Roteiro de Estudos
OBMEP NA ESCOLA – 2018
N3 – CICLO 7 – ENCONTRO 1

Assuntos a serem abordados:

- Equações e inequações quadráticas (Álgebra).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

- Material Teórico do Portal da Matemática, "Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos", F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/3yjyn4r7tbggw
- Material Teórico do Portal da Matemática, "Equações de Segundo Grau: outros resultados importantes", F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/rimiriztlw08.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, "Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos". https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/equacoes.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, "Relações entre coeficientes e raízes". https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/raizes.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, "Inequações Produto", F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor). https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/9a5p1x9bqqskk.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

Equações quadráticas:
9º Ano do Ensino Fundamental → Módulo "Equações do Segundo Grau" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=25&tipo=1) → videoaulas: "Equação do 2º Grau – Parte 1: Exemplos e Definição", "Equação do 2º Grau – Parte 2: Exemplo", "Equação do 2º Grau – Parte 3: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 4: Fórmula Resolvente da Equação do Segundo Grau", "Equação do 2º Grau – Parte 5: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 6: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 7: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 8: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 9: Resolução de Exercícios", "Equação do 2º Grau – Parte 10: Relações entre

Coeficientes e Raízes Aula 1", "Equação do 2º Grau – Parte 11: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 2", "Equação do 2º Grau – Parte 12: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 3", "Equação do 2º Grau – Parte 13: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 4".

Inequações quadráticas:

1º Ano do Ensino Médio → Módulo "Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau" (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=98) → videoaulas: "Introdução às Inequações Produto", "Inequações Produto: Aula de Exercícios - 01", "Inequações Produto: Aula de Exercícios - 02".

Lista de Exercícios – ONE2018 – N3 – Ciclo 7 – Encontro 1
ENUNCIADOS

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo desse encontro. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

Exercício 1:
Ache os valores reais de p para os quais a equação $(p-1)x^2+(2p-2)x+p+1=0$ não tem raízes reais.

Exercício 2:
Resolva a inequação $x^4+15x^2-16<0$.

Exercício 3:
Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R$ 96,00 e unidades do produto B, pagando R$ 84,00. Sabendo que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R$ 2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades compradas do produto A.

Exercício 4:
Três homens A, B e C, trabalhando juntos, realizam uma tarefa em x horas. Se trabalhassem sozinhos, A executaria a tarefa em $x+1$ horas; B, em $x+6$ horas; C, em $2x$ horas. Calcule x.

Exercício 5 (Questão 92 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 - 2010):
A soma $S_n=9+19+29+39+\cdots+a_n$ denota a soma dos primeiros n números naturais terminados em 9. Qual é o menor valor de n para que S_n seja maior do que 10^5?

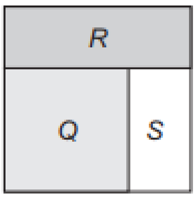
Exercício 6 (Questão 81 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010 – Adaptada):
Sobre a equação $2007x^3+2006x^2+2005x=0$, o certo é afirmar que:

a) não possui raízes reais;
b) tem três raízes reais distintas;
c) tem duas raízes iguais;
d) tem apenas uma raiz real;

Exercício 7 (Questão 13 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):
Para cercar um terreno retangular de 60 metros quadrados com uma cerca formada por dois fios de arame foram usados 64 metros de arame. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno?

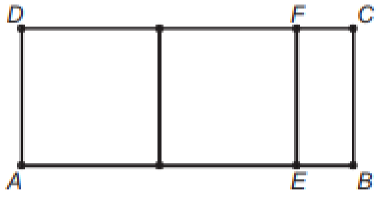
Exercício 8 (Questão 6 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2008):
Ronaldo quer cercar completamente um terreno retangular de 900 m^2. Ao calcular o comprimento da cerca ele se enganou, pois fez os cálculos como se o terreno fosse quadrado e comprou 2 metros de cerca a menos do que o necessário. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno?

Exercício 9 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009):
A figura mostra um quadrado de lado 1 m dividido em dois retângulos e um quadrado. As áreas do quadrado Q e do retângulo R são iguais. Qual é a área do retângulo S?



Exercício 10 (Questão 16 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):
João colocou 100 moedas iguais em um pote e pediu a seus filhos, de idades distintas, que cada um deles colocasse no pote uma moeda para cada irmão mais velho e retirasse do pote duas moedas para cada irmão mais novo. Quando todos os filhos terminaram de fazer isso, restaram no pote 22 moedas. Quantos são os filhos de João?

Exercício 11 (Questão 8 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2012):
A figura mostra um retângulo $ABCD$ decomposto em dois quadrados e um retângulo menor $BCFE$. Quando $BCFE$ é semelhante a $ABCD$, dizemos que $ABCD$ é um retângulo de prata e a razão $\frac{AB}{AD}$ é chamada razão de prata. Qual é o valor da razão de prata?



Exercício 12 (Questão 7 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2017):
Se $f(x) = 5x^2 + ax + b$, com $a \neq b$, $f(a) = b$ e $f(b) = a$, qual é o valor de $a + b$?

Solução do Exercício 1:

A equação quadrática $(p-1)x^2+(2p-2)x+p+1=0$ não tem raízes reais se, e somente se, o seu discriminante $\Delta=(2p-2)^2-4\cdot(p-1)\cdot(p+1)=-8(p-1)$ é negativo se, e somente se, $p-1>0$ se, e somente se, $p>1$.

Solução do Exercício 2:

Chamando x^2 de t, a inequação $x^4+15x^2-16<0$ torna-se $t^2+15t-16<0$. Para resolver essa inequação quadrática, inicialmente vamos resolver a equação quadrática $t^2+15t-16=0$. As raízes dessa equação quadrática são dadas por $\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4\cdot1\cdot(-16)}}{2\cdot1}=\frac{-15\pm17}{2}$, ou seja, as raízes são $t_1=-16$ e $t_2=1$. Assim, $t^2+15t-16=(t+16)(t-1)<0$ se, e somente se, $t+16<0$ e $t-1>0$, ou $t+16>0$ e $t-1<0$, se, e somente se, $t<-16$ e $t>1$, ou $t>-16$ e $t<1$. Como $-16<1$, não é possível $t<-16$ e $t>1$. Logo, $t^2+15t-16<0$ se, e somente se, $-16<t<1$. Como $t=x^2$, tem-se $x^4+15x^2-16<0$ se, e somente se, $-16<x^2<1$. Como $x^2\geq0$, para todo x, então $x^4+15x^2-16<0$ se, e somente se, $x^2<1$ se, e somente se, $(x-1)(x+1)=x^2-1<0$ se, e somente se, $x-1<0$ e $x+1>0$, ou $x-1>0$ e $x+1<0$, se, e somente se, $x<1$ e $x>-1$, ou $x>1$ e $x<-1$. Como $-1<1$, não é possível $x>1$ e $x<-1$. Assim, $x^4+15x^2-16<0$ se, e somente se, $-1<x<1$.

Solução do Exercício 3:

Seja x o número de unidades compradas do produto A. Então, foram compradas $26-x$ unidades do produto B. Os preços unitários dos produtos A e B são iguais a $\frac{96}{x}$ reais e $\frac{84}{26-x}$ reais, respectivamente. Como o preço unitário do produto A excede em R\$ 2,00 o preço unitário do produto B, então $\frac{96}{x}=\frac{84}{26-x}+2$ e, portanto, $x^2-116x+1248=0$. As raízes dessa equação quadrática são dadas por $\frac{-(-116)\pm\sqrt{(-116)^2-4\cdot1\cdot1248}}{2\cdot1}=\frac{116\pm92}{2}$, ou seja, as raízes são $x_1=12$ e $x_2=104$. Mas, o número de unidades do produto A compradas não pode ser $x=104$, pois, nesse caso, o número de unidades do produto B seria $26-x=26-104=-78$, o que não é possível, pois o número de unidades compradas deve ser um número inteiro não negativo. Assim, $x=12$.

Solução do Exercício 4:

Em 1 hora, A, B e C, trabalhando sozinhos, fariam $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+6}$ e $\frac{1}{2x}$ da tarefa, respectivamente. Trabalhando juntos, fariam $\frac{1}{x}$ da tarefa. Logo, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$ e, portanto, $3x^2+7x-6=0$. As raízes dessa equação quadrática são dadas por

$\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot3\cdot(-6)}}{2\cdot3} = \frac{-7\pm11}{6}$, ou seja, as raízes são $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{2}{3}$. Como x deve ser positivo, então $x = \frac{2}{3}$.

Solução do Exercício 5:

A soma dada é a soma dos n primeiros de uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1 = 9$ e razão $r = 10$, de modo que o n-ésimo termo é $a_n = 9 + (n-1)\cdot 10$ e, portanto, $S_n = \frac{n(9+(9+(n-1)\cdot10))}{2} = 5n^2 + 4n$. Queremos achar o menor número inteiro positivo n tal que $S_n > 10^5$, ou seja, $5n^2 + 4n > 10^5$, ou seja, $5n^2 + 4n - 10^5 > 0$. Para resolver essa inequação quadrática, inicialmente vamos resolver a equação quadrática $5n^2 + 4n - 10^5 = 0$. As raízes dessa equação quadrática são dadas por $\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot5\cdot(-10^5)}}{2\cdot5} = \frac{-4\pm\sqrt{2000016}}{10}$, ou seja, as raízes são $n_1 = \frac{-4-\sqrt{2000016}}{10} \approx -141{,}82$ e $n_2 = \frac{-4+\sqrt{2000016}}{10} \approx 141{,}02$. Assim, $5n^2 + 4n - 10^5 = 5(n-n_1)(n-n_2) > 0$ se, e somente se, $n - n_1 < 0$ e $n - n_2 < 0$, ou $n - n_1 > 0$ e $n - n_2 > 0$, se, e somente se, $n < n_1$ e $n < x_2$, ou $n > n_1$ e $n > n_2$. Como $n_1 < n_2$, tem-se $n < n_1$ e $n < n_2$ se, e somente se, $n < n_1$, e $n > n_1$ e $n > n_2$ se, e somente se, $n > n_2$. Assim, $5n^2 + 4n - 10^5 > 0$ se, e somente se, $n < n_1$ ou $n > n_2$. Como n deve ser inteiro positivo e $n_1 < 0$, então $5n^2 + 4n - 10^5 > 0$ se, e somente se, $n > n_2 \approx 141{,}02$, sendo que o menor valor para n é 142.

Solução do Exercício 6:

A alternativa correta é a (d). Observe que $2007x^3 + 2006x^2 + 2005x = x(2007x^2 + 2006x + 2005)$ e, logo, $x = 0$ é uma solução da equação dada, sendo que a opção (a) fica descartada. Agora, para ver se a equação dada tem uma, duas ou três soluções, só precisamos ver se a equação de quadrática $2007x^2 + 2006x + 2005 = 0$ não tem solução, ou tem uma ou tem duas soluções. Mas, o discriminante dessa equação é $\Delta = 2006^2 - 4\cdot2007\cdot2005 = 2006^2 - 4(2006+1)(2006-1) = 2006^2 - 4(2006^2 - 1^2) = -3\cdot2006^2 + 4 < 0$, de modo que essa equação não possui raízes reais. Assim, a equação inicial tem uma única raiz real ($x = 0$).
Observação: Outra maneira (e mais simples) de mostrar que $\Delta < 0$ é observar que $2006 < 2007$ e $2006 < 4\cdot2005$ e, portanto, $2006\cdot2006 < 4\cdot2005\cdot2007$ e $2006^2 - 4\cdot2005\cdot2007 < 0$.

Solução do Exercício 7:

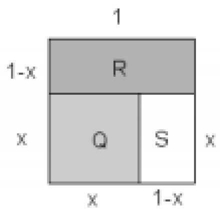
Denotemos por c o comprimento e por l a largura do terreno. Então, o perímetro do terreno é $2(c+l)$ e sua área é cl. Já sabemos a área do terreno, que é 60 m^2, donde $cl = 60$. O enunciado nos diz que foram usados 64 m de arame para uma cerca de dois fios e, assim, o perímetro do terreno é $\frac{64}{2} = 32$ m. Logo, $2(c+l) = 32$ e concluímos que $c + l = 16$. Segue que c e l são dois números cuja soma é 16 e o produto é 60. É facil ver que esses números são 6 e 10. Assim, a diferença pedida é $10 - 6 = 4$ m. Mais geralmente, sabemos que o problema de determinar dois números reais dos quais se conhece a soma s e o produto p equivale a achar as soluções da equação quadrática $x^2 - sx + p = 0$. As raízes reais desta equação (caso existam) serão os números procurados. No nosso caso, temos que c e l são raízes de $x^2 - 16x + 60 = 0$. As raízes dessa equação são dadas por $x = \frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot1\cdot60}}{2\cdot1} = \frac{16\pm4}{2}$, ou seja, as raízes são 6 e 10.

Solução do Exercício 8:

Pensando que o terreno fosse quadrado, Ronaldo calculou seu lado como $\sqrt{900} = 30$ metros, e comprou $44 \cdot 30 = 120$ metros de cerca. Mas, ele precisaria de $120 + 2 = 122$ metros de cerca, que é o perímetro do terreno. Se a é o comprimento e b a largura do terreno (supondo $a > b$), temos as equações $2(a+b) = 122$, que expressa o perímetro, e $ab = 900$, que expressa a área. Logo $a + b = 61$ e $ab = 900$. Logo, a e b são raízes da equação quadrática $x^2 - 61x + 900 = 0$. As raízes dessa equação são $a = 36$ e $b = 25$, donde $a - b = 11$.
Outra maneira de determinar $a - b$ é através da identidade $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$, donde $(a-b)^2 = 61^2 - 4 \cdot 900 = 121$ e, logo, $a - b = 11$.

Solução do Exercício 9:

Seja x o lado do quadrado Q. A área de R é, então, $1 \cdot (1-x) = 1 - x$, a área de Q é x^2 e a área de S é $x \cdot (1-x) = x - x^2$. Como as áreas de R e Q são iguais, então $x^2 = 1 - x$, ou seja, $x^2 + x - 1 = 0$. As raízes dessa equação quadrática são dadas por $\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Como o lado x de Q é positivo, então $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e, logo, a área de S é $x - x^2 = x - (1-x) = 2x - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1 = \sqrt{5} - 2$ m^2.



Solução do Exercício 10:

Considerando cada par de irmãos, o mais velho retira duas moedas do pote pelo irmão mais novo, enquanto o mais novo coloca uma moeda no pote pelo mais velho. Logo, para cada par de irmãos, uma moeda é retirada do pote. Se forem n os filhos de João, há $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de irmãos e, portanto, este é o número total de moedas retiradas do pote no processo. Logo, temos $\frac{n(n-1)}{2} = 100 - 22 = 78$. Daí resulta $n^2 - n - 156 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $n = 13$ ou $n =- 12$. Logo, João tem 13 filhos.

Outra solução: Na tabela, numeramos os irmãos de 1 a n, com idades crescentes:

	irmão 1	irmão 2	3	...	irmão n-2	irmão n-1	irmão n
moedas que coloca	n-1	n-2	n-3		2	1	0
moedas que tira	2x0	2x1	2x2		2x(n-3)	2x(n-2)	2x(n-1)

A segunda linha é o dobro da primeira e, portanto, o que sobra de moedas é igual à soma $1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ e, portanto, $\frac{n(n-1)}{2}=100-22=78$. Daí resulta $n^2-n-156=0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $n=13$ ou $n=-12$. Logo, João tem 13 filhos.

Solução do Exercício 11:

Da semelhança dos retângulos $ABCD$ e $BCFE$ temos $\frac{AD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{AB-2AD}{AD}=\frac{AB}{AD}-2$. Fazendo $\frac{AB}{AD}=x$ (a razão de prata), temos $\frac{1}{x}=x-2$, ou seja, $x^2-2x-1=0$. As raízes dessa equação quadrática são dadas por $\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=1\pm\sqrt{2}$, sendo que a razão de prata é a raiz positiva, a saber, $1+\sqrt{2}$.

Solução do Exercício 12:

Como $f(a)=b$, então $5a^2+a\cdot a+b=6a^2+b=b$ e, logo, $a=0$. Como $f(b)=a$, então $5b^2+a\cdot b+b=a$ e, logo, $5b^2+b=0$, já que $a=0$. A equação quadrática $5b^2+b=0$ pode ser facilmente resolvida fazendo $5b^2+b=b(5b+1)=0$, donde $b=0$ ou $b=-\frac{1}{5}$. Como a e b são diferentes, então $b=-\frac{1}{5}$. Como $a=0$ e $b=-\frac{1}{5}$, então $a+b=0+\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}$.

Assuntos a serem abordados:

- Funções quadráticas e seus gráficos (Funções).

Sugerimos os seguintes materiais de apoio à aula.

- Textos:

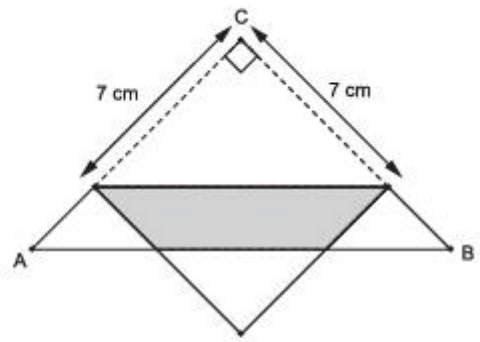
- Material Teórico do Portal da Matemática, “Função Quadrática: Definições, Máximos e Mínimos”, F. S. Benevides, A. C. M. Neto (revisor).
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/83bz2u7aae0w8.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, “Gráfico da função quadrática e inequações de segundo grau”, F. S. Benevides, A. C. M. Neto (revisor).
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a43rewocf8084.pdf
- Material Teórico do Portal da Matemática, “Função Quadrática: Exercícios”, F. S. Benevides, A. C. M. Neto (revisor).
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8ecefhj511c0w.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Noções Básicas”, T. Miranda, C. Assis.
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/vp5hzixwqfkcc.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos”, T. Miranda, C. Assis.
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/bqyo6wbk9qo8g.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Gráfico de uma função quadrática”, T. Miranda, C. Assis.
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/flfb6cvdym80w.pdf
- Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Resolução de Exercícios”, T. Miranda, C. Assis.
https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cspa0ku3yyiw.pdf

- <u>Videoaulas do Portal da Matemática:</u>

Funções quadráticas e seus gráficos:
1º Ano do Ensino Médio → Módulo “Função Quadrática” (https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=62) → videoaulas: “Função Quadrática: Definição, Máximos e Mínimos”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 1”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 2”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 3”, " Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 1", " Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 2", " Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 3", “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 1”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 2”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 3”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 4”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 5”, “Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 6”.

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo desse encontro. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

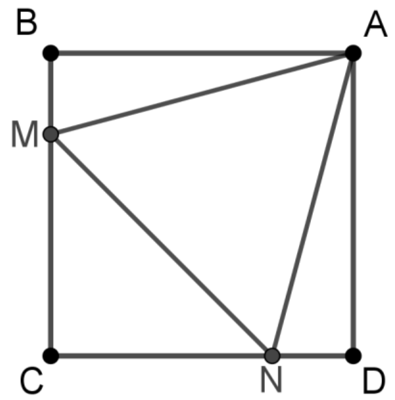
Exercício 1 (Questão 4, itens (b) e (d) (modificado) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2013):
A figura abaixo mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm.



Para cada número x tal que $5 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2, da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura acima a área da região cinzenta, em cm^2, é $f(7)$.

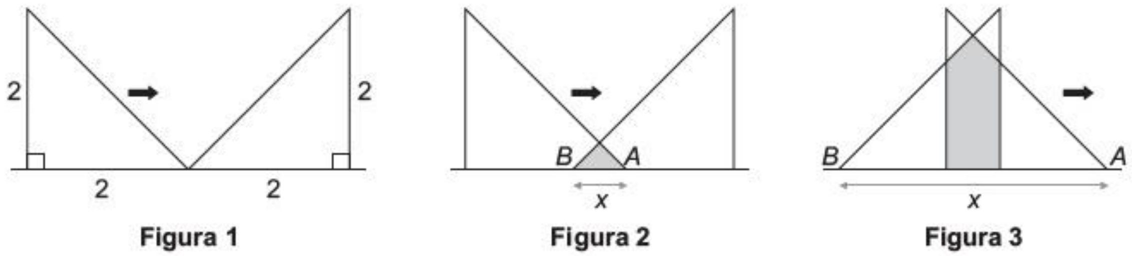
a) Escreva a expressão de $f(x)$ para $5 \leq x \leq 10$.
b) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

Exercício 2:
Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado a, M, N são pontos nos segmentos BC e CD respectivamente de tal forma que AMN é um triângulo equilátero. Determine a área do triângulo MNC.



Exercício 3 (Questão 5, itens (b) e (c) (modificado) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2009):

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.



Para cada x no intervalo $[0,4]$, seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinzas nas figuras.

a) Encontre as expressões de $f(x)$ nos intervalos $[0,2]$ e $[2,4]$.
b) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

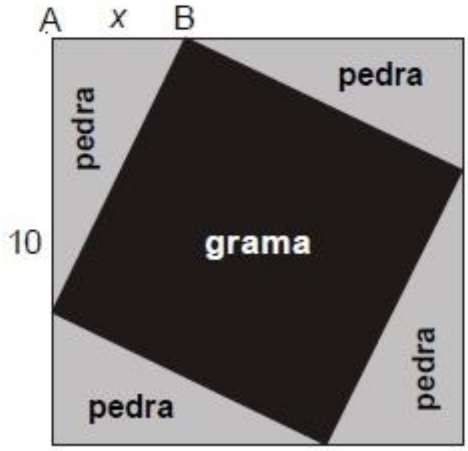
Exercício 4 (Questão 5, itens (b) e (c) (modificado) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2007):

O Grêmio estudantil de Taperoá vai dar uma festa, vendendo ingressos a R$ $6{,}00$. Para estimular a compra antecipada de ingressos, os diretores do Grêmio decidiram que:

- Os ingressos serão numerados a partir do número 1 e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;
- Ao final da festa, cada participante receberá R$ $0{,}01$ para cada ingresso vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso.

a) Qual será o lucro do Grêmio se forem vendidos x ingressos?
b) Quantos ingressos o Grêmio deve vender para ter o maior lucro possível?

Exercício 5 (Questão 4, itens (b), (c), (d) – Prova OBMEP – 2ª Fase – Nível 3 – 2005):
Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 metros de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.



a) Escreva a expressão da área do canteiro da grama em função de x.

Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ $4{,}00$ por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ $3{,}00$ por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

b) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
c) Se o prefeito tem apenas R\$ $358{,}00$ para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

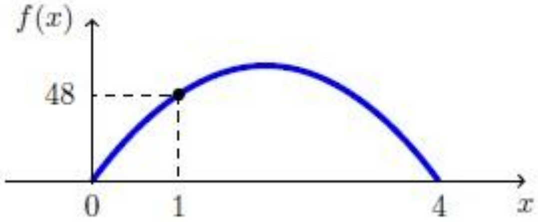
Exercício 6:
Calcule o valor de c na função

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + c$$

Para que seu mínimo seja $1/2$.

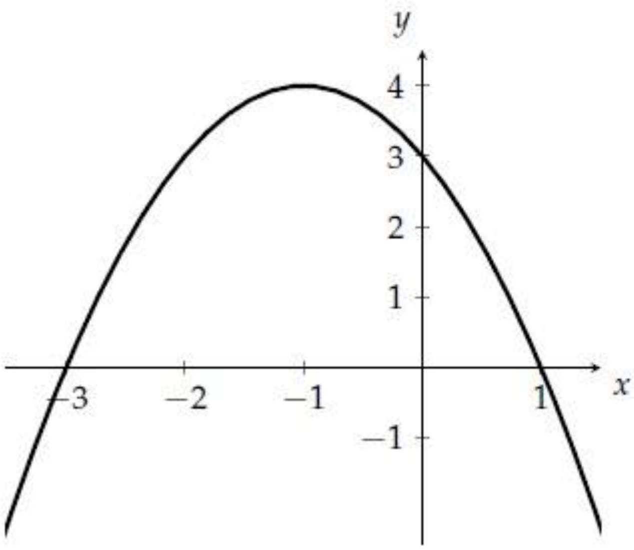
Exercício 7:
Tenho material suficiente para erguer 20 metros de cerca. Com ele pretendo construir um cercado retangular de 26 m^2 de área. É possível fazer isso? Se for, quais as medidas dos lados deste retângulo?

Exercício 8:
Um corpo arremessado tem sua trajetória representada pelo gráfico da função quadrática esboçada na figura abaixo. Qual é a altura máxima atingida por esse corpo?



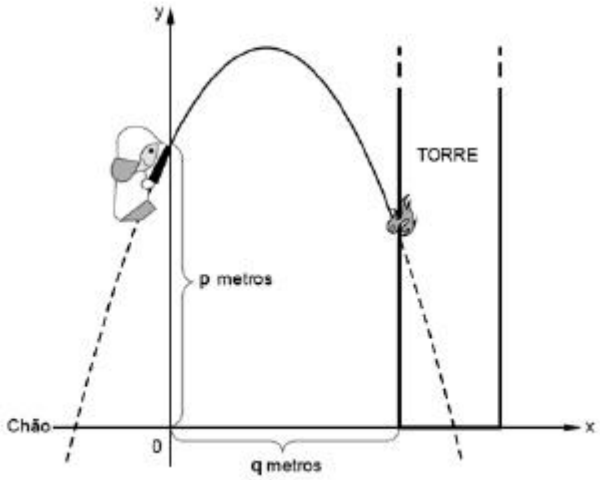
Exercício 9:
A equação da trajetória parabólica do salto de uma pulga é dado por $f(x) = -x^2 + 4x$. Essa pulga salta no ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas. Qual é a altura máxima atingida pela pulga?

Exercício 10:
Observe o gráfico abaixo de uma parábola e conclua a sua respectiva lei de função.



Exercício 11:
Qual é o conjunto imagem da função $f(x) = x^2 - 10x + 21$?

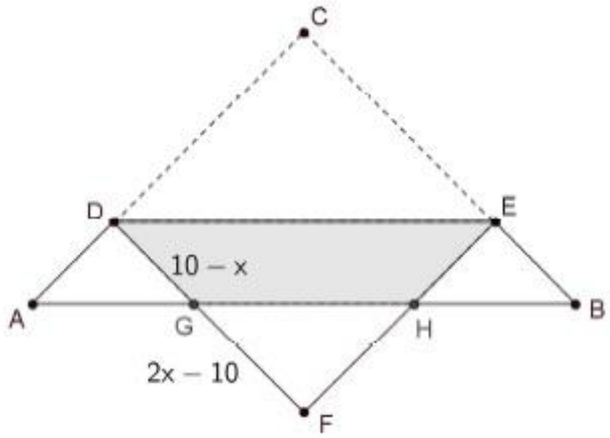
Exercício 12:
A figura indica um bombeiro lançando um jato de água para apagar o fogo em um ponto de uma torre retilínea e perpendicular ao chão. A trajetória do jato de água é parabólica, e dada pela função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, com x e $f(x)$ em metros.



Sabendo que o ponto do fogo atingido pelo jato de água está a 2 metros do chão, então, qual é o valor de $p - q$, em metros?

Solução do Exercício 1:

a) O triângulo ADG é isósceles com $AD = DG = 10 - x$; logo $GF = DF - DG = x - (10 - x) = 2x - 10$, como vemos na figura abaixo.



Temos então $f(x) = Area(DEF) - Area(GHF) = \frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2} = -\frac{3}{2}x^2 + 20x - 50$.

b) O maior valor de $f(x)$ é atingido no vértice da parábola, cuja abscissa é o ponto médio das raízes. Como $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2} = \frac{(10-x)(3x-10)}{2}$, a abscissa do vértice é $\frac{\frac{10}{3}+10}{2} = \frac{20}{3}$. Como $f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{\left(10-\frac{20}{3}\right)\left(3\frac{20}{3}-10\right)}{2} = \frac{50}{3}$, que é o maior valor da área de sobreposição.

Solução do Exercício 2:

Observe que CMN é um triângulo retângulo isósceles, seja x o comprimento dos catetos do triângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos CMN e ABM, temos que

$$MN = \sqrt{2}x \qquad AM = \sqrt{a^2 + (a-x)^2},$$

e como o triângulo AMN é equilátero, temos $2x^2 = a^2 + (a - x)^2$. Simplificando a equação obtemos $x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$. Resolvendo a equação quadrática, obtemos

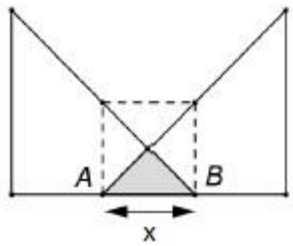
$$x = -a \pm \sqrt{3}a.$$

Como x deve ser positivo, obtemos $x = (\sqrt{3} - 1)a$. A área do triângulo CMN é

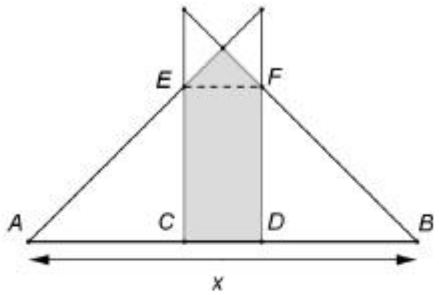
$$\frac{(\sqrt{3}-1)^2 a^2}{2} = (2 - \sqrt{3})a^2.$$

Solução do Exercício 3:

a) Considere primeiro $0 < x \leq 2$. O triângulo cinza na figura abaixo



é um triângulo retângulo isósceles e portanto, sua área será $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado x. No caso específico de $x = 0$, a área é 0. Assim, para $0 \leq x \leq 2$, temos $f(x) = \frac{x^2}{4}$. Quando $2 < x \leq 4$, a figura é um pentágono, como ilustra a figura abaixo.



Temos então $AC + CD = 2 = BD + CD$. Somando ambas expressões, obtemos

$$4 = AC + CD + BD + CD = x + CD,$$

Ou seja, $CD = 4 - x$. Daí, $CE = AC = AD - CD = 2 - (4 - x) = x - 2$. Vemos assim, que o pentágono pode ser decomposto em um retângulo $CDFE$ de área $(4 - x)(x - 2)$ e em um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $EF = CD = 4 - x$, e portanto de área $\frac{(4-x)^2}{4}$. Assim, para $2 < x \leq 4$, tem-se

$$f(x) = (4 - x)(x - 2) + \frac{(4 - x)^2}{4} = (4 - x)\left(x - 2 + \left(\frac{4 - x}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}(4 - x)(3x - 4).$$

b) Para $0 \leq x \leq 2$, o maior valor possível de $f(x) = \frac{x^2}{4}$ é $f(2) = 1$. Para $2 < x \leq 4$. O maior valor possível de $f(x)$ se encontra no ponto médio das raízes de $f(x)$, isto é, no ponto

$$x = \frac{4 + \frac{4}{3}}{2} = \frac{8}{3}.$$

Como $\frac{8}{3}$ pertence ao intervalo $[2,4]$, o máximo de $f(x)$ nesse intervalo é $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Como $\frac{4}{3} > 1$, concluímos que este é o valor máximo de $f(x)$ no intervalo $[0,4]$.

Solução do Exercício 4:

a) O valor de venda de x ingressos é $6x$. O Grêmio terá que devolver 1 centavo para quem comprou o ingresso número $x-1$, 2 centavos para quem comprou o ingresso $x-2$ e assim por diante, até $x-1$ centavos para quem comprou o ingresso $x-(x-1)=1$. No total o Grêmio terá que devolver

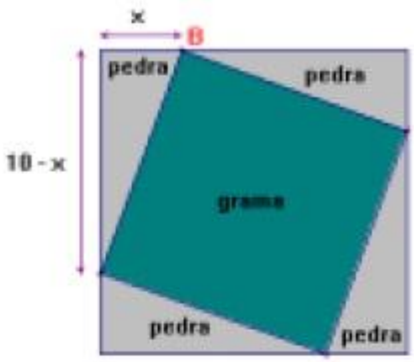
$$\frac{1}{100}(1+\cdots+(x-1)) = \frac{x(x-1)}{200}.$$

O seu lucro será de $L(x) = 6x - \frac{x(x-1)}{200} = x\left(6 - \frac{x-1}{200}\right) = \frac{x(1201-x)}{200}$.

b) A função $L(x)$ representa uma parábola. Como o coeficiente de x^2 é negativo, a função $L(x)$ possui máximo no vértice da parábola. O vértice se encontra no ponto médio das raízes de $L(x)=0$, isto é, para $x = \frac{1201}{2} = 600{,}5$. Como a quantidade de ingressos é um número inteiro, o lucro máximo do Grêmio será atingido quando forem vendidos 600 ou 601 ingressos. Como esses pontos são simétricos com relação a $600{,}5$ o lucro será o mesmo em ambos os casos. Esse lucro é $L(600) = 1803$ reais.

Solução do Exercício 5:

a) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de lados x e $10-x$, tendo assim área de $\frac{1}{2}x(10-x)$ m^2. Como a área total da praça é de 100 m^2, segue que a área do canteiro de grama é $100 - 4\cdot\frac{1}{2}x(10-x)$ m^2.



b) O custo total dos cinco canteiros, em m^2, é

$$C(x) = 3 \times 4 \times \frac{1}{2}x(10-x) + 4 \times \big(100 - 2x(10-x)\big).$$

Simplificando a expressão obtemos

$$C(x) = 2x^2 - 20x + 400.$$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, $C(x)$ possui mínimo quando $x = \frac{20}{2\times 2} = 5$. O custo mínimo é então $C(5) = 350$ reais.

c) Seja $A(x) = 100 - 2x(10 - x) = 100 - 20x + 2x^2$ a área do canteiro de grama em função de x. Se o prefeito pode gasta 358 reais, então

$$2x^2 - 20x + 400 \leq 358;$$
$$A(x) + 300 \leq 358;$$
$$A(x) \leq 58.$$

Assim, o maior canteiro de grama que o prefeito pode construir tem área de 58 m^2. Observe que isso acontece quando $2x^2 - 20x + 58 = 2(x - 3)(x - 7) = 0$.

Solução do Exercício 6:

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função $f(x)$ atinge seu mínimo no ponto $x = \frac{3}{2\times\frac{1}{2}} = 3$, logo o mínimo será $f(3) = \frac{9}{2} - 9 + c = \frac{1}{2}$. Assim, $c = 5$.

Solução do Exercício 7:

Seja x o comprimento e h a altura do retângulo. A fim de fazer o retângulo de maior área possível, devemos usar todo o material de que dispomos de cerca. Sendo assim, $2x + 2h = 20$, isto é, $h = 10 - x$. Por outro lado, a área do retângulo é

$$A(x) = xh = x(10 - x) = 10x - x^2.$$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a maior área possível é obtida para $x = \frac{-10}{2\times(-10)} = 5$, cujo valor é $A(5) = 25$ m^2. Como $25 < 26$, não é possível construir um cercado retangular de 26 m^2 de área.

Solução do Exercício 8:

Pelo gráfico, as raízes de $f(x) = 0$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Logo $f(x) = ax(x - 4)$. Como $f(1) = 48$, então $-3a = 48$, isto é, $a = -16$. Assim, $f(x) = -16x(x - 4)$. O valor máximo de $f(x)$ é atingido para $x = \frac{0+4}{2} = 2$. Assim, $f(2) = 64$ é a altura máxima atingida por esse corpo.

Solução do Exercício 9:

A altura máxima, obtida no ponto $x = \frac{-4}{2\times(-1)} = 2$, é $f(2) = 4$ unidades de comprimento.

Solução do Exercício 10:
Seja $f(x)$ a função procurada. Veja primeiro que as raízes de $f(x) = 0$ são $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$, portanto $f(x) = a(x+3)(x-1)$. Como $f(0) = 3$, então $3 = a \times 3 \times (-1)$, ou seja $a = -1$. Assim, $f(x) = -(x+3)(x-1)$.

Solução do Exercício 11:
Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função atinge seu mínimo no ponto $x = \frac{10}{2\times 1} = 5$, cujo valor é $f(5) = -4$. Logo, a imagem da função é $[-4; +\infty[$.

Solução do Exercício 12:
Como $f(0) = 3$, então $p = 3$. Pelos dados do enunciado, temos $f(q) = 2$, onde $q > 0$. Portanto

$$-q^2 + 2q + 3 = 2;$$

$$-q^2 + 2q + 1 = 0;$$

$$q^2 - 2q - 1 = 0;$$

$$q = 1 \pm \sqrt{1 - (-1)} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

De $q > 0$, obtemos $q = 1 + \sqrt{2}$ e

$$p - q = 3 - \left(1 + \sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$