Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N1 – CICLO 1 – ENCONTRO 1

Os assuntos abordados neste encontro são:

- Paridade
- Operações com números inteiros

Para o assunto "paridade", sugerimos os seguintes materiais de apoio a aula.

- <u>Textos</u>:
  - Seções 1.1 da Apostila do PIC "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar. http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf
  - Capitulo 3 do livro: Círculos de Matemática da OBMEP – volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra - Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas

- <u>Vídeoaulas do Portal da Matemática</u>:

  Tópicos Adicionais – Módulo: "sistema de numeração e paridade" – Aula: "paridade" – Videoaulas:
  - Problemas envolvendo paridade
  - Problemas com dominós
  - Dominós, pesagens e outros problemas

Para o assunto "operações com números inteiros", sugerimos os seguintes materiais de apoio a aula.

- <u>Textos</u>:
  - Capitulo 10 do livro: Círculos de Matemática da OBMEP – volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra - Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas.

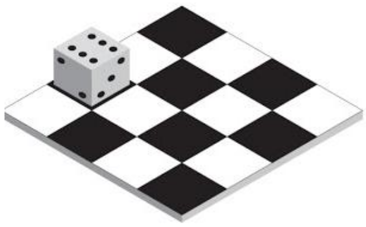
- <u>Vídeoaulas do Portal da Matemática</u>:
  - 6ª série – operações básicas – operações com números naturais – videoaulas 3, 4, 5, 6, 7 e 8 sobre adição, subtração, multiplicação e divisão: http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=60
  - 6ª série – operações básicas – operações com números naturais – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/1kephf4nypzk7.pdf

Lista de Exercícios – ONE2018 – N1 – ciclo 1 – Encontro 1
ENUNCIADOS

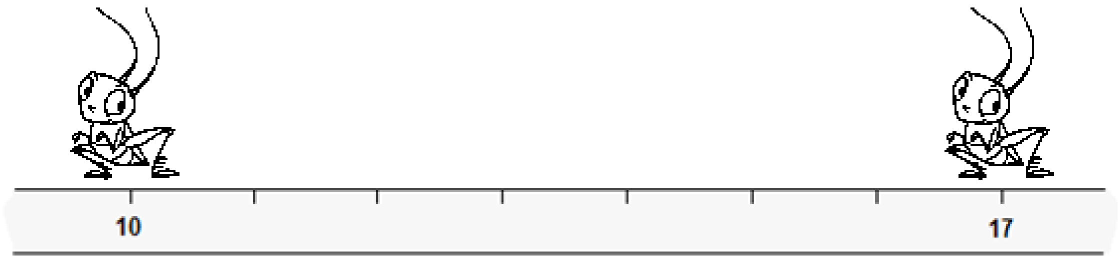
No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo desse encontro. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Atividade. [jogo das faces] Para iniciar o estudo de paridade, sugerimos que a aula comece com a adivinhação "Jogo das Faces", descrita na página 2 da apostila "encontros de aritmética".

Exercício 1. Um dado está colocado sobre uma casa preta de um tabuleiro quadriculado. Em cada jogada o dado é tombado para uma casa vizinha. Após 2017 jogadas é possível o dado voltar para a sua posição inicial?



Exercício 2. Dois grilos saltitam ao longo de uma reta graduada muito comprida. No instante inicial um grilo está na marca de 10 cm e o outro grilo está na marca de 17 cm. Se cada grilo salta 2 cm para a esquerda ou para a direita, em algum momento eles podem estar no mesmo local?



Exercício 3. Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

Exercício 4. Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100? Justifique a sua resposta.

Exercício 5. Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990? Justifique a sua resposta.

Exercício 6. Sem fazer a conta, determine se o seguinte número é par ou ímpar.

$$3\times(5731-3597)^{2017}+(9876-6789)^{1500}$$

Exercício 7. No reino da Frutilândia, existe uma árvore mágica que possui 2005 maças e 2006 tomates. Todo dia, um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maça. Após alguns dias, restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?

Atividade. [adivinhando uma soma gigante] Nesta atividade o professor adivinha o resultado de uma soma com 5 parcelas, com números digamos de 4 algarismos cada, sabendo apenas a primeira parcela fornecida pelo aluno. Como quatro das cinco parcelas não são conhecidas e como o aluno diz valores quaisquer para outras parcelas, parece impossível que o professor consiga adivinhar o resultado da soma a priori, e isso causa um efeito de muita surpresa nos alunos. Vamos descrever passo a passo como a atividade é realizada.

1º passo: o professor solicita que o aluno escreva um número com 4 algarismos. Só para ilustrar, vamos supor que, por exemplo, o aluno escreveu 5381.

2º passo: em um pedaço de papel, o professor escreve o resultado que terá a soma e entrega este papel dobrado para o aluno, sem ele ver o número, é claro. Neste caso o resultado é 25379.

Agora, alternadamente, aluno e professor escrevem números de 4 algarismos cada, um em baixo do outro, montando uma soma com 5 parcelas. (veja figura a seguir)

3º passo: o aluno escreve um número de 4 algarismos, digamos por exemplo, que ele escreveu 2843.

4º passo: logo em baixo o professor escreve o número 7156.

5º passo: agora é a vez do aluno. Ele escreve mais uma vez um número com 4 algarismos. Para ilustrar suponhamos que ele escreveu 5302.

6º passo: finalmente o professor escreve a última parcela da soma que neste caso deve ser 4697.

Agora, com os cinco números escritos um em baixo do outro, efetua-se normalmente a soma. Após esse cálculo que é relativamente grande (uma soma de 5 andares com números de 4 dígitos cada), o professor solicita que o aluno pegue o pedaço de papel que estava com ele desde o início da atividade e verifique que o número escrito é, por mais incrível que possa parecer, o resultado da soma, 25379.

$$\begin{array}{rl} 5381 & \leftarrow \text{aluno} \\ 2843 & \leftarrow \text{aluno} \\ +\ 7156 & \leftarrow \text{professor} \\ 5302 & \leftarrow \text{aluno} \\ 4697 & \leftarrow \text{professor} \\ \hline 25379 & \end{array}$$

Agora vamos explicar detalhadamente porque a adivinhação funciona.

1. Como o professor determina o resultado da soma.

   O aluno começa dizendo um número qualquer de 4 algarismos. No exemplo o número escrito inicialmente foi 5381. Para escrever o número que será o resultado da soma, deve-se apenas subtrair duas unidades desse número, obtendo 5381-2=5379 e em seguida deve-se acrescentar um algarismo 2 a esquerda desse resultado, obtendo 25379. Esse é o algoritmo utilizado pelo professor para escrever o resultado da soma: subtrai duas unidades e acrescenta um algarismos 2 a esquerda do primeiro número escrito pelo aluno.

2. Como o professor deve proceder para escrever as suas duas parcelas da soma.

   Em cada vez, o professor escreve um número que soma 9999 com o último número escrito pelo aluno. Para fazer isso, basta pensar algarismo por algarismo, interando 9 com o algarismo correspondente escrito pelo aluno.

$$\begin{array}{rcl} & 5381 & \leftarrow \text{aluno} \\ 9999 \leftarrow & \boxed{\begin{array}{c}2843\\7156\end{array}} & \begin{array}{l}\leftarrow \text{aluno}\\ \leftarrow \text{professor}\end{array} \\ 9999 \leftarrow & \boxed{\begin{array}{c}5302\\4697\end{array}} & \begin{array}{l}\leftarrow \text{aluno}\\ \leftarrow \text{professor}\end{array}\end{array}$$

Por exemplo, na segunda parcela o aluno escreveu 2843 e o professor teve que escrever o número 7156 pois 2843+7156=9999. Observe que embaixo do 3 o professor colocou 6 por 3+6=9. Embaixo do 4 o professor colocou 5 pois 4+5=9, Embaixo do 8 o professor colocou 1 pois 8+1=9. E embaixo do 2 o professor colocou 7 pois 2+7=9.

Na última parte da soma o procedimento é o mesmo. O aluno escreve um número qualquer na quarta parcela da soma, no exemplo 5302, e o professor teve que escrever o número 4697 pois 5302+4697=9999. Observe que o professor pode pensar em um algarismo de cada vez: embaixo do 2 coloca o 7 pois 2+7=9; embaixo do 0 coloca o 9 pois 0+9=9; embaixo do 3 coloca o 6 pois 3+6=9 e embaixo do 5 coloca o 4 pois 5+4=9.

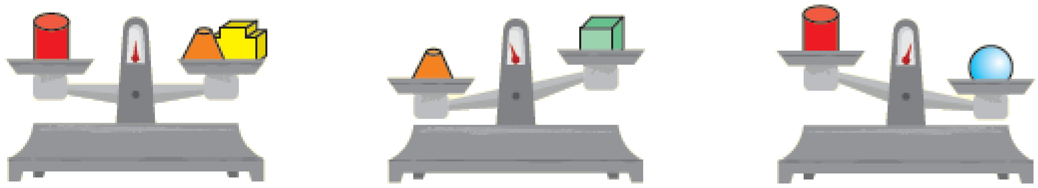
3. Porque a adivinhação funciona.

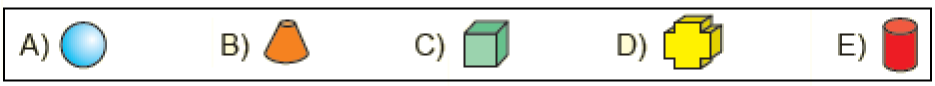
   O aluno começa escrevendo um número A com 4 algarismos. Em seguida são acrescentadas mais quatro parcelas B, C, D e E formando a soma A+B+C+D+E. As parcelas C e E são ditas pelo professor de modo que B+C=9999 e D+E=9999. Daí a soma das cinco parcelas fica assim: A+B+C+D+E=A+(B+C)+(D+E)=A+9999+9999. Como 9999=10000-1, podemos escrever que A+B+C+D+E=A+(10000-1)+(10000-1) e portanto

$$A+B+C+D+E = A - 2 + 20000$$

   Assim, se o professor proceder como explicado, o resultado da soma pode ser obtido subtraindo 2 do primeiro número escrito pelo aluno e em seguida somando 20000 a este resultado. Como os números possuem quatro algarismos, para acrescentar 20000 basta colocar um algarismo 2 do lado esquerdo do número.

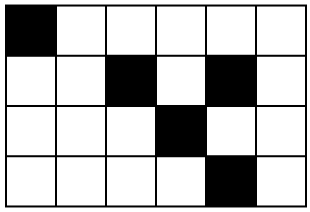
Exercício 8. (OBMEP 2017 – 1ª fase – N1Q1) Nas balanças da figura, os objetos iguais têm pesos iguais. Qual dos objetos é o mais pesado?





Exercício 9. (OBMEP 2005 – 1ª fase – N1Q6) Marina, ao comprar uma blusa de R$ 17,00, enganou-se e deu ao vendedor uma nota de R$ 10,00 e outra de R$ 50,00. O vendedor, distraído, deu o troco como se Marina lhe tivesse dado duas notas de R$ 10,00. Qual foi o prejuízo de Marina?

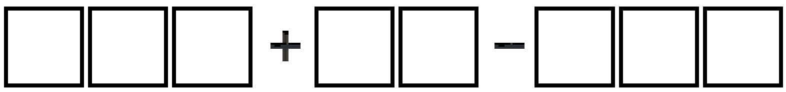
Exercício 10. (OBMEP 2017 – 1ª fase – N1Q3) Na figura, quantos quadradinhos brancos ainda devem ser pintados de preto para que o número total de quadradinhos pretos passe a ser o dobro do número de quadradinhos brancos?



Exercício 11. (OBMEP 2006 – 1ª fase – N1Q6) Pedro vende na feira cenouras a R$ 1,00 por quilo e tomates a R$ 1,10 por quilo. Certo dia ele se distraiu, trocou os preços entre si, e acabou vendendo 100 quilos de cenoura e 120 quilos de tomate pelos preços trocados. Quanto ele deixou de receber por causa de sua distração?

Exercício 12. (Banco de Questões 2017 – nível 1 – questão 1) Um cachorro avista um gato que está a 30 m de distância e começa a persegui-lo. Ambos começam a correr em linha reta, no mesmo sentido e com passadas sincronizadas. O cachorro se desloca 50 cm a cada passada enquanto o gato se desloca apenas 30 cm. Depois de quantas passadas o cachorro alcançará o gato? Justifique sua resposta.

Exercício 13. (OBMEP 2017 – 1ª fase – N1Q4) Vânia preencheu os quadradinhos da conta abaixo com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Ela usou todos os algarismos e obteve o maior resultado possível. Qual foi esse resultado?



Exercício 14. (OBMEP 2017 – 1ª fase – N1Q10) Em uma mesa há nove cartões numerados de 1 a 9. Ana e Beto pegaram três cartões cada um. A soma dos números dos cartões de Ana é 7 e a soma dos números dos cartões de Beto é 23. Qual é a diferença entre o maior e o menor dos números dos três cartões deixados sobre a mesa?

Comentários sobre atividade: jogo das faces.
O Jogo das Faces está enunciado, comentado e resolvido nas páginas 2-4 da apostila Encontros de Aritmética.

Ao executar esta atividade para uma turma grande de alunos, sugerimos trocar as moedas por folhas de papel, cada uma delas branca de um lado e colorida do outro lado, apoiadas, por exemplo, no porta giz do quadro verde em frente à sala. As moedas também podem ser trocadas por outros objetos como cartas de baralho ou copos, uns com a boca para cima e outros com a boca para baixo. Deste modo, esta é uma atividade de recreação matemática interessante que pode ser aplicada mesmo fora do ambiente da sala de aula.

Solução do Exercício 1. A cada jogada o dado sai de uma casa preta para uma casa branca ou o contrário, ele sai de uma casa branca para uma casa preta. Assim ao longo das jogadas, são alternadas as casas ocupadas pelo dado: preto-branco-preto-branco-etc. Após um número ímpar de jogadas o dado está em uma casa branca e após um número par de jogadas o dado está em uma casa preta. Como 2017 é ímpar, após 2017 jogadas o dado está em uma casa branca. Como ele iniciou em uma casa preta, após 2017 jogadas ele não pode voltar para a sua posição inicial.

Solução do Exercício 2. O gripo que está inicialmente na marca de 10 cm só pode ocupar pontos marcados com números da forma 10+2n, em que n é um número inteiro positivo ou negativo. Isto significa que este grilo só ocupa posições marcadas com números pares. Já o grilo que está inicialmente na marca de 17 cm, ocupa posições marcadas com números da forma 17+2m, em que m é um número inteiro positivo ou negativo. Ou seja, este grilo só ocupa posições marcadas com números ímpares. Como um número par sempre é diferente de um número ímpar, estas duas observações implicam que os grilos nunca podem ocupar o mesmo ponto da reta graduada.

Solução do Exercício 3.
Este é o problema proposto 3.8 do livro Círculos Matemáticos da OBMEP.

Com Kátia tem o dobro da idade de Pedro, vemos que a idade de Kátia é um número par. Agora como Raul tem 2 anos a mais que Kátia, então a idade de Raul também é um número par e nada impede de essas duas afirmações serem verdadeiras. Já a afirmação de que Raul tem 17 anos é falsa, pois 17 é um número ímpar. Logo Pedro mentiu.

Comentários sobre o Exercício 4.
Este é o exercício 2 da página 4 da apostila Encontros de Aritmética.

Um dos objetivos do estudo de paridade é explorar algumas propriedades dos números pares e ímpares, tais como:

- A soma de dois números pares é um número par.
- A soma de dois números ímpares é um número par.
- A soma de um par com um ímpar é um número ímpar.
- O produto de dois números pares é um número par.
- O produto de dois números ímpares é um número ímpar.
- O produto de um número par por um número qualquer é par.

No exercício, pergunta-se se é possível escrever o número 100 como uma soma a+b+c+d+e de cinco números ímpares. Vamos analisar esta soma por partes.

- a+b é um número par, pois é a soma de dois ímpares.
- Somando c, vemos que (a+b)+c é ímpar pois é a soma de um número par a+b com um número ímpar c.
- Somando d, vemos que (a+b+c)+d é par pois é a soma de um número ímpar a+b+c com um outro número ímpar d.
- Finalmente, somando e, vemos que (a+b+c+d)+e é ímpar pois é a soma de um número par a+b+c+d com um número ímpar e.

Portanto, nunca conseguimos escrever o número 100 (que é par) como a soma a+b+c+d+e (que é ímpar) de cinco números ímpares.

Solução do Exercício 5.
Este é o exercício 6 da página 6 da apostila Encontros de Aritmética.

Em cada página do caderno, de um lado está escrito um número ímpar e do outro lado está escrito um número par. Assim Vitor somou 25 números ímpares (obtendo um número ímpar) e somou 25 números pares (obtendo um número par). Como a soma de um número ímpar com um número par é um número ímpar, esta soma não pode ser igual ao número 1990, pois esse número é par.

Solução do Exercício 6. A solução deste exercício deve ficar mais fácil depois de serem discutidas as propriedades apresentadas na solução do exercício 1. Aqui também vamos analisar o número dado por partes.

$$3\times(5731-3597)^{2017}+(9876-6789)^{1500}$$

- A diferença $5731-3597$ é um número par, pois é a diferença entre dois números ímpares.
- A potência $(5731-3597)^{2017}$ é um número par, pois ela representa uma multiplicação de vários números pares.
- O produto $3\times(5731-3597)^{2017}$ é par, pois é o resultado da multiplicação de um número ímpar por um número par.
- Na outra parcela da soma, a diferença $9876-6789$ é um número ímpar, pois é a diferença entre um par e um ímpar.
- A potência $(9876-6789)^{1500}$ é um número ímpar, pois ela representa uma multiplicação de vários números ímpares.
- Concluímos então que na expressão dada, a primeira parcela da soma é par e a segunda parcela da soma é ímpar. O resultado da soma é, portanto, ímpar.

Solução do Exercício 7.
Este é o problema resolvido 3.1 do livro Círculos Matemáticos da OBMEP.

Em primeiro lugar observe que a cada dia o garoto come duas frutas e que nasce uma fruta na árvore. Logo, a cada dia, diminui uma fruta da árvore. Como no início tínhamos 2005+2006=2011 frutas, após 2010 dias restará apenas uma fruta na árvore. O que se deseja saber é se esta fruta é maça ou tomate.

Suponhamos que em um determinado dia existiam M maças e T tomates na árvore. A tabela a seguir apresenta a quantidade de frutas que existirá na árvore no outro dia, após o garoto comer duas e nascer uma fruta na árvore.

	maças	tomates
comeu 2 maças	M-2	T+1
comeu 2 tomates	M	(T-2)+1
comeu 1 maça e 1 tomate	(M-1)+1	T-1

Observe que a quantidade de maças ou fica inalterada ou fica diminuída de 2 unidades. Portanto, a paridade da quantidade de maças não se altera ao longo dos dias. Como no início tínhamos 2005 maças, podemos concluir que em todos os outros dias continuaremos tendo uma quantidade ímpar de maças. Assim, no último dia, quando existir UMA fruta de um tipo e ZERO fruta de outro tipo, esta última fruta da árvore deve ser maça, pois nunca a quantidade de maças na árvore será um número par, e zero é par.

Observação: chegaríamos a esta mesma conclusão para qualquer quantidade inicial ímpar de maças e qualquer quantidade inicial par de tomates na árvore. Aparentemente o resultado poderia ser mais surpreendente se no início tivéssemos, por exemplo, 1 maça e 1000 tomates na árvore. Ou um outro extremo como por exemplo, 2017 maças e 2 tomates.

Comentários sobre a atividade: adivinhando uma soma gigante.
A atividade foi apresentada para uma soma de números com 4 algarismos cada um. Procedendo exatamente como foi explicado, ela pode ser generalizada para uma soma de números com 5 ou mais algarismos. Para ver uma descrição dessa atividade veja o seguinte vídeo Mágica da adivinhação da soma gigante e para ver uma descrição da solução, assista Revelação da mágica de adivinhação da soma. Observação: nestes vídeos é imposta a condição de que no primeiro número escrito pelo aluno, o último algarismo não pode ser igual a 0 e nem a 1. Na verdade, esta restrição não é necessária. E na solução apresentada no vídeo, é afirmado que o algarismo da dezena do resultado da soma é igual ao algarismo da dezena do primeiro número escrito pelo aluno. Sem a imposição da condição, esta afirmação é falsa, como você pode verificar no próprio exemplo apresentado na descrição desta adivinhação, escrita neste roteiro. Este comentário é apenas um alerta para termos uma postura crítica em relação a conteúdos disponibilizados na internet.

Solução do Exercício 8. (Prova 1ª fase OBMEP 2017 – N1 – questão 1)
Observamos na primeira balança que o objeto  tem o mesmo peso que a soma dos pesos de  e . Consequentemente, o peso de  é maior do que o peso de cada um dos outros dois objetos. A segunda balança evidencia que o peso de  é maior do que o peso de . Logo,  é o mais pesado dentre os quatro objetos verificados até este momento. Por outro lado, a terceira balança indica que  é mais pesado do que . Portanto,  é o mais pesado dentre os cinco objetos avaliados. Evidentemente a expressão “pesos iguais” indica “massas iguais”.

Solução do Exercício 9. (Prova 1ª fase OBMEP 2005 – N1 – questão 6)
Marina entregou para o vendedor 10+50=60 reais. E recebeu de volta 20-17=3 reais. Portanto Marina gastou 60-3=57 reais. Como ela deveria ter gasto 17 reais, o seu prejuízo foi de 57-17=40 reais. Observe que este é o valor da diferença 50-10=40 entre o valor da nota que ela entregou para a vendedora e o valor da nota que ela deveria ter entregado. Ou seja, é o valor da distração que ela pago por trocar uma nota de 10 por uma nota de 50 reais. Esta observação mostra que o prejuízo de Marina não depende do preço da blusa e sim apenas da sua distração.

Solução do Exercício 10. (Prova 1ª fase OBMEP 2017 – N1 – questão 3)
No inicio, dos 24 quadradinhos existentes, 5 são pretos e 19 são brancos. Para que a quantidade de pretos seja o dobro da quantidade de brancos, devemos dividir 24 por 3, pegar duas partes para os pretos e pegar uma parte para os brancos. Ou seja, devemos ficar com $2 \times \frac{24}{3} = 16$ quadradinhos pretos e $\frac{24}{3} = 8$ quadradinhos brancos. Como tínhamos apenas 5 quadradinhos pretos, devemos pintar 16-5=11 quadradinhos brancos de pretos.

Solução do Exercício 11. (Prova 1ª fase OBMEP 2006 – N1 – questão 6)
Se Pedro não tivesse trocados os preços, a quantia que ele deveria receber seria $100 \times 1{,}00 + 120 \times 1{,}20 = 232{,}00$. Mas como ele trocou os preços, a quantia que ele recebeu foi $100 \times 1{,}10 + 120 \times 1{,}00 = 230{,}00$. Logo, por causa de sua distração, ele perdeu 232 – 230 = 2 reais.

Solução do Exercício 12. No início, a distância entre o cachorro e o gato é de 30 m = 3000 cm. A cada passada, a distância entre o cachorro e o gato é reduzida em 50-30=20 cm. Deste modo podemos ver como a distância entre o cachorro e o gato diminui a cada passada.

Quantidade de passadas	Distância (cm)
0	3000
1	3000 – 20
2	3000 – 2x20
3	3000 – 3x20

Daí vemos que a distância vai ser igual a zero exatamente quando acharmos um múltiplo de 20 que é igual a 3000. Para achar esse múltiplo basta dividir $\frac{3000}{20} = 150$.
Portanto, após 150 passadas o cachorro alcançará o gato.

Solução do Exercício 13. (Prova 1ª fase OBMEP 2017 – N1 – questão 4)
Vamos representar a conta desejada por ABC + DE – FGH em que cada uma das letras é um algarismo de 1 até 8. Para obter o maior resultado possível, devemos fazer com que os termos que contribuem positivamente na conta sejam os maiores possíveis e o termo que contribui negativamente seja o menor possível. Como estamos usando o sistema de numeração posicional decimal, na primeira parcela da conta devemos colocar o maior dos algarismos disponíveis (o algarismo 8) na casa das centenas:

8BC + DE – FGH

A seguir, colocamos o segundo maior algarismo (o 7) na casa das dezenas. Há duas possibilidades:

87C + DE – FGH

ou

8BC + **7**E – FGH

Agora, em cada uma dessas possibilidades, colocamos o algarismo 6, ainda na casa das dezenas. Obtemos os números:

87C + **6**E – FGH

ou

86C + **7**E – FGH

Continuando devemos colocar os algarismos 5 e 4 na cada da unidade em cada uma das duas possibilidades anteriores. Podemos obter quatro somas possíveis.

875 + **64** – FGH
874 + **65** – FGH

ou

865 + **74** – FGH
864 + **75** – FGH

Basta agora completar o termo negativo com o número 123 que é o menor número que pode ser formado com os algarismos restantes 1, 2 e 3. Em suma, o maior resultado possível pode ser obtido de quatro maneiras diferentes:

875 + **64** – **123**
874 + **65** – **123**

ou

865 + **74** – **123**
864 + **75** – **123**

O resultado dessas quatro contas é sempre o mesmo: 816.

Solução do Exercício 14. (Prova 1ª fase OBMEP 2017 – N1 – questão 10)

- A menor soma possível de três cartões é 1+2+3=6. Daí a única possibilidade para obter soma 7 é 1+2+4=7. Portanto Ana pegou os cartões 1, 2 e 4.
- A maior soma possível de três cartões é 7+8+9=24. Assim a única possibilidade para obter soma 23 é 6+8+9=23. Portanto Beto pegou os cartões 6, 8 e 9.

Assim, ficaram sobre a mesa os cartões 3, 5 e 7. A diferença entre o maior e o menor é igual a 7 – 3 = 4.

Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N1 – CICLO 1 – ENCONTRO 2

Assuntos a serem abordados:

- Frações como razões ou como porcentagens
- Razões e proporções

Livro com exercícios resolvidos e propostos:
Capitulo 10 do livro: Círculos de Matemática da OBMEP – volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra - Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas.

Videoaulas do Portal da Matemática:
Na 6ª série do ensino fundamental, recomendamos as videoaulas dos módulos:

- Fração, o primeiro contato
- Fração como porcentagem e como probabilidade

Materiais de apoio a aula:

- 6ª série – frações o primeiro contato – frações e suas operações – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8adw8gkagd8gk.pdf
- 6 ª série – frações o primeiro contato – frações e suas operações – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/a2q8zswiivk84.pdf
- 6 ª série – frações o primeiro contato – frações como razões – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5fq08opbilc08.pdf
- 6 ª série – frações o primeiro contato – frações como razões – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/8aen0s25bi4gc.pdf
- 6 ª série – frações como porcentagem e como probabilidade – frações como porcentagem – material teórico: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gg1tu0jgh48os.pdf
- 6 ª série – frações como porcentagem e como probabilidade – frações como porcentagem – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/8273i1lufyckc.pdf
- 6 ª série – operações básicas – operações com números na forma decimal – caderno de exercícios: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/z7tvdgxw8b47.pdf

Lista de Exercícios – ONE2018 – N1 – ciclo 1 – Encontro 2
ENUNCIADOS

Exercício 1. Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e morango; e o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Então, é CORRETO afirmar que, nessa compra, a fração correspondente à quantidade de sorvete do sabor chocolate foi

A) 2/5
B) 3/5
C) 5/12
D) 5/6

Exercício 2. (OBMEP 2005 – 1ª fase - N2Q18) Dois meses atrás o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês foi feito 1/3 da obra e no segundo mês mais 1/3 do que faltava. A que fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola?

Exercício 3. (OBMEP 2006 – 1ª fase – N2Q11) Um fabricante de chocolate cobrava R$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou R$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?

Exercício 4. Em um grupo de jovens, $\frac{4}{7}$ do total são meninos e o restante do grupo é formado por meninas. Se forem retirados 12 meninos do grupo, a quantidade de meninos fica igual à quantidade de meninas. Qual era a quantidade inicial de jovens no grupo?

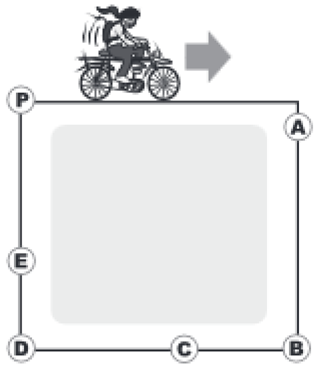
Exercício 5. (OBMEP 2017 – 2ª fase – N1Q3) André, Bernardo e Carlos retiraram, respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{14}$ do total de doces de um pote.

(a) Quem retirou o menor número de doces?
(b) A quantidade de doces que restou no pote corresponde a que fração do total?
(c) André deu 15 doces a Carlos e ficou com o mesmo número de does que Bernardo. Quantos doces havia inicialmente no pote?

Exercício 6. (OBMEP 2012 – 1ª fase – N1Q7) A figura mostra uma reta numerada na qual estão marcados pontos igualmente espaçados. Os pontos A e B correspondem, respectivamente, aos números $\frac{7}{6}$ e $\frac{19}{6}$. Qual é o número que corresponde ao ponto C?

Exercício 7. (OBMEP 2015 – 1ª fase – N1Q11) Pedrinho colocou 1 copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é o percentual de suco na jarra?

Exercício 8. (OBMEP 2007 – 1ª fase – N1Q6) Sueli resolveu dar uma volta em torno de uma praça quadrada. Ela partiu do vértice P, no sentido indicado pela flecha, e caiu ao atingir 3/5 do percurso total. Qual dos pontos A, B, C, D, E ou P indicados na figura corresponde ao lugar em que Sueli caiu?



Exercício 9. Sem utilizar uma calculadora, coloque as seguintes quatro frações em ordem crescente.

$$\frac{3}{7} \qquad \frac{7}{17} \qquad \frac{8}{19} \qquad \frac{13}{31}$$

Exercício 10. (OBMEP 2006 – 1ª fase – N1Q16) Em uma caixa quadrada há 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, e numa caixa redonda há 6 bolas, todas pretas. Paula quer que tanto na caixa quadrada quanto na redonda a razão entre a quantidade de bolas brancas e o total de bolas em cada caixa seja a mesma. Quantas bolas brancas Paula precisa tirar da caixa quadrada e passar para a caixa redonda?

Exercício 11. (OBMEP 2006 – 1ª fase – N3Q2) Qual dos seguintes números está mais próximo de 1?

(A) $1+\frac{1}{2}$ (B) $1-\frac{1}{8}$ (C) $1+\frac{1}{5}$

(D) $1-\frac{1}{3}$ (E) $1+\frac{1}{10}$

Exercício 12. (OBM 2010 – 1ª fase – N1Q3) Aumentando 2% o valor de um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?

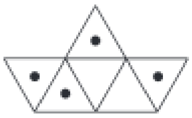
Exercício 13. (OBM 2008 – 1ª fase – N1Q7) Uma classe tem 22 alunos 18 alunas. Durante as férias, 60% de todos os alunos dessa classe foram prestar trabalho comunitário. No mínimo, quantas alunas participaram desse trabalho?

Exercício 14. Em uma prova de Matemática com apenas duas questões:

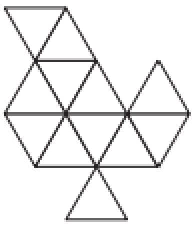
- 470 alunos acertaram somente uma das questões
- 260 alunos acertaram a segunda questão
- 90 alunos acertaram as duas questões
- 210 alunos erraram a primeira questão

Quantos alunos fizeram a prova?

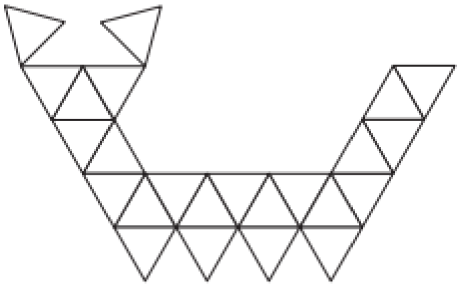
Exercício 15. (OBMEP 2008 – 2ª fase – N1Q1) Nesta questão todas as figuras são formadas por triângulos iguais. Veja como Chico Bento marcou 2/3 dos triângulos da figura a seguir.



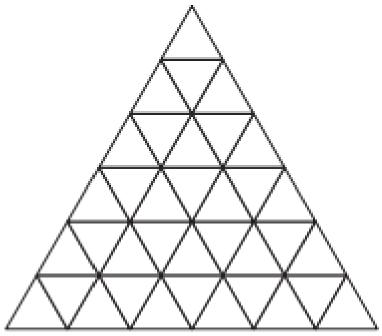
(a) Agora, marque você 3/4 dos triângulos da figura a seguir. Quantos triângulos você marcou?



(b) Ajude Chico Bento marcando mais que 1/4 e menos que 1/3 dos triângulos da figura a seguir. Quantos triângulos você marcou?



(c) Chico Bento marcou 7/12 dos triângulos da figura a seguir com a letra C e Doralina, por sua vez, marcou 3/4 dos triângulos com a letra D, de modo que todos os triângulos ficaram marcados. O número de triângulos marcados com duas letras corresponde a qual fração do número total de triângulos?



Exercício 16. (OBMEP 2012 – 2ª fase – N1Q3) Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou 1/5 das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou 1/5 das jabuticabas restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.

(a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?
(b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas? Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?
(c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

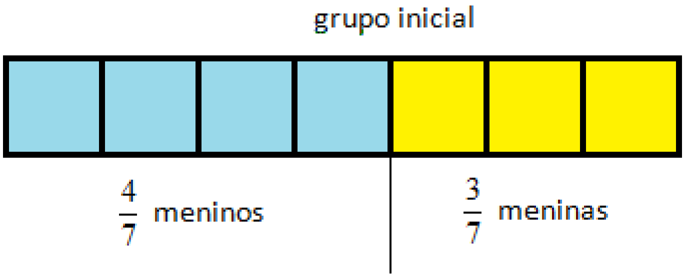
Solução do Exercício 1. (Primeira solução) A quantidade de chocolate no pote de três sabores corresponde a $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ do total de sorvete comprado, pois apenas um pote corresponde a metade do total de sorvete e neste pote apenas um terço tem chocolate. Já a quantidade de chocolate no pote de dois sabores corresponde a $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ do total de sorvete comprado, pois apenas um pote corresponde a metade do total de sorvete e neste pote apenas a metade tem chocolate. Somando, vemos que $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ do total de sorvete comprado corresponde ao sabor chocolate.

(Segunda solução) Como um pote tem três sabores e o outro pote tem dois sabores, vamos supor que cada pote tem, digamos, 600 ml de sorvete. Aqui escolhemos 600 pois este é um número fácil de dividir por 3 e por 2. Deste modo, no pote de 3 sabores temos 600÷3=200 ml de chocolate, e no pote com dois sabores temos 600÷2=300 ml de chocolate. Ao todo foram comprados 1200 ml de sorvete e desse total, 200+300=500 ml são do sabor chocolate. A proporção de chocolate em relação ao todo comprado é igual a $\frac{500}{1200}=\frac{5}{12}$.

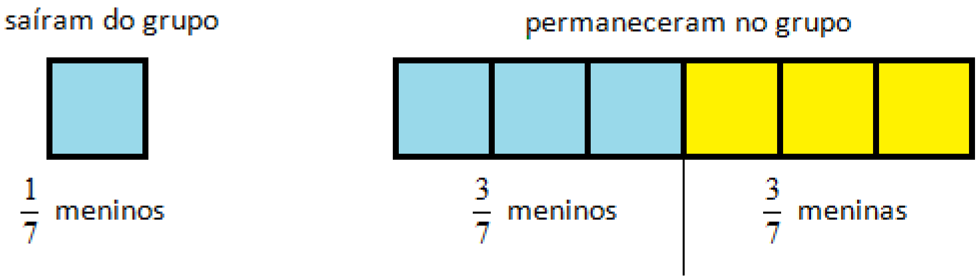
Solução do Exercício 2. (Prova 1ª fase OBMEP 2005 – N2 – questão 18)
No primeiro mês foi construído $\frac{1}{3}$ da escola, restando assim $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ da escola para serem construídos. Logo, no segundo mês foi construído $\frac{1}{3}$ dos $\frac{2}{3}$ restantes, isto é, $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ da escola. Portanto, nos dois meses foram construídos $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$ da escola, e falta construir $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ da escola.

Solução do Exercício 3. (Prova 1ª fase OBMEP 2006 – N2 – questão 11)
Inicialmente o fabricante cobrava R$ 20,00 por quilo e passou, com o aumento de preço, a cobrar R$ 25,00 por quilo. Logo o aumento do preço foi de R$ 5,00 por quilo. Como preço inicial era de R$ 20,00 e aumentou R$ 5,00 o aumento percentual foi de $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0{,}25=25\%$.

Solução do Exercício 4. A figura a seguir ilustra o grupo inicial dividido em 7 partes iguais, sendo que $\frac{4}{7}$ do grupo são de meninos e o restante $1-\frac{4}{7}=\frac{7-4}{7}=\frac{3}{7}$ do grupo é formado só de meninas.



Já na figura a seguir vemos que para a quantidade de meninos ficar igual a quantidade de meninas, podem ser retirados apenas meninos, e essa quantidade de meninos corresponde a $\frac{1}{7}$ de todo o grupo ou, se preferir, $\frac{1}{4}$ do total de meninos no grupo.



Como $\frac{1}{7}$ do total de pessoas no grupo corresponde a 12 meninos, podemos concluir que no grupo existem 7x12=84 pessoas.

Exercício 5. (Prova 2ª fase OBMEP 2017 – N1 – questão 3)

(a) Para comparar as frações, vamos escrevê-las como frações equivalentes, todas com o mesmo denominador 14, para depois comparar os numeradores. André retirou $\frac{1}{2}=\frac{7}{14}$ do pote, Bernardo retirou $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}$ do pote e Carlos retirou $\frac{1}{14}$ do pote. Logo, quem retirou o menor número de doces foi Carlos.

(b) A fração que representa o total de doces no pote é $1=\frac{14}{14}$. Portanto, a fração que representa a quantidade dos doces que restaram no pote em relação ao total de doces é

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{1}{14}\right) = 1-\left(\frac{7}{14}+\frac{4}{14}+\frac{1}{14}\right) = \frac{14}{14}-\frac{12}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

(c) O número de doces de André, que é $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$, menos 15 doces é igual ao número de doces de Bernardo, que é $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$, Logo, o número de doces de André é igual ao número de doces de Bernardo somado a 15. Portanto, a diferença entre o número de doces de André e o número de doces de Bernardo é igual a 15. Ou seja $\frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{7}{14} - \frac{4}{14} = \frac{3}{14}$ corresponde a 15 doces. Se $\frac{3}{14}$ do pacote corresponde a 15 doces, então a terça parte desta quantidade, isto é $\frac{1}{14}$ do pacote, corresponde a 5 doces, já que $\frac{1}{3} \times 15 = 5$. Deste modo, o número de doces do pacote é $14 \times 5 = 70$.

Solução do Exercício 6. (Prova 1ª fase OBMEP 2012 – N1 – questão 7)
A distância entre os pontos A e B é $\frac{19}{6} - \frac{7}{6} = \frac{12}{6}$. O segmento AB está dividido em quatro partes iguais. O comprimento de cada uma dessas partes é então $\frac{12}{6} \div 4 = \frac{12}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{6}$. Logo o ponto C corresponde ao número $\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Solução do Exercício 7. (Prova 1ª fase OBMEP 2015 – N1 – questão 11)
Inicialmente Pedrinho colocou 1 copo de suco na jarra. Em seguida, acrescentou 4 copos de água, totalizando um volume de 5 copos na jarra. Para dobrar o volume Pedrinho colocou mais 5 copos de água, totalizando um volume de 10 copos, sendo 1 de suco e 9 de água. Assim, o percentual é de 1 em 10, ou seja, 10%.

Solução do Exercício 8. (Prova 1ª fase OBMEP 2007 – N1 – questão 6)
Como Sueli quer dar uma volta completa, os pontos B e D correspondem, respectivamente, a 1/2 e a 3/4 do percurso. Como 3 /5 é maior do que 1 /2 , vemos que Sueli percorreu mais da metade do caminho, e portanto ultrapassou o ponto B. Por outro lado, como 3/5 é menor do que 3/4 , vemos que Sueli não chegou ao ponto D. Concluímos que ela caiu entre os pontos B e D, ou seja no ponto C. Podemos também resolver esse problema como segue. O trajeto da Sueli consiste dos 4 lados do quadrado, logo ela caiu quando chegou a 3/5 x 4 = 12/5 de um lado. Como 12/5 = 10/5 + 2/5 = 2 + 2/5, vemos que Sueli caiu depois de percorrer 2 lados completos e mais 2/5 de um lado. Com os 2 lados ela chegou ao ponto B, mas como 2/5 é menor que 1 ela não chegou ao ponto D. Como antes, vemos que ela caiu no ponto C.

Solução do Exercício 9. Para resolver este exercício você poderia colocar todas as frações em um mesmo denominador calculando $mmc(7,17,19,31) = 7 \times 17 \times 19 \times 31$ pois todos esses quatro números são primos. De maneira equivalente, você também pode comparar frações multiplicando em cruz, como está ilustrado a seguir.

- Comparando as duas primeiras frações vemos que $\frac{7}{17} < \frac{3}{7}$ pois $49 < 51$.
- Agora, considerando a terceira fração, $\frac{7}{17} < \frac{8}{19}$ pois $133 < 136$ e $\frac{8}{19} < \frac{3}{7}$ pois $56 < 57$. Até aqui já temos a ordenação das três primeiras frações: $\frac{7}{17} < \frac{8}{19} < \frac{3}{7}$.
- Considerando agora a última fração, temos que $\frac{7}{17} < \frac{13}{31}$ pois $217 < 221$ e $\frac{13}{31} < \frac{8}{19}$ pois $247 < 248$.

Daí vemos que a ordem das frações é $\frac{7}{17} < \frac{13}{31} < \frac{8}{19} < \frac{3}{7}$.

Solução do Exercício 10. (Prova 1ª fase OBMEP 2006 – N1 – questão 16)
(Primeira solução) Cada vez que se passa uma bola branca da caixa quadrada para a redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas na caixa quadrada diminui de 1. Já na caixa redonda, tanto o número de bolas brancas quanto o total de bolas aumenta de 1.

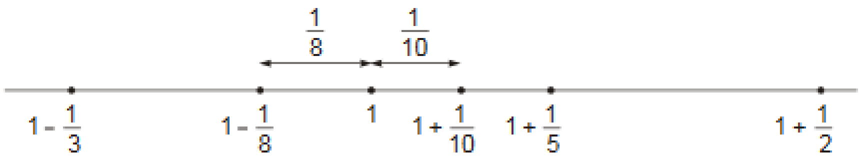
Número de bolas brancas passadas da caixa quadrada para a redonda	0	1	2	3	4
Caixa quadrada: $\frac{bolas\ brancas}{total\ \ de\ bolas}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{2}$
Caixa redonda: $\frac{bolas\ brancas}{total\ \ de\ bolas}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$

Como $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, Paula terá que passar 3 bolas brancas da caixa quadrada para a redonda.

(Segunda solução). Seja x a quantidade de bolas brancas que Paula deve passar da caixa quadrada para a redonda. Igualando a razão entre o número de bolas brancas e o número total de bolas em cada caixa, obtemos a equação $\frac{4-x}{6-x} = \frac{x}{6+x}$. Resolvendo esta equação obtemos $x = 3$.

Solução do Exercício 11. (Prova 1ª fase OBMEP 2006 – N3 – questão 2)
Primeira solução. O número que está mais próximo de 1 é aquele que é maior ou menor do que 1, mas que está a menor distância de 1. Como todas as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{10}$ apresentadas nas alternativas possuem o mesmo numerador, a menor fração é a de maior denominador. Logo a menor fração é $\frac{1}{10}$ e o número que está mais próximo de 1 é $1 + \frac{1}{10}$.

Segunda solução. Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ temos que $1+\frac{1}{10} < 1+\frac{1}{5} < 1+\frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{8} < \frac{1}{3}$ temos que $1-\frac{1}{3} < 1-\frac{1}{8}$. Logo estes números estão dispostos na reta como indica a figura a seguir.



Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$ segue que o número mais próximo de 1 é $1+\frac{1}{10}$.

Solução do Exercício 12. (Prova 1ª fase OBM 2010 – N1 – questão 3)
Este também é o problema proposto 10.26 do livro Círculos Matemáticos da OBMEP.

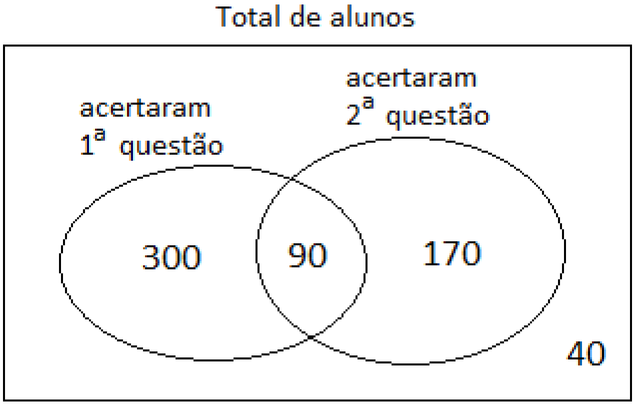
Como um aumento de 2% no valor do número corresponde a chegar no seu sucessor, vemos que 2% do número corresponde a 1. Multiplicando por 50, vemos que 100% do número corresponde a 50. Logo o número é 50. O seu sucessor é 51. E a soma desses dois números é 50 + 51 = 101.

Solução do Exercício 13. (Prova 1ª fase OBM 2008 – N1 – questão 7)
Este é o problema proposto 10.28 do livro Círculos Matemáticos da OBMEP.

A classe tem 22+18=40 alunos. Entre esses alunos, 60% foram prestar trabalho comunitário. Ou seja, $\frac{60}{100} \times 40 = 24$ alunos foram prestar trabalho comunitário. Para que o número de meninas seja o menor possível, o número de meninos deve ser o maior possível. Então para que o número de meninas seja mínimo, os 22 meninos da classe deveriam ter prestado trabalho comunitário. Neste caso, o número mínimo de meninas é 24 – 22 = 2 meninas.

Solução do Exercício 14.

Para resolver esta questão podemos fazer uma representação de conjuntos como a que está ilustrada a seguir. Na bolinha da esquerda estão indicando os alunos que acertaram a 1ª questão; na bolinha da direita estão indicando os alunos que acertaram a 2ª questão; e fora das bolinhas estão indicando os alunos que erraram as duas questões da prova.



Podemos preencher as quantidades indicadas no diagrama anterior do seguinte modo:

- Sabemos que 90 alunos acertaram as duas questões. Logo podemos escrever o número 90 na interseção das duas bolinhas.
- Sabemos que 260 alunos acertaram a 2ª questão. Mas como já temos 90 alunos neste conjunto, vemos que 260 – 90 = 170 alunos acertaram apenas a 2ª questão.
- Sabemos que 470 alunos acertaram apenas uma das questões. Como 170 alunos acertaram apenas a 2ª questão, vemos que 470 – 170 = 300 alunos acertaram apenas a primeira questão.
- Finalmente, sabemos que 210 alunos erraram a 1ª questão. Como 170 alunos só acertaram a 2ª questão e, portanto erraram a 1ª questão, vemos que 210 – 170 = 40 alunos erraram as duas questões.

Portanto a quantidade de alunos que fizeram a prova foi de 300 + 90 + 170 + 40 = 600.

Solução do Exercício 15. (Prova 2ª fase OBMEP 2008 – N1 – questão 1)

(a) A figura é composta de 12 triângulos iguais. Como $\frac{3}{4}$ de 12 é $\frac{3}{4}\times 12 = 9$ devemos marcar 9 triângulos quaisquer.

(b) A figura é composta de 24 triângulos iguais. Como $\frac{1}{4}$ de 24 é igual a 6 e como $\frac{1}{3}$ de 24 é igual a 8, concluímos que o número de triângulos a serem pintados é um número maior do que 6 e menor do que 8. Logo devem ser marcados 7 triângulos quaisquer da figura.

(c) (primeira solução) A figura é composta de 36 triângulo iguais. Chico Bento escreveu C em $\frac{7}{12}\times 36 = 21$ triângulos e Doralina escreveu D em $\frac{3}{4}\times 36 = 27$ triângulos, totalizando 21+27=48 marcas. Como todos os triângulos foram marcados e só existem 36 deles, concluímos que o número de triângulos com duas letras é igual a 48-36=12. Este número corresponde a $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ dos triângulos.

(c) (segunda solução) A figura é composta de 36 triângulo iguais. Chico Bento escreveu C em $\frac{7}{12}\times 36 = 21$ triângulos e Doralina escreveu D em $\frac{3}{4}\times 36 = 27$ triângulos. Chico Bento deixou 36-21=15 triângulos em branco. Doralina, ao marcar seus 27 triângulos, preencheu estes 15 e mais 27-15=12 triângulos, que ficaram então com duas marcas.

Solução do Exercício 16. (Prova 2ª fase OBMEP 2012 – N1 – questão 3)

(a) Alberto, primeiro a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ do total de jabuticabas deixando $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ para os demais irmãos. Beatriz, segunda a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas deixadas por Alberto, pegando assim $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$, ou seja, $\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$ do total de jabuticabas.

(b) Alberto pegou exatamente $\frac{1}{5}$ e Beatriz pegou exatamente $\frac{4}{25}$ do total de jabuticabas. Os dois juntos pegaram, então, $\frac{1}{5}+\frac{4}{25}=\frac{9}{25}$ do total de jabuticabas, deixando na cesta $1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ do total de jabuticabas. Cada um dos outros três irmãos, Carlos, Dulce e Eduardo, pegou um terço desta quantidade, ou seja, $\frac{1}{3}\times\frac{16}{25}=\frac{16}{75}$ do total de jabuticabas da cesta. Colocando tudo em um mesmo denominador vemos que:

Alberto pegou $\frac{1}{5}=\frac{15}{75}$ do total.

Beatriz pegou $\frac{4}{25}=\frac{12}{75}$ do total.

Carlos, Dulce e Eduardo pegaram, cada um, $\frac{16}{75}$ do total.

Logo foi Beatriz quem ficou com menos jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com mais jabuticabas.

(c) Como Carlos, Dulce e Eduardo ficaram com $\frac{16}{75}$ das jabuticabas cada um, e como essa fração é irredutível, o total de jabuticabas tem que ser múltiplo de 75. Por outro lado, como cada um dos cinco irmãos ficou com um número inteiro de jabuticabas menor ou igual a 20, o número total de jabuticabas é no máximo 5x20=100. O único múltiplo de 75 que é menor ou igual a 100 é o próprio 75. Logo, havia 75 jabuticabas na vasilha. Daí Alberto ficou com $\frac{1}{5}\times 75 = 15$ jabuticabas, Beatriz com $\frac{4}{25}\times 75 = 12$ jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com $\frac{16}{75}\times 75 = 16$ jabuticabas cada um.

--- FIM ---