

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $A = 8 \cdot 4 = 32\text{cm}^2$.

b) A altura h mede $12 \cdot \sin 30^\circ = 6\text{cm}$ e a base b mede $12 \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}\text{cm}$. Assim

$$A = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\text{cm}^2.$$

2.

a) $A = 8^2 = 64\text{cm}^2$.

b) $A = 7,1^2 = 50,41\text{cm}^2$.

c) $A = (\sqrt{3})^2 = 3\text{cm}^2$.

d) Se a diagonal mede 6cm , o lado mede $3\sqrt{2}\text{cm}$, então a área é $A = (3\sqrt{2})^2 = 18\text{cm}^2$.

3.

a) $l = \sqrt{25} = 5\text{cm}$.

b) $l = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\text{cm}$.

4.

a) $A = (5 \cdot 8)/2 = 20\text{cm}^2$.

b) Se $2b$ é o comprimento da outra diagonal, como as diagonais de um losango são perpendiculares, usando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 + 3^2 &= 5^2 \\ b &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ b &= 4. \end{aligned}$$

Portanto, a outra diagonal mede 8cm e a área do losango vale $A = 24\text{cm}^2$.

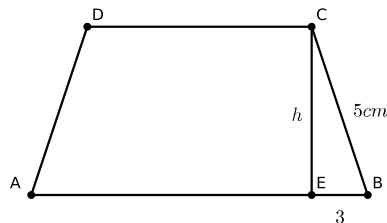
c) Dois ângulos internos consecutivos de um losango são suplementares. Assim, um de seus ângulos internos será 60° . Temos, então, dois triângulos equiláteros de lados medindo 8cm . A área de cada um deles é $\frac{8^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, a área do losango é $2 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}\text{cm}^2$.

5. $A = \frac{4(5+7)}{2} = 24\text{cm}^2$.

6. Podemos usar o Teorema de Pitágoras para encontrarmos a altura h .

$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ h &= 4. \end{aligned}$$

Daí, segue que $A = \frac{4(6+12)}{2} = 36\text{cm}^2$.



7.

a) $A = 6 \cdot 4 = 24\text{cm}^2$.

b) Temos que a altura do paralelogramo mede $6 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$. Daí, segue que $A = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\text{cm}^2$.

8.

a) $A = (8 \cdot 5)/2 = 20$.

b) Pelo Teorema de Pitágoras, a medida do outro cateto é 12cm . Daí, segue que $A = (12 \cdot 5)/2 = 30$.

c) $A = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\text{cm}^2$.

d) $A = \frac{6 \cdot 8 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 12\sqrt{2}\text{cm}^2$.

2 Exercícios de Fixação

9. Se o perímetro é 72cm^2 , então o lado é $72/4 = 18\text{cm}$, segue que $A = 18^2 = 324\text{cm}^2$.

10. Chamando a altura de x , a base é $2x$. Temos, então, que $2x^2 = 450$. Daí segue que $x = 15$. Portanto, as dimensões do retângulo são 15cm e 30cm .

11. Sendo x e y as dimensões iniciais, temos $xy = 100$. Após as modificações nas dimensões, sua área será

$$A = 0,9x \cdot 1,1y = 0,99 \cdot 100 = 99\text{cm}^2.$$

12.

a) A altura de um triângulo de lado 8 é $(8\sqrt{3})/2 = 4\sqrt{3}$. Como o raio do círculo inscrito é a terça parte da altura do triângulo, o raio do círculo do desenho mede $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Assim, a área da região hachurada pode ser calculada pela diferença entre as áreas do triângulo equilátero e do círculo.

$$\begin{aligned} A_{hachurada} &= A_{\text{triângulo equilátero}} - A_{\text{círculo}} \\ A &= \frac{8^2\sqrt{3}}{4} - \pi \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \\ &= \frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{3} \text{cm}^2 \end{aligned}$$

- b) A área hachurada é a diferença entre as áreas do quadrado e do setor circular (quarta parte do círculo).

$$\begin{aligned} A_{hachurada} &= A_{\text{quadrado}} - A_{\text{setor}} \\ &= 10^2 - \frac{10^2\pi}{4} \\ &= 100 - 25\pi \\ &= 25(4 - \pi)cm^2 \end{aligned}$$

- c) A medida do ângulo do setor circular é $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, que equivale a $1/3$ do círculo. Temos, então

$$A = \frac{6^2\pi}{3} = 12\pi cm^2.$$

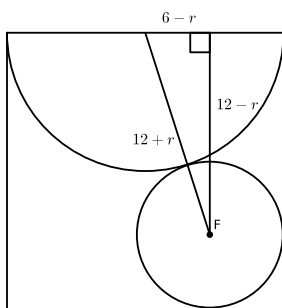
13. (Extraído do ENEM 2013) Como a área inicial era $30 \cdot 15 = 450cm^2$ e a área final ficou $(30 - 6)(15 - 3) = 288cm^2$, sua redução foi de $\frac{450 - 288}{450} = 0,36 = 36\%$. Resposta C.

14.

- a) A área hachurada é a diferença entre as áreas do setor circular e do triângulo. Temos então

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{8}\pi 8^2 - \frac{8 \cdot 8 \cdot \text{sen } 135^\circ}{2} \\ &= 24\pi - 16\sqrt{2} \\ &= 8(\pi - \sqrt{2})cm^2 \end{aligned}$$

- b) Para o cálculo do raio r , utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo formado pela reta que passa pelos centros das duas circunferências, pelo centro da circunferência menor e é perpendicular ao lado do quadrado e pelo lado do quadrado como indica a figura abaixo.



Os lados deste triângulo são $(6 + r)$, $(6 - r)$ e $(12 - r)$. Temos, então

$$\begin{aligned} (6 + r)^2 &= (6 - r)^2 + (12 - r)^2 \\ 12r &= -12r + 144 - 24r + r^2 \\ r^2 - 48r + 144 &= 0 \\ r &= 12(2 - \sqrt{3})cm \end{aligned}$$

Assim, a área do círculo menor é $\pi[12(2 - \sqrt{3})]^2 = 144(7 - 4\sqrt{3})cm^2$

- c) Traçando um segmento pelos pontos de intersecção das circunferências, teremos dois segmentos circulares, cujas áreas são a diferença entre as áreas dos setores circulares e dos triângulos gerados. A medida do ângulo destes setores é 120° , pois pode-se formar dois triângulos equiláteros ligando os centros das circunferências e seus pontos de intersecção. A distância entre estes pontos de intersecção é $4\sqrt{3}cm$, pois é o dobro da altura de um dos triângulos. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{4^2\pi}{3} - \frac{4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 120^\circ}{2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) \\ &= 4 \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right) cm^2 \end{aligned}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

15. (Extraído do ENEM 2012) A área perdida é a diferença entre as áreas inicial e final. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 15 - (5 - x)(3 - y) \\ &= 15 - 15 + 3x + 5y - xy \\ &= 5y + 3x - xy \end{aligned}$$

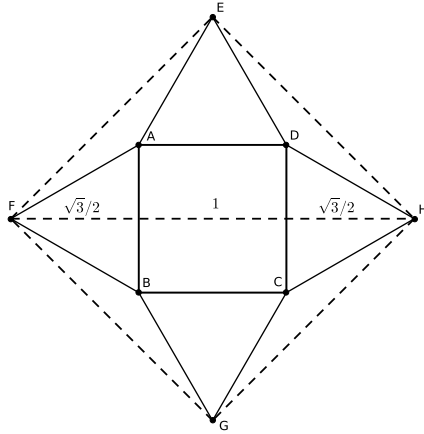
Resposta E.

16. (Extraído do ENEM 2012) Calculando a área $ABPD$, temos

$$\begin{aligned} [ABPD] &= [ABD] - [PBD] \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} - \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8}m^2 \end{aligned}$$

Consequentemente, a soma das áreas não sombreadas é $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ e a área restante é $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Temos, então, que o custo é $\frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{3}{4} \cdot 30 = 12,50 + 22,50 = R\$35,00$. Resposta B.

17. (OBM 2014) Como cada triângulo equilátero tem altura $\frac{\sqrt{3}}{2}$, as diagonais do quadrado $EFGH$ medem $1 + \sqrt{3}$, e sua área pode ser calculada como $\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$. Resposta C.



18. (Extraído da OBMEP 2005)

a) Sendo a o lado de cada quadrado, temos

$$\begin{aligned} [EFGH] &= [ABCD] - 4[AEH] \\ &= 16a^2 - 6a^2 \\ &= 10a^2 = \frac{10}{16}[ABCD] \end{aligned}$$

b) Sendo A a área do quadrado sombreado, temos

$$\begin{aligned} A &= [EFGH]/2 \\ &= \frac{10}{32}[ABCD] \\ &= 25cm^2 \end{aligned}$$

Portanto, o lado do quadrado sombreado é $5cm$.

19. (extraído da OBMEP 2005)

a) A área de cada canteiro de pedra para $x = 2$ vale $\frac{2 \cdot 8}{2} = 8$. Assim, a área do canteiro de grama é $100 - 4 \cdot 8 = 68m^2$.

b) A área de cada canteiro triangular é dada pela expressão $\frac{x(10-x)}{2}$. Assim, a área do canteiro de grama é dada por:

$$100 - 4 \cdot \frac{x(10-x)}{2} = 2x^2 - 20x + 100m^2$$

c) Como a diferença entre os preços das coberturas de pedra e grama é de 1, o custo total é o mesmo que gastar 3 por metro quadrado em todo o quadrado e 1 extra pela área dos canteiros de grama, ou seja, o custo total é:

$$3 \cdot 100 + 1 \cdot (2x^2 - 20x + 100) = 2x^2 - 20x + 400.$$

Fatorando a expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 20x + 200 &= 2(x-5)^2 + 350 \\ &\geq 0^2 + 350 \\ &= 350. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre apenas quando $x = 5$. Assim, o prefeito precisa de pelo menos $R\$150,00$ reais.

20. (OBM 2014) Como a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, as áreas dos triângulos sombreados são $8m^2$ e $18m^2$. Observando, agora, o retângulo original, sua diagonal o dividiu em dois triângulos, sendo um deles com área $24 + 8 + 18 = 50m^2$, ou seja, a área do retângulo original é $100m^2$. Resposta D.

21. (Extraído da OBM 2013)

- a) Como $A_{CBE} = A_{EDC}$, pois possuem a mesma base e mesma altura, então, decompondo ambas as áreas, $A_{ABC} + A_{ACE} = A_{ADE} + A_{ACE}$, segue que $A_{ABC} = A_{ADE}$.
- b) Traçando o segmento GH , temos, pelo item anterior, que $A_{AGH} = A_{ABC} = 5cm^2$ e $A_{DGH} = A_{DEF} = 4cm^2$. Temos então que $A_{AGDH} = A_{AGH} + A_{DGH} = 5 + 4 = 9cm^2$.

22. (Extraído da OBM 2012) Como a área total do terreno é $160 \cdot 120 - 60 \cdot 50 = 16200m^2$, cada parte deverá ter $8100m^2$. Calculando a área do trapézio $ABCP$, temos

$$\begin{aligned} [ABCP] &= 8100 \\ \frac{(120 - x + 50)100}{2} &= 8100 \\ 170 - x &= 162 \\ x &= 8m. \end{aligned}$$

Resposta B.

23. (Extraído da OBM 2012) Se P o pé da altura do $\triangle DEC$ no lado DC , então $EP = 4\sqrt{3}$. Temos que

$$\begin{aligned} [AEC] &= [AECD] - [ACD] \\ &= [AEPD] + [ECP] - [ACD] \\ &= \frac{4(6 + 4\sqrt{3})}{2} + \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} - 24 \\ &= 12 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 24 \\ &= 16\sqrt{3} - 12 \\ &= 4(4\sqrt{3} - 3). \end{aligned}$$

24. (Extraído da EPCAR 2014) Como os arcos são congruentes, o $\triangle ABC$ é equilátero, sendo 120° a medida do seu ângulo central e a medida do raio da circunferência maior o dobro do raio da menor, ou seja, 2cm . Dividiremos a área hachurada em três partes:

- i) área de $2/3$ do círculo menor, que é $2\pi/3$;
- ii) área do segmento do círculo maior, que é $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$;
- iii) área do quadrilátero formado por dois segmentos perpendiculares aos lados do triângulo partindo do centro do círculo menor, que é $\sqrt{3}$.

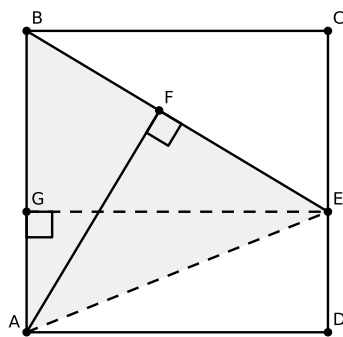
Portanto, a área hachurada é $2\pi/3 + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\pi$. Resposta A.

25. (Extraído da EPCAR 2013 - Adaptada) Sendo cada uma das cinco partes hachuradas a área de um segmento circular de uma circunferência de raio que mede a , temos que a área hachurada é $5\left(\frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

26. A área do triângulo ABE é $\frac{AB \cdot GE}{2} = 72$. Assim, aplicando a mesma fórmula de área para a base BE e a altura AF , temos:

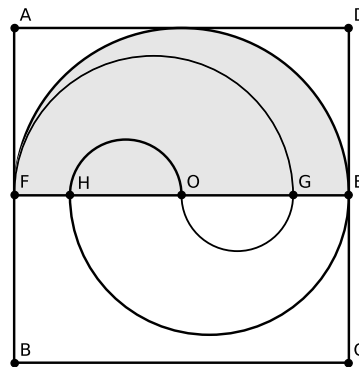
$$72 = \frac{AF \cdot BE}{2} = \frac{AF \cdot 16}{2} = 8AF.$$

Portanto, o comprimento de AF é $\frac{72}{8} = 9$.



27. Como $FH = GE$, temos $HO = FO - FH = OE - GE = OG$. Consequentemente o semicírculo de diâmetro HO possui a mesma área do semicírculo de diâmetro OG . Além disso, a área entre os arcos FG e HO é igual à área entre os arcos GO e HE . Consequentemente, a área procurada corresponde a área de um semicírculo de diâmetro FE . Como o raio do semicírculo de diâmetro FE mede 1, a área sombreada mede $\frac{1^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

28. (Extraído da OBM 2009) Temos $\angle ALK = 180^\circ - \angle KLM - \angle BLM = 180^\circ - 90^\circ - \angle BLM =$



$90^\circ - \angle BLM = \angle BLM$, ambos os ângulos $\angle KAL$ e $\angle LBM$ são retos. Como $KL = LM$, segue que os triângulos KAL e LBM são congruentes pelo caso LAA_o . Portanto, sendo $x = AK$, $AL = 4 - x$, $LB = x$ e $BM = AL = 4 - x$. Logo a área do trapézio $AKMB$ é igual a $\frac{AK + BM}{2} \cdot AB = \frac{x + (4 - x)}{2} \cdot 4 = 8$ e, conseqüentemente, a área de $CDKM$ é $4^2 - 8 = 8$. Resposta B

Observação. De fato, os trapézios $AKMB$ e $KMCD$ são iguais.