figura. Qual é a área do trapézio $EBHG$?



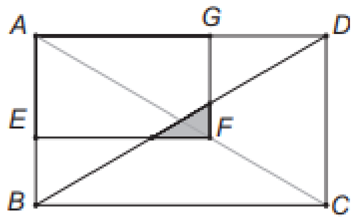
Exercício 10 (Questão 14 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009):
Os seis triângulos da figura são retângulos e seus ângulos com vértice no ponto A são iguais. Além disso, $AB = 24$ cm e $AC = 54$ cm. Qual é o comprimento de AD?



Exercício 11 (Questão 18 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2010):
A figura mostra três circunferências de raios 1, 2 e 3, tangentes duas a duas nos pontos destacados. Qual é o comprimento do segmento de reta AB?

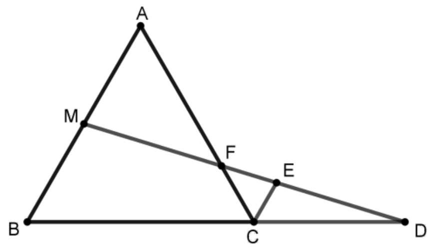


Exercício 12 (Questão 20 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Na figura, $ABCD$ e $AEFG$ são retângulos e o ponto F pertence à diagonal AC. A área do triângulo cinza é igual a $\frac{1}{18}$ da área do retângulo $AEFG$. Qual é o valor de $\frac{AF}{AC}$?



Solução do Exercício 1:
Como as retas BB', CC' e DD' são paralelas, então, pelo Teorema de Tales, tem-se $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}$. Como $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}$, $AB = 2$, $BC = 3$ e $CD = 5$, então $\frac{AB'}{2} = \frac{B'C'}{3} = \frac{C'D'}{5}$ e, logo, $B'C' = \frac{3}{2}AB'$, $C'D' = \frac{5}{2}AB'$. Como $AB' + B'C' + C'D' = AD' = 13$, $B'C' = \frac{3}{2}AB'$ e $C'D' = \frac{5}{2}AB'$, então $AB' + \frac{3}{2}AB' + \frac{5}{2}AB' = 13$ e, portanto, $AB' = \frac{13}{5}$.

Solução do Exercício 2:
Seja E o ponto de DF tal que CE seja paralelo a AB, conforme a figura abaixo.



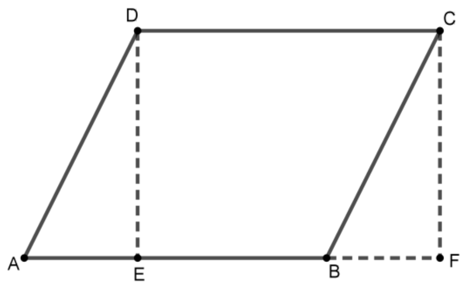
Como CE é paralelo a AB, então $\widehat{DBM} = \widehat{DCE}$. Como $\widehat{DBM} = \widehat{DCE}$ e os ângulos internos em D nos triângulos BDM e CDE são os mesmos, então esses triângulos são semelhantes, pelo caso de semelhança AA. Além disso, $BD = BC + CD = AB + CD = AM + BM + CD = 10 + 10 + 12 = 32$. Como BDM e CDE são semelhantes, então $\frac{CE}{BM} = \frac{CD}{BD}$, ou seja, $\frac{CE}{10} = \frac{12}{32}$, donde $CE = \frac{15}{4}$. Como AM é paralelo a CE, então $\widehat{AMF} = \widehat{CEF}$. Além disso, $\widehat{AFM} = \widehat{CFE}$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Como $\widehat{AMF} = \widehat{CEF}$ e $\widehat{AFM} = \widehat{CFE}$, então os triângulos AFM e CFE são semelhantes, pelo caso de semelhança AA. Como $AF = AC - CF$ e $AC = AB = AM + BM = 10 + 10 = 20$, então $AF = 20 - CF$. Como os triângulos AFM e CFE são semelhantes, então $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AM}$, ou seja, $\frac{CF}{20-CF} = \frac{\frac{15}{4}}{10}$, donde $CF = \frac{60}{11}$.

Solução do Exercício 3:
Como $AB = 1$ e $BC = \sqrt{3}$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, obtém-se $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$ e, logo, $AC = 2$. Como $\widehat{ABC} = \widehat{CDE} = 90°$ e os ângulos internos em C de ABC e EDC são os mesmos, então esses triângulos são semelhantes, pelo caso de semelhança AA. Como ABC e EDC são semelhantes, então $\frac{CD}{BC} = \frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AB}$, ou seja, $\frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{CE}{2} = \frac{DE}{1}$ e, logo, $CD = \sqrt{3} \cdot DE$ e $CE = 2 \cdot DE$. Como $BE + CE = BC = \sqrt{3}$, $BE = 2 \cdot DE$ e $CE = 2 \cdot DE$, então $2 \cdot DE + 2 \cdot DE = \sqrt{3}$ e, logo, $DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Como $DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$ e $CD = \sqrt{3} \cdot DE$, então $CD = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}$. Como

$AD = AC - CD$, $AC = 2$ e $CD = \frac{3}{4}$, então $AD = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Como $AD = \frac{5}{4}$ e $DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ADE, obtém-se $AE^2 = AD^2 + DE^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$ e, portanto, $AE = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solução do Exercício 4:

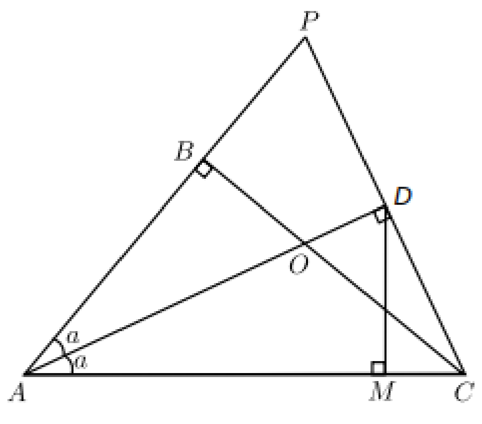
Sejam $ABCD$ o paralelogramo, E o ponto sobre a reta AB tal que DE seja perpendicular a AB e F o ponto sobre a reta AB tal que CF seja perpendicular a AB, conforme a figura abaixo.



Sejam $AE = BF = x$, $DE = CF = h$, $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ e $BD = d$. Então, $BE = AB - AE = a - x$ e $AF = AB + BF = a + x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos BDE, CBF e ACF, obtém-se $d^2 = h^2 + (a - x)^2$, $b^2 = h^2 + x^2$ e $c^2 = h^2 + (a + x)^2$, respectivamente. Como $b^2 = h^2 + x^2$, então $h^2 = b^2 - x^2$. Como $c^2 = h^2 + (a + x)^2$ e $h^2 = b^2 - x^2$, então $c^2 = b^2 - x^2 + (a + x)^2 = a^2 + b^2 + 2ax$ e, logo, $2ax = c^2 - a^2 - b^2$. Como $d^2 = h^2 + (a - x)^2$, $h^2 = b^2 - x^2$ e $2ax = c^2 - a^2 - b^2$, então $d^2 = b^2 - x^2 + (a - x)^2 = a^2 + b^2 - 2ax = a^2 + b^2 - (c^2 - a^2 - b^2) = 2(a^2 + b^2) - c^2$ e, portanto, $BD = d = \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

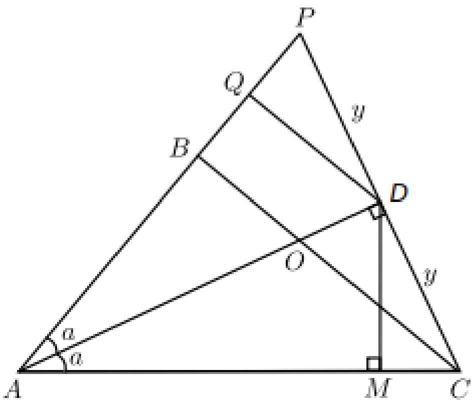
Solução do Exercício 5:

Prolongando os segmentos de reta AB e CD, obtém-se o triângulo ADP, conforme mostrado na figura abaixo.

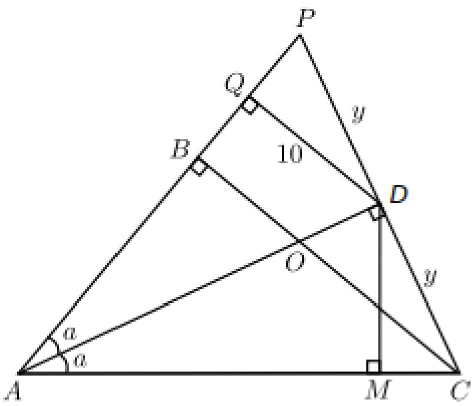


Como $\widehat{DAP} = \widehat{CAD} = a$, $\widehat{ADP} = \widehat{ADC} = 90°$ e o lado AD é comum a ambos os triângulos ADP e ADC, então, pelo caso de congruência de triângulos LAL, esses triângulos são congruentes. Como ADP e ADC são congruentes, então $DP = CD$.

Agora, traçamos o segmento DQ perpendicular ao segmento de reta BP, conforme a figura abaixo.



Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, $\widehat{AQD} = \widehat{AMD} = 90°$ e $\widehat{DAQ} = \widehat{DAM} = a$, então $\widehat{ADQ} = 90° - a = \widehat{ADM}$. Como $\widehat{DAQ} = \widehat{DAM}$, $\widehat{ADQ} = \widehat{ADM}$ e AD é lado comum de ambos os triângulos ADQ e ADM, então, pelo caso de congruência de triângulos LAL, esses triângulos são congruentes. Como ADQ e ADM são congruentes, então $DQ = DM = 10$.



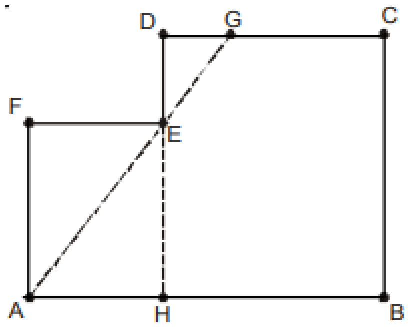
Como DQ e BC são perpendiculares a AP, então são paralelos entre si e, logo, $\widehat{PDQ} = \widehat{BCP}$. Como $\widehat{PDQ} = \widehat{BCP}$ e os ângulos internos em P nos triângulos PQD e PBC são os mesmos, então esses triângulos são semelhantes, pelo caso de semelhança AA. Como PQD e PBC são semelhantes, então $\frac{BC}{DQ} = \frac{CP}{DP}$. Mas, como $CP = CD + DP$ e $DP = CD$, então $CP = 2 \cdot DP$. Como $\frac{BC}{DQ} = \frac{CP}{DP}$, $CP = 2 \cdot DP$ e $DQ = 10$, então $BC = 20$. Como $BC = 20$ e $CO = 12$, então $BO = BC - CO = 20 - 12 = 8$.

Solução do Exercício 6:

A alternativa correta é a (e). Note que AE é a hipotenusa de um triângulo de catetos medindo 5 cm e 9 cm, CF é a hipotenusa de um triângulo de catetos medindo 2 cm e 3 cm, AC é a hipotenusa de um triângulo de catetos medindo 3 cm e 3 cm, DF é a hipotenusa de um triângulo de catetos medindo 2 cm e 9 cm e CE é a hipotenusa de um triângulo de catetos medindo 2 cm e 6 cm. Usando o Teorema de Pitágoras, calculamos as medidas dessas hipotenusas: $AE = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} \approx 10{,}3$, $CF = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$, $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4{,}2$, $DF = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85} \approx 9{,}2$ e $CE = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}3$. Logo, $CD + CF \approx 5 + 3{,}6 = 8{,}6$, $AC + CF \approx 4{,}2 + 3{,}6 = 7{,}8$ e $AC + CE \approx 4{,}2 + 6{,}3 = 10{,}5$. Assim, dentre os comprimentos das alternativas, o maior é $AC + CE$.

Solução do Exercício 7:

O perímetro p é dado por $p = AB + BC + CG + AG$. Como já conhecemos AB e BC, o problema é calcular CG e AG. Para isto, precisamos determinar a medida de outros segmentos na figura, e começamos calculando a medida de CD, DE e AE. Prolongando DE até o ponto H, obtemos os retângulos $AHEF$ e $BCDH$ (ver figura).



Como num retângulo os lados opostos são iguais, temos $EH = AF = 4$, $AH = EF = 3$ e $DH = BC = 6$. Logo, $CD = BH = AB - AH = 8 - 3 = 5$ e $DE = DH - EH = BC - AF = 6 - 4 = 2$. Para determinar AE, note que o triângulo AEF é retângulo de catetos $AF = 4$, $EF = 3$ e hipotenusa AE. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, $AE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Vamos agora calcular EG e DG. Note que os triângulos AEF e DEG são ambos retângulos e os seus ângulos internos em A e E são iguais, pois os lados AF e DE são paralelos. Logo, pelo caso de semelhança AA, esses triângulos são semelhantes. Temos, então, $\frac{AE}{EG} = \frac{AF}{DE} = \frac{EF}{DG}$, ou seja, $\frac{5}{EG} = \frac{4}{2} = \frac{3}{DG}$. Assim, $EG = 2{,}5$ e $DG = 1{,}5$, donde $CG = CD - DG = 5 - 1{,}5 = 3{,}5$. Agora, podemos calcular o perímetro pedido: $p = AB + BC + CG + GA = AB + BC + CG + GE + EA = 8 + 6 + 3{,}5 + 2{,}5 + 5 = 25$ cm.

Solução do Exercício 8:

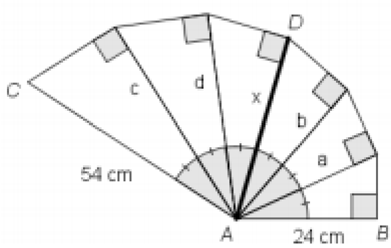
Considere o triângulo retângulo cuja hipotenusa é a escada que mede 25 m, um dos catetos é o segmento ligando o pé da escada à base do edifício, que mede 7 m, e o outro cateto é o segmento da parede do edifício que une o topo da escada ao solo. O comprimento x deste último cateto pode ser calculado imediatamente a partir do Teorema de Pitágoras: temos $25^2 = 7^2 + x^2$ e obtemos $x = 24$ m. Quando o topo da escada escorrega 4 m para baixo, obtemos um novo triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 25 m e um dos catetos mede $24 - 4 = 20$ m. O outro cateto y deste triângulo é determinado, outra vez, pelo Teorema de Pitágoras: temos $25^2 = 20^2 + y^2$ e segue que $y = 15$ m. Logo, o deslocamento do pé da escada será de $15 - 7 = 8$ m.

Solução do Exercício 9:

Como os retângulos $AEGF$ e $FGCD$ têm bases iguais e a área de $FGCD$ é três vezes a de $AEGF$, segue que $CG = 3 \cdot GE$. Pelo caso de semelhança AA, os triângulos CEB e CGH são semelhantes porque ambos são retângulos e têm o mesmo ângulo interno no vértice C. A razão de semelhança entre CEB e CGH é dada por $\frac{CE}{CG} = \frac{CG+GE}{CG} = \frac{3 \cdot GE+GE}{3 \cdot GE} = \frac{4}{3}$. Como a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, então $\text{Área}(CEB) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \text{Área}(CGH) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 27 = 48$. Logo, a área do trapézio $EBGH$ é igual a $48 - 27 = 21$ cm^2.

Solução do Exercício 10:

Vamos denotar as hipotenusas dos triângulos retângulos que aparecem na figura por a, b, x, d e c, como na figura.



Nosso objetivo é achar $x = AD$. Pelo caso de semelhança AA, os seis triângulos retângulos são semelhantes, pois têm os ângulos internos no vértice A iguais. Logo,

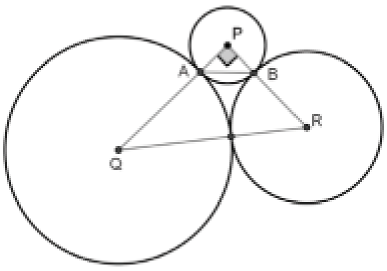
$$\frac{24}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{x} = \frac{x}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{54}.$$

Multiplicando os três primeiros termos das igualdades acima e, separadamente, os três últimos, obtemos $\frac{24}{x} = \frac{x}{54}$ e, logo, $x = 36$ cm.

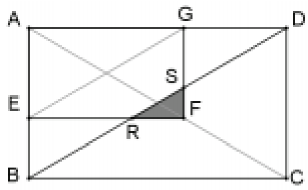
Alternativamente, seja $\lambda = \frac{24}{a}$. Multiplicando os seis termos da sequência de igualdades acima, obtemos $\lambda^6 = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ e, logo, $\lambda^3 = \frac{2}{3}$. Por outro lado, $\lambda^3 = \frac{24}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{x} = \frac{24}{x}$. Assim, $\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$ e, portanto, $x = 36$ cm.

Solução do Exercício 11:

Lembramos primeiro que se duas circunferências são tangentes, então a reta que passa por seus centros passa também pelo ponto de tangência. No nosso caso, chamando de P, Q e R os centros das circunferências (como na figura), isso mostra que $PR = 3$, $PQ = 4$ e $QR = 5$. Como $3^2 + 4^2 = 5^2$, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, segue que o triângulo PQR é retângulo em P e, portanto, o triângulo ABP também é retângulo em P. Como temos $AP = BP = 1$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABP, temos $AB^2 = AP^2 + BP^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ e, portanto, $AB = \sqrt{2}$.



Solução do Exercício 12:
Considere a figura abaixo.



Como a área do triângulo RFS é igual a $\frac{1}{18}$ da área do retângulo $AEFG$, ela é igual a $\frac{1}{9}$ da área do triângulo EFG. Como EF e BC são retas paralelas, então $\widehat{FRS} = \widehat{CBD}$. Como ABCD e um retângulo, então $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$. Como AEFG é um retângulo, então $\widehat{FAG} = \widehat{FEG}$. Mas, $\widehat{FAG} = \widehat{CAD}$. Como $\widehat{FRS} = \widehat{CBD}$, $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$, $\widehat{FAG} = \widehat{FEG}$ e $\widehat{FAG} = \widehat{CAD}$, então $\widehat{FRS} = \widehat{FEG}$. Como $\widehat{FRS} = \widehat{FEG}$ e $\widehat{RFS} = \widehat{EFG}$, então os triângulos RFS e EFG são semelhantes, pelo caso de semelhança AA. Como esses triângulos são semelhantes e a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado de sua razão de semelhança, segue que essa última razão é igual a $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Logo, $FR = \frac{1}{3}EF$ e, portanto, $ER = EF - FR = EF - \frac{1}{3}EF = \frac{2}{3}EF$. Como $\widehat{FRS} = \widehat{BRE}$, por serem ângulos opostos pelo vértice, e $\widehat{RFS} = \widehat{BER} = 90°$, então os triângulo FRS e ERB são semelhantes, pelo caso de semelhança AA, sendo que a razão de semelhança é igual a $\frac{FR}{ER} = \frac{\frac{1}{3}EF}{\frac{2}{3}EF} = \frac{1}{2}$. Assim, $AE = GF = 3 \cdot FS$ e $EB = 2 \cdot FS$, donde $AB = AE + EB = 3 \cdot FS + 2 \cdot FS = 5 \cdot FS$ e $\frac{AE}{AB} = \frac{3 \cdot FS}{5 \cdot FS} = \frac{3}{5}$. Como BC e EF são paralelas, pelo Teorema de Tales, segue que $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$. Como $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ e $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}$, então $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{5}$.

Assuntos a serem abordados:

- Volume do bloco retangular, exemplos de cálculos de áreas e perímetros (Geometria).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

- Material Teórico do Portal da Matemática: "Volumes e o Princípio de Cavalieri", páginas 1 e 2, até o Teorema 2, A. P. Neto e A. C. M. Neto (revisor).
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/coo40faiqnkss.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática: "Área de Figuras Planas: Resultados Básicos".
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/8b5zudqm4b8c0.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática: "Área de Figuras Planas: Mais Alguns Resultados".
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/uc0f8gzj70p4.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

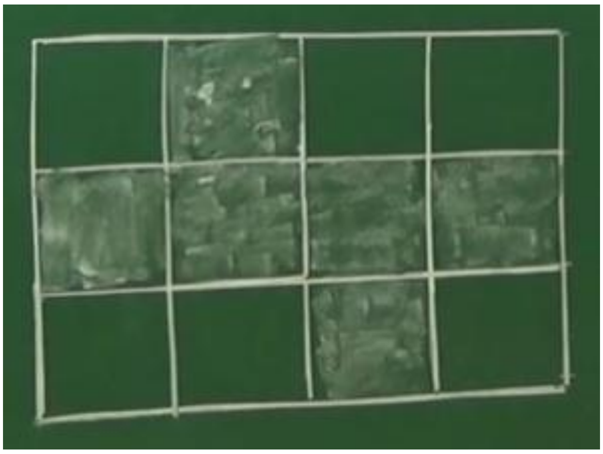
Volume do bloco retangular:
3º Ano do Ensino Médio → Módulo "Geometria Espacial 2 – Volumes e áreas de prismas e pirâmides" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=40) → videoaula: "Volume de um paralelepípedo reto-retângulo".
6º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Unidade de medida de volume" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=56) → videoaula: "Paralelepípedo retângulo e seu volume".
6º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Resolução de exercícios" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=74) → videoaula: "Resolução de exercícios: áreas e volumes".

Exemplos de cálculos de áreas e perímetros:
9º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Área de figuras planas: Resultados Básicos"

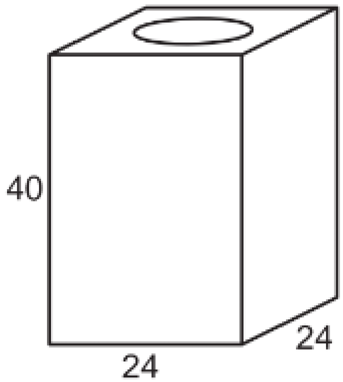
(https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=20) → videoaulas: "Área de Figuras Planas – Parte 1: Retângulos", "Área de Figuras Planas – Parte 2: Paralelogramos e Triângulos", "Área de Figuras Planas – Parte 3: Losangos, Trapézios, Polígonos Regulares de *n* Lados e Círculos (nesta videoaula desconsiderar a parte que estuda a área dos círculos)", "Área de Figuras Planas – Parte 8: Razão entre Áreas de Triângulos", "Área de Figuras Planas – Parte 9: Razão entre Áreas de Triângulos – Resolução de Exercícios", "Resolução de Exercícios: Exercícios de Geometria da OBMEP – Parte 1", "Resolução de Exercícios: Exercícios de Geometria da OBMEP – Parte 2", "Resolução de Exercícios: Exercícios de Geometria da OBMEP – Parte 3", "Resolução de Exercícios: Exercícios de Geometria da OBMEP – Parte 4".

6º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Resolução de exercícios" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=54) → videoaulas: "Exercícios sobre Unidades de Medida de Comprimento 1: a partir dos 5 minutos 32 segundos", "Exercícios sobre Unidades de Medida de Comprimento 2", "Exercícios sobre Unidades de Medida de Comprimento 3", "Exercícios sobre Unidades de Medida de Comprimento 4", "Exercícios sobre Unidades de Medida de Comprimento 5".

Exercício 1 (CMRJ – 6º ano – 2008):
A figura abaixo representa uma folha de papel retangular, onde estão destacados 6 quadrados. Com a parte destacada dessa folha, pode-se montar um cubo. Se a área da folha é $432\ cm^2$, qual é o volume desse cubo em cm^3?



Exercício 2: Uma lata de tinta, com forma de um paralelepípedo retangular reto, temas dimensões, em centímetros, mostradas na figura.

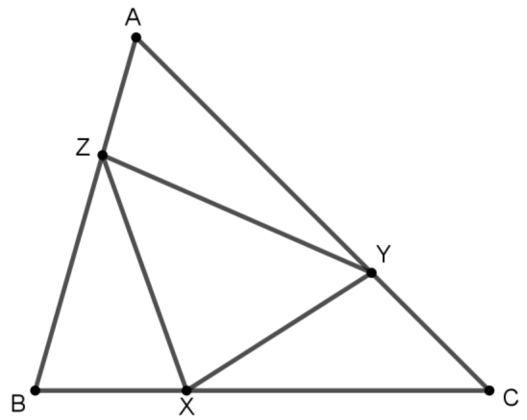


Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual. Qual é a altura da nova lata de tinta?

Exercício 3 (ENEM 2010): Uma fábrica produz barras de chocolate no formato de paralelepípedos e cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem $3\ cm$ de largura, $18\ cm$ de comprimento e $4\ cm$ de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, qual é a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo?

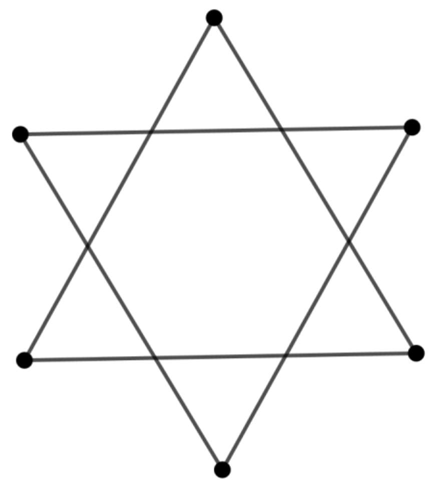
Exercício 4:
Mostre que se dois triângulos são semelhantes de razão de semelhança k, então a razão entre suas áreas é k^2.

Exercício 5 (Questão 19 (modificado) – Prova OBM – 1ª Fase – Nível 3 – 2010):
Seja ABC um triângulo e X, Y, Z pontos sobre os lados BC, CA e AB respectivamente tais que $\frac{CX}{XB} = \frac{AY}{YC} = \frac{BZ}{ZA} = 2$.



Se a área do triângulo ABC é 6,qual é a área do triângulo XYZ?

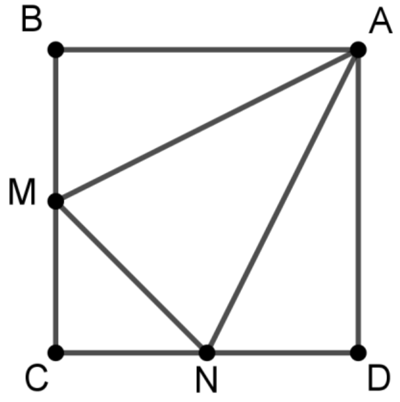
Exercício 6:
Sejam os dois triângulos equiláteros congruentes e concêntricos de lado a como na figura. Suponha que os lados de um triângulo são paralelos aos lados do outro triângulo.



Calcule a área da estrela em função do lado a dos triângulos.

Exercício 7:

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado a, M é ponto médio de AD e N é ponto médio de AB. Determine a área do triângulo MNC.

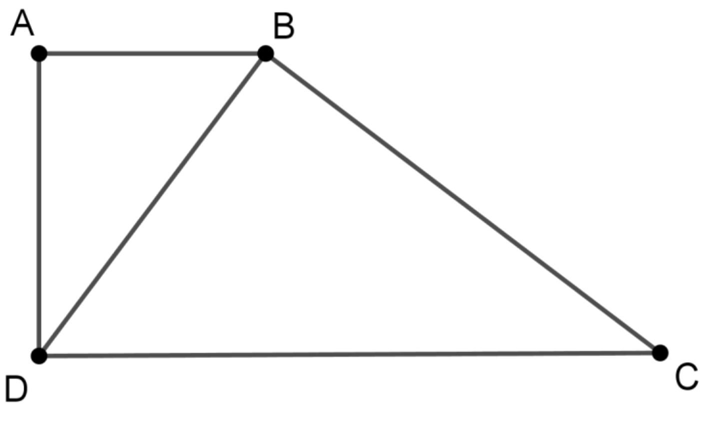


Exercício 8:

$ABCD$ é um retângulo de lados $AB = 32\ cm$ e $BC = 20\ cm$. Os pontos E e F são respectivamente, os pontos médios dos lados AB e AD. Calcule a área do quadrilátero $AECF$.

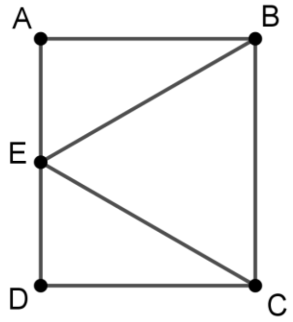
Exercício 9:

No trapézio retângulo $ABCD$ da figura, os ângulos $\widehat{CDA}$, $\widehat{DAC}$ e $\widehat{CBD}$ são retos. Sabe-se também que $AB = 18\ cm$ e $CD = 50\ cm$. Calcule o perímetro do trapézio $ABCD$.



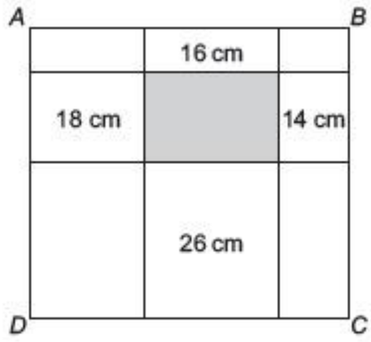
Exercício 10:

Seja $ABCD$ o retângulo da figura e E ponto médio de AD, de tal forma que BCE é um triângulo equilátero de lado $1\ cm$. Calcule o perímetro do retângulo $ABCD$.



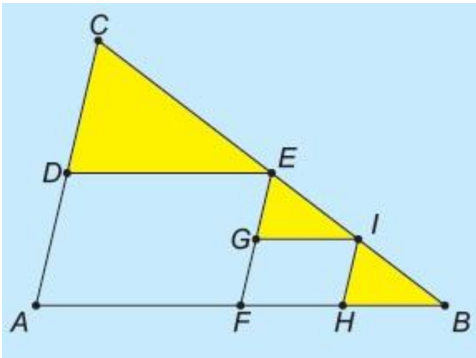
Exercício 11 (Questão 15 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2016):

O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo $ABCD$ é $54\ cm$. Qual é o perímetro do retângulo cinza?



Exercício 12 (Questão 1 (modificado)– Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2017):

Na figura abaixo, D, E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC, e G, H e I são pontos médios dos lados do triângulo FBE. O perímetro do triângulo ABC é $48\ cm$. Qual é o perímetro da região destacada em amarelo?



Solução do Exercício 1:
Observe que a folha foi dividida em 12 quadrados. Como a área total da folha é $432\ cm^2$, então a área do quadrado é $\frac{432}{12} = 36cm^2$ e o lado de cada quadrado é $6\ cm$. A medida da aresta do cubo é igual à medida do lado desse quadrado, logo o volume do cubo é $6^3 = 216\ cm^3$.

Solução do Exercício 2:
A área da base da lata atual é $24 \times 24 = 576\ cm^2$. Se as dimensões da base serão aumentadas em 25%, então cada lado da base passará a ser $24 \times 1{,}25 = 30\ cm$, e a área da base da nova lata será $30 \times 30 = 900\ cm^2$. O volume da lata atual é $V = 576 \times 40$. Se h é a altura da nova lata, então

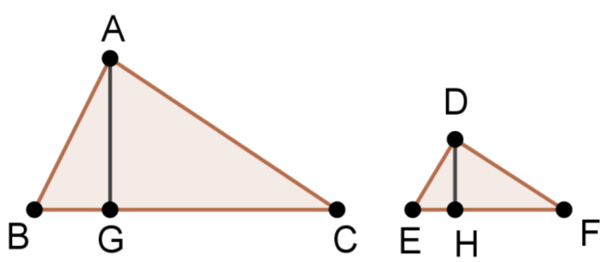
$$900 \times h = 576 \times 40 \Longrightarrow h = \frac{576 \times 40}{900} = \frac{40}{(1{,}25)^2} = 25{,}6\ cm.$$

Solução do Exercício 3:
O volume das barras no formato de paralelepípedo é $3 \times 18 \times 4 = 2^3 \times 3^3 = 6^3\ cm^3$. Como esse é o volume das barras no formato de cubo, então a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é $6\ cm$.

Solução do Exercício 4:
Sejam ABC e DEF dois triângulos semelhantes de razão de semelhança k. Isto é:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k.$$

Na figura



Os pontos G e H são pés das perpendiculares dos pontos A e D sobre os lados BC e EF respectivamente. Temos

$$area(ABC) = \frac{BC \times AG}{2} \quad e \quad area(DEF) = \frac{EF \times DH}{2}.$$

Os triângulos retângulos ABG e DEH são semelhantes pois têm os ângulos agudos em B e em E congruentes, logo

$$\frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE} = k.$$

Assim

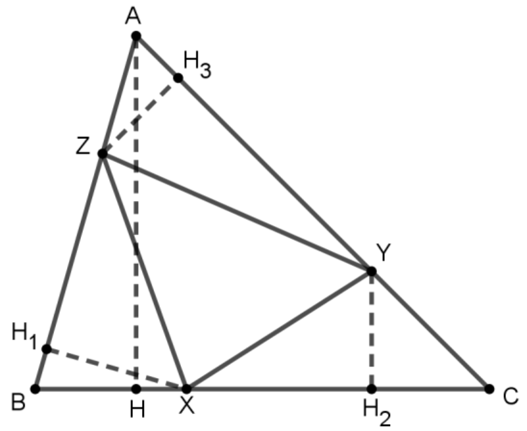
$$\frac{area(ABC)}{area(DEF)} = \frac{BC \times AG}{EF \times DH} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AG}{DH} = k^2.$$

Solução do Exercício 5:

https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/1Fase_Nivel3_2010.pdf

Observe primeiro que $CX + XB = BC$, $AY + YC = AC$ e $BZ + ZA = AB$ e portanto $BX = \frac{1}{3}BC$, $CY = \frac{1}{3}AC$ e $AZ = \frac{1}{3}AB$.

Trace as alturas AH, XH_1, YH_2 e ZH_3 em relação aos lados BC, BZ, CX e ZH_3 respectivamente.



Os triângulos retângulos ΔACH e ΔYCH_2 são semelhantes, pois têm o ângulo agudo C em comum. Como $\frac{YC}{AC} = \frac{1}{3}$, a razão de semelhança é $\frac{1}{3}$. Assim, $YH_2 = \frac{1}{3}AH$. Por outro lado, como $BX + XC = BC$ e $BX = \frac{1}{3}BC$, então $XC = \frac{2}{3}BC$. Portanto

$$Area(\Delta XYC) = \frac{XC \cdot YH_2}{2} = \frac{\frac{2}{3}BC \cdot \frac{1}{3}AH}{2} = \frac{2}{9}\frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{2}{9}Area(\Delta ABC).$$

De forma similar nos triângulos ΔYZA e ΔZXB, obtendo assim

$$Area(\Delta XYC) = Area(\Delta YZA) = Area(\Delta ZXB) = \frac{2}{9}Area(\Delta ABC).$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} Area(\Delta XYC) &= Area(\Delta ABC) - \big(Area(\Delta XYC) + Area(\Delta YZA) + Area(\Delta ZXB)\big) \\ &= \left(1 - 3 \cdot \frac{2}{9}\right) Area(\Delta ABC) = \frac{1}{3}Area(\Delta ABC) = 2. \end{aligned}$$

Solução do Exercício 6:

Como os lados dos triângulos são paralelos, os pequenos triângulos que se formam perto de cada vértice de cada triângulo são todos equiláteros e congruentes entre eles. Assim, o lado de cada pequeno triângulo é $\frac{a}{3}$. A altura dos triângulos iniciais é $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ e a altura dos pequenos triângulos é $\frac{\sqrt{3}}{6}a$. A área dos triângulos iniciais é $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ e a área dos triângulos menores é $\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a \times \frac{a}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2$. A área da estrela corresponde a área de um dos triângulos iniciais união a área de 3 triângulos menores e a sua medida é

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{36}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2.$$

Solução do Exercício 7:

Como CMN é um triângulo retângulo isósceles de catetos $\frac{a}{2}$, então

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Como ABM é um triângulo retângulo de catetos a e $\frac{a}{2}$, então

$$AM = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Veja que os catetos dos triângulos ABM e ADN são congruentes, logo ambos triângulos são congruentes. Isso implica que o triângulo AMN é isósceles. Dessa forma o ponto médio P do segmento MN é pé da altura do triângulo AMN. Assim, no triângulo retângulo APM temos

$$AP = \sqrt{AM^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{8}}\,a = \sqrt{\frac{9}{8}}\,a = \frac{3\sqrt{2}}{4}a.$$

A área do triângulo AMN é $\frac{MN \times AP}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{3\sqrt{2}}{4}a}{2} = \frac{3}{8}a^2$.

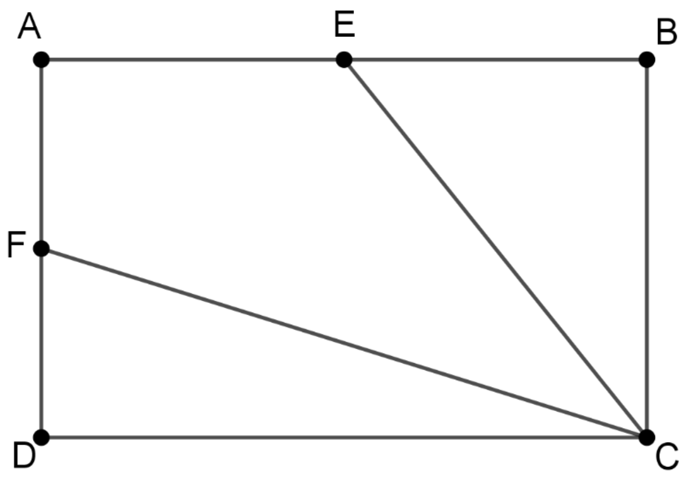
O exercício também pode ser resolvido utilizando que

$$area(ABCD) = area(AMN) + area(ABM) + area(ADN) + area(CMN).$$

Sabendo que $area(ABCD) = a^2$, $area(ABM) = area(ADN) = \frac{\frac{a}{2} \times a}{2} = \frac{1}{4}a^2$ e $area(CMN) = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{1}{8}a^2$, obtemos $area(AMN) = a^2 - 2 \times \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2$.

Solução do Exercício 8:

A figura do problema é:



Como $ABCD$ é um retângulo, então $AD = 20\ cm$ e $CD = 32\ cm$. Como E e F são pontos médios dos lados AB e AD, então $BE = 16\ cm$ e $DF = 10\ cm$. Assim,

$$\begin{aligned} area(AECF) &= area(ABCD) - area(BCE) - area(CDF) \\ &= AB \times BC - \frac{BC \times BE}{2} - \frac{CD \times DF}{2} = 32 \times 20 - \frac{20 \times 16}{2} - \frac{32 \times 10}{2} \\ &= 320\ cm^2. \end{aligned}$$

Solução do Exercício 9:

No triângulo retângulo BCD, temos que $\widehat{BCD} = 90° - \widehat{BDC}$ e como $\widehat{ADC} = 90°$, então $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} = 90°$. Dessas duas observações, obtemos que $\widehat{BCD} = \widehat{ADB}$ e portanto, os triângulos retângulos ABD e BDC são semelhantes. Temos assim:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{18}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{50} \Rightarrow BD^2 = 18 \times 50 = 30^2 \Rightarrow BD = 30\ cm.$$

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo ABD, temos $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 6 \times \sqrt{5^2 - 3^2} = 6 \times 4 = 24\ cm.$ No triângulo retângulo BCD temos $BC = \sqrt{CD^2 - BD^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\ cm$. Dessa forma, o perímetro de $ABCD$ é

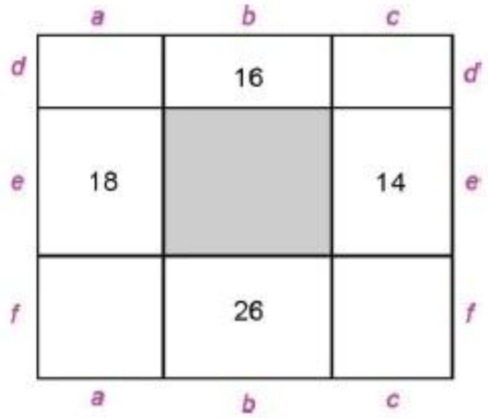
$$AB + BC + CD + DA = 18 + 40 + 50 + 24 = 132\ cm.$$

Solução do Exercício 10:

Como $BC = AD$ e E é ponto médio de AD, então $AE = ED = \frac{1}{2}\ cm$. Como o triângulo ABE é retângulo em A, então pelo teorema de Pitágoras $AB = \sqrt{BE^2 - AE^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $AB = CD$, o perímetro de ABCD é $AB + BC + CD + DA = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{3}$.

Solução do Exercício 11:

As letras de a até f na figura são as medidas dos lados dos retângulos menores.



Calculando o perímetro de cada um dos retângulos menores, temos:

$$2b + 2d = 16$$
$$2a + 2e = 18$$
$$2c + 2e = 14$$
$$2b + 2f = 26$$
$$2b + 2e = ?$$

Somando todas essas 4 primeiras igualdades, obtemos

$$2(2b + 2e) + 2a + 2c + 2d + 2f = 74.$$

Por outro lado, o perímetro do retângulo maior $ABCD$ é

$$2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f = 54.$$

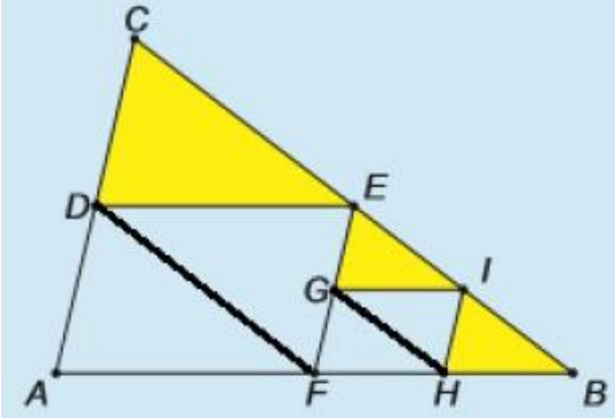
Subtraindo estas duas últimas igualdades, obtemos

$$2b + 2e = 74 - 54 = 20.$$

Portanto, o perímetro do retângulo cinza é $20\ cm$.

Solução do Exercício 12:

Os quatro triângulos CDE, DAF, FED e EFB são congruentes, logo têm mesmo perímetro. Cada um desses triângulos é semelhante ao triângulo ABC de razão de semelhança $\frac{1}{2}$.



Sendo assim, o perímetro dos triângulos CDE e EFB é $24\,cm$. Por sua vez, os triângulos EGI e BHI são semelhantes ao triângulo EFB de razão de semelhança $\frac{1}{2}$. Desse modo os triângulos EGI e BHI têm perímetro $12\,cm$. Logo, a região destacada em amarelo tem perímetro $24 + 12 + 12 = 48\,cm$.