Assuntos a serem abordados:

- Explorando o uso de “simetrias” na resolução de problemas.
- Explorando a inserção de “ambientes recreativos” ao processo de ensino-aprendizagem.

As referências que seguem serão utilizadas ao longo do primeiro encontro presente nesse ciclo:

- Dimitri Fomim, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, Círculos Matemáticos – A experiência russa, IMPA, 2010.

- Sergey Dorichenko, Círculo Matemático – Problemas Semana a Semana, IMPA, 2016.

- Bruno Holanda e Emiliano Chagas, Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra, IMPA, 2018.

- Banco de Questões da OBMEP, IMPA, números diversos. http://www.obmep.org.br/banco.htm

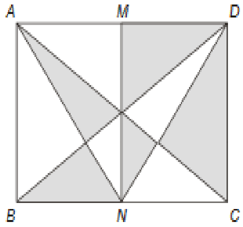
Nesse primeiro encontro estaremos enfatizando inicialmente a busca de simetria subjacente à estrutura de um problema em foco, utilizando-a na elaboração de um plano de resolução. Deseja-se enfatizar como a simetria pode ser a chave, para com lucidez, abrirem-se as portas do entendimento da estrutura matemática presente em muitos problemas matemáticos. Posteriormente, vamos incorporar atividades recreativas ao processo de ensino no sentido de desenvolver habilidades sob condições agradáveis de aprendizagem. Embora não iremos desenvolver estudos quanto a transferência dessas habilidades para ambientes formais de ensino, esse é um aspecto importante que poderá ser explorado pelo professor, através da proposta de questões formais correlatas aquelas abaixo expostas.

A seguir estamos disponibilizando uma lista com 12 exercícios. O professor deverá discutir esses exercícios com seus alunos, acompanhando e auxiliando no entendimento das estratégias de resoluções apresentadas pelos alunos. É importante incentivar o envolvimento coletivo de todos nessas discussões das resoluções, cabendo ao professor enfatizar e aprofundar os conhecimentos matemáticos associados às questões apresentadas. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, então cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos / estratégias abordadas. Nesse sentido, os materiais de apoio indicados serão elementos auxiliares importantes.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N2 – Ciclo 5 – Encontro 1
Enunciados

Exercício 1.

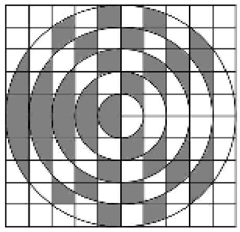
No retângulo *ABCD* da figura, *M* e *N* são os pontos médios dos lados *AD* e *BC*. Qual é a razão entre a área da parte sombreada e a área do retângulo *ABCD*?



Exercício 2.

Na malha quadriculada a seguir, todas as circunferências têm o mesmo centro. Pode-se concluir que a área da região cinza destacada é igual a

(a) dois quintos da área do círculo maior;
(b) três sétimos da área do círculo maior;
(c) metade da área do círculo maior;
(d) quatro sétimos da área do círculo maior;
(e) três quintos da área do círculo maior.



Exercício 3.

Código Postal — Para fazer a separação em regiões da correspondência que deve ser entregue, um serviço postal indica sobre os envelopes um código postal com uma série de cinco blocos de pontos e bastões, que podem ser lidos por um leitor ótico. Os algarismos são codificados como segue.

0 ••|||	5 |•|•|
1 •|•||	6 |•||•
2 •||•|	7 ||••|
3 •|||•	8 ||•|•
4 |••||	9 |||••

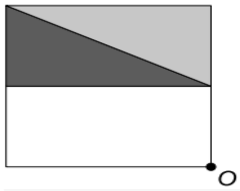
A leitura se faz da direita para a esquerda. Por exemplo: o código postal 91720 se escreve como ••|||•||•|||••|•|•|||||••, ou seja,

$$\underbrace{\text{••|||}}_{0}\ \underbrace{\text{•||•|}}_{2}\ \underbrace{\text{||••|}}_{7}\ \underbrace{\text{•|•||}}_{1}\ \underbrace{\text{|||••}}_{9}.$$

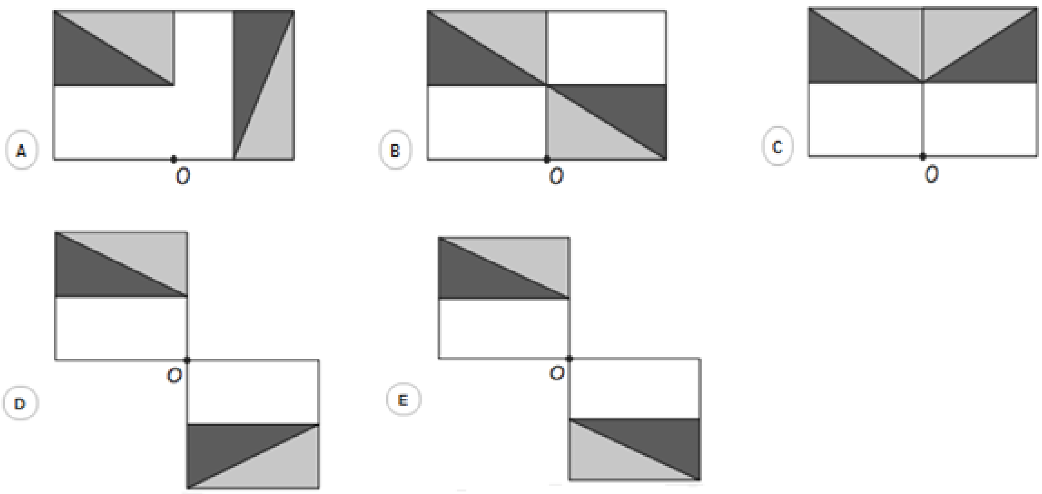
Note que a codificação de 94, que é $\underbrace{\text{|••||}}_{4}\ \underbrace{\text{|||••}}_{9}$, tem um eixo vertical de simetria. Encontre os códigos entre 47000 e 47999 que apresentam um eixo vertical de simetria.

Exercício 4.

Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

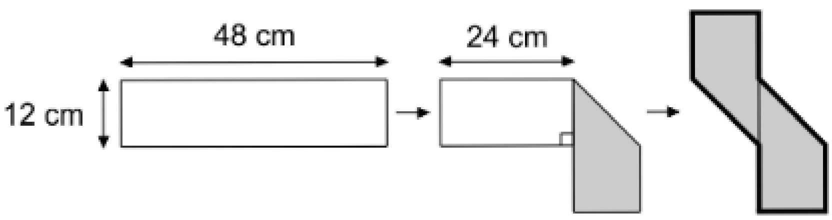


A imagem que representa a nova figura é:



Exercício 5.

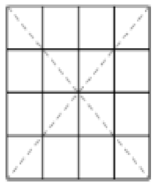
Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?



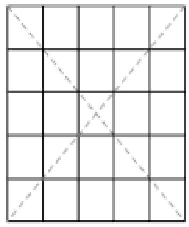
Exercício 6.

Observe que no tabuleiro 4 x 4 as duas diagonais cortam 8 quadradinhos. Já no tabuleiro 5 x 5, as duas diagonais cortam 9 quadradinhos. Em qual tabuleiro as diagonais cortam 77 quadradinhos?

(A) 35 x 35
(B) 36 x 36
(C) 37 x 37
(D) 38 x 38
(E) 39 x 39



4 x 4



5 x 5

Exercício 7.

Após o período de férias do primeiro semestre, cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data de uma prova de Matemática já marcada:

- Andrea diz que será em agosto, dia 16, segunda- feira;
- Daniela diz que será em agosto, dia 16, terça-feira;
- Fernanda diz que será em setembro, dia 17, terça-feira;
- Patrícia diz que será em agosto, dia 17, segunda-feira;
- Tatiane diz que será em setembro, dia 17, segunda-feira.

Sabendo que somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

Exercício 8.

Uma mãe estava lendo uma historinha aos seus filhos: Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos que ela havia feito. Ela também “sabe” que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dia dizem a verdade. Então, ela questionou seus sobrinhos sobre quem tinha comido os biscoitos:

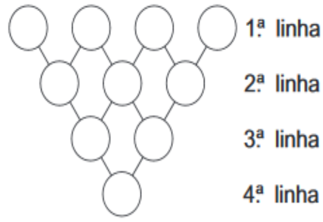
- Bruno diz: “O culpado é Eduardo ou Daniela.”
- Eduardo diz: “O culpado é uma menina.”
- Por fim, Daniela diz: “Se Bruno é culpado, então Cecília é inocente.”

Vamos ajudar a tia Geralda a descobrir quem comeu os biscoitos, quem foi?

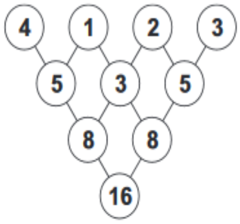
Exercício 9.

Um tabuleiro é formado por dez casas, ligadas como na figura ao lado. As casas desse tabuleiro devem ser preenchidas com números, seguindo as regras:

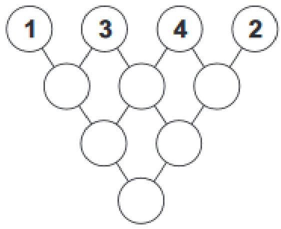
- na primeira linha, os números 1, 2, 3 e 4 devem aparecer sem repetição;
- nas demais linhas, o número em cada casa é a soma dos números nas duas casas da linha de cima que estão ligadas a ela.



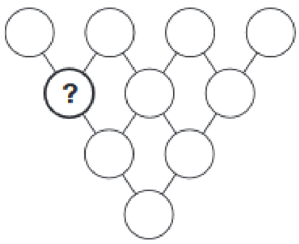
Observe abaixo uma forma de preencher completamente o tabuleiro.



a) Complete o tabuleiro abaixo seguindo as regras de preenchimento descritas acima:



b) Começando com o tabuleiro vazio, e seguindo as mesmas regras acima, quais são os números que podem aparecer na primeira casa da segunda linha?



Exercício 10.

Vamos brincar com números (aqui o uso da calculadora pode ser interessante para a simulação de valores): o número 24 tem uma propriedade curiosa, precede um quadrado perfeito e o seu dobro tem a mesma propriedade, ou seja, $24+1=25=5^2$ e $(24x2) +1=49=7^2$.

Qual é o próximo número natural que satisfaz essa propriedade?

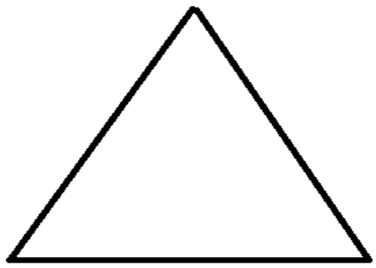
Exercício 11.

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

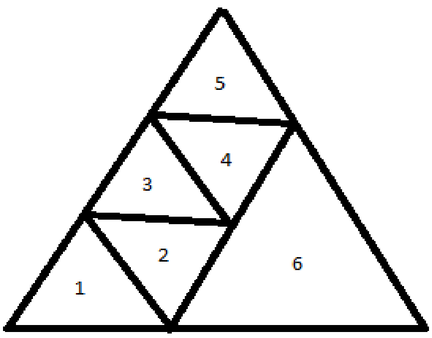
Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

Exercício 12.

Foram dados três triângulos equiláteros idênticos ao ilustrado na figura que segue:



Desejamos construir três quebra-cabeças, cortando esses triângulos em seis, sete ou oito triângulos equiláteros que não necessitam ser congruentes. Como exemplo, veja um esboço na figura que segue de um quebra-cabeça com seis triângulos como desejado:



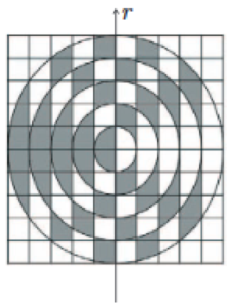
Faça a construção dos quebra-cabeças com 7 e 8 triângulos equiláteros.

Solução do Exercício 1. (Prova da OBMEP 2006 - N2Q1 – 1ª fase)

Pela simetria da figura, vemos que para cada região sombreada existe uma igual em branco. Logo, a parte sombreada tem metade da área do retângulo.

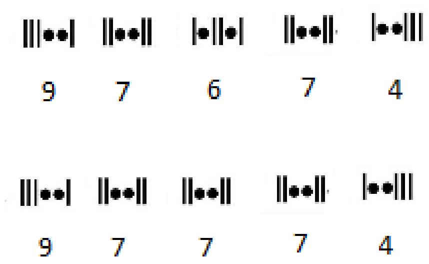
Solução do Exercício 2. (Banco de Questões 2010 – N1, página 3)

Observe que a figura é simétrica em relação à reta r que passa pelo centro comum das circunferências. Para cada região cinza de um lado de r existe uma região branca equivalente do outro lado de r, e vice-versa. Logo, a área da região cinza é igual à área branca. Portanto, a área da região cinza é igual à metade da área do círculo maior.



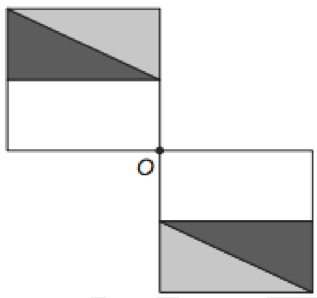
Solução do Exercício 3. (Banco de Questões 2010, nível 2 / 3, página 107)

Os números que apresentam eixo vertical de simetria no intervalo dado são 47679 e 47779, conforme observado abaixo:



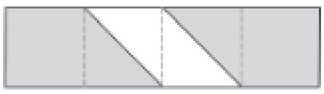
Solução do Exercício 4. (Prova ENEM, 2013, questão 164)

Para que uma figura seja simétrica a outra em relação a um ponto O, a distância de todos os pontos de uma ao ponto O devem ser a mesma dos pontos simétricos da outra em relação a esse ponto O. Se for traçado um eixo vertical e um horizontal passando pelo ponto O e pelos lados da figura, percebe-se que a original se encontra no segundo quadrante, sendo assim a figura simétrica deve estar no quarto, com todos os pontos equidistantes aos pontos originais da figura.



Solução do Exercício 5. (Prova da OBMEP, 2008, nível 1, 1ª fase, questão 11)

Essa questão pode ser resolvida de várias formas distintas, podemos utilizar os aspectos simétricos presentes na figura e observar que a área do polígono formado pela cartolina dobrada é igual à área em cinza na figura que segue:



Dessa forma, a área cinza representa 6/8 da área da tira retangular, logo a área pedida é igual a 6/8 de 12x48, ou seja, igual a 432 cm^2.

Solução do Exercício 6. (Prova da OBMEP, 2008, nível 1, 1ª fase, questão 15)

Num tabuleiro quadrado $n \times n$, cada diagonal corta n quadradinhos. Por causa da simetria dos tabuleiros quadrados, temos dois casos:

(i) se n é par (por exemplo, no tabuleiro 4×4) as duas diagonais se cortam num vértice (o vértice central). Nesse caso as duas diagonais cortam exatamente $n + n = 2n$ quadradinhos.

(ii) se n é ímpar (por exemplo, no tabuleiro 5x5) as duas diagonais se cortam no centro de um quadradinho (o quadradinho central). Nesse caso o quadradinho central é cortado duas vezes, uma por cada diagonal. Logo, as duas diagonais cortam no total $n + n - 1 = 2n - 1$ quadradinhos.

Se o número de quadradinhos cortados pelas diagonais em um tabuleiro $n \times n$ é 77, temos duas possibilidades. A primeira é n par, mas aqui teríamos $77 = 2n$, o que não pode acontecer pois 77 é ímpar. Resta então a possibilidade n ímpar, quando temos $77 = 2n - 1$. Logo $n = 39$ e o nosso tabuleiro é 39×39.

Solução do Exercício 7. (Prova da OBMEP, 2014, nível 3, 1ª fase, questão 3)

Podemos organizar as informações numa tabela:

	mês	dia do mês	dia da semana
Andrea	agosto	16	segunda
Daniela	agosto	16	terça
Fernanda	setembro	17	terça
Patrícia	agosto	17	segunda
Tatiane	setembro	17	segunda

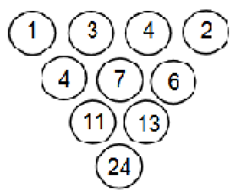
Se Andrea estivesse certa, então Fernanda não acertaria nenhuma das informações. Logo, não é ela que está certa, nem Fernanda (pelo mesmo motivo). Se Daniela estivesse certa, então Tatiane também nada acertaria. Logo Daniele e Tatiane não estão certas. Se Patrícia acertar tudo, as demais também acertarão alguma informação e, portanto, Patrícia é a única que está certa.

Solução do Exercício 8 (Prova da OBMEP, 2011, nível 2, 1ª fase, questão 14)

Primeiro notamos que a afirmativa de Daniela é verdadeira, pois há apenas um culpado; logo a culpada não é Daniela. Se Bruno mentiu, então ele é culpado e Eduardo diz a verdade. Mas Eduardo disse que a culpada é uma menina, logo ele também estaria mentindo, o que não satisfaz o enunciado. Então Bruno diz a verdade e, portanto, Eduardo é o culpado.

Solução do Exercício 9. (Prova da OBMEP, 2017, nível 1, 2ª fase, questão 2)

a) Há uma única maneira de preencher o tabuleiro:



b) O número que aparece na primeira casa da segunda linha depende de como são colocados os dois primeiros números da primeira linha. As possibilidades são as seguintes:

$1 + 2 = 2 + 1 = \mathbf{3}$, $1 + 3 = 3 + 1 = \mathbf{4}$, $1 + 4 = 4 + 1 = \mathbf{5}$, $2 + 3 = 3 + 2 = \mathbf{5}$, $2 + 4 = 4 + 2 = \mathbf{6}$ e $3 + 4 = 4 + 3 = \mathbf{7}$.

Logo, na primeira casa da segunda linha somente podem aparecer os seguintes números: 3, 4, 5, 6 ou 7. Observe que o único número que pode aparecer repetido na segunda linha é 5 e que o maior número da segunda linha é 7.

Solução do Exercício 10.

Esse exercício visa estimular a abordagem por tentativa e erro sistemática, ou seja, é esperado que a abordagem consista na elaboração de uma “tabela” de valores na forma:

Valores obtidos do tipo: $x^2 - 1$, com x variando nos naturais	Valores obtidos do tipo: ½ $(y^2 - 1)$, com y variando nos naturais
3^2-1=8	½ $(5^2 - 1)$=12
5^2-1=24	½ $(7^2 - 1)$=24
....	.....

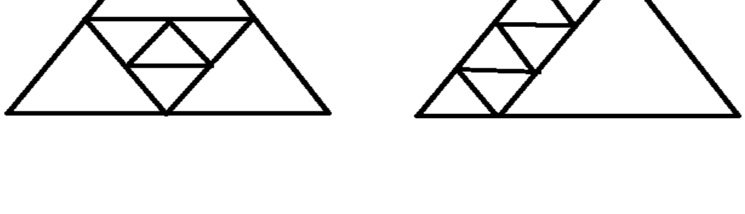
em que identifica-se uma solução desejada quando um número da coluna à esquerda seja repetido na coluna à direita, sendo que as atribuições de valores para x e y não devem ser feitas aleatoriamente (observe que para que haja a igualdade dos valores obtidos nas colunas mencionadas, as paridades de x e y devem ser ímpares). Após algumas simulações, a solução desse “quebra-cabeça’ é dado por x=29 e y=41, consequentemente, 840 é o valor desejado.

Solução do Exercício 11. (Prova Enem, 2015, questão 139)

A fração da carta da mesa é de 6/8 = ¾ = 0,75. Analisando as cartas da mão do jogador, vimos que temos 3 cartas equivalentes: 75%, 7,5 e 3/4.

Solução do Exercício 12. (Livro: Círculo de Matemático - Problemas Semana a Semana, problema 12.5, pg. 25)

Existe uma interessante discussão associada a esse problema, todo triângulo equilátero pode ser cortado em seis ou mais triângulos equiláteros dando origem a quebra-cabeças com seis ou mais peças. Isso porque podemos aumentar de 3 o número de triângulos cortando ao longo de retas que unem os pontos médios dos lados de um triângulo e podemos fazer isso tantas vezes quanto quisermos. Após a construção dos quebra-cabeças com 6, 7 e 8 peças proponha essa discussão com seus alunos, mostrando aos mesmos como construir quebra-cabeças com 10, 11 ou 12 peças.



Assuntos a serem abordados:

- Explorando o uso de “padrões” na resolução de problemas.
- Explorando o “reconhecimento de representações numéricas ou geométricas” em problemas de localização.

As referências que seguem serão utilizadas ao longo do segundo encontro presente nesse ciclo:

• Dimitri Fomim, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, Círculos Matemáticos – A experiência russa, IMPA, 2010.

• Sergey Dorichenko, Círculo Matemático – Problemas Semana a Semana, IMPA, 2016.

• Bruno Holanda e Emiliano Chagas, Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra, IMPA, 2018.

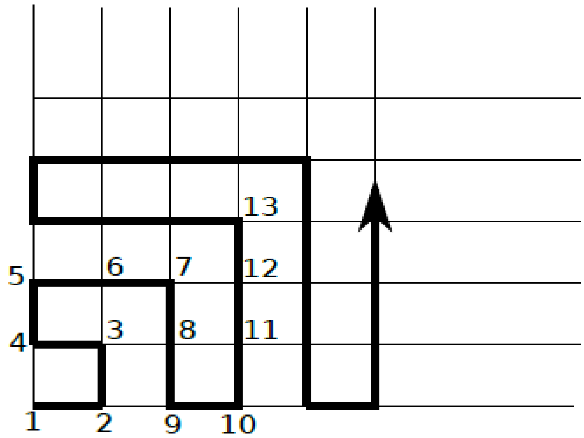
• Banco de Questões da OBMEP, IMPA, números diversos. http://www.obmep.org.br/banco.htm

Nesse segundo encontro estaremos enfatizando inicialmente a busca de padrões algébricos ou geométricos presentes em um problema em foco, considerando casos particulares do problema, utilizando essas características observadas para a elaboração de um plano de resolução lúcido. Posteriormente, vamos explorar o reconhecimento de representações numéricas ou geométricas em problemas de localização, tanto de trajetos associados a ambientes no plano ou no espaço.

A seguir estamos disponibilizando uma lista com 12 exercícios. O professor deverá discutir esses exercícios com seus alunos, acompanhando e auxiliando no entendimento das estratégias de resoluções apresentadas pelos alunos. É importante incentivar o envolvimento coletivo de todos nessas discussões das resoluções, cabendo ao professor enfatizar e aprofundar os conhecimentos matemáticos associados às questões apresentadas. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, então cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos / estratégias abordadas. Nesse sentido, os materiais de apoio indicados serão elementos auxiliares importantes.

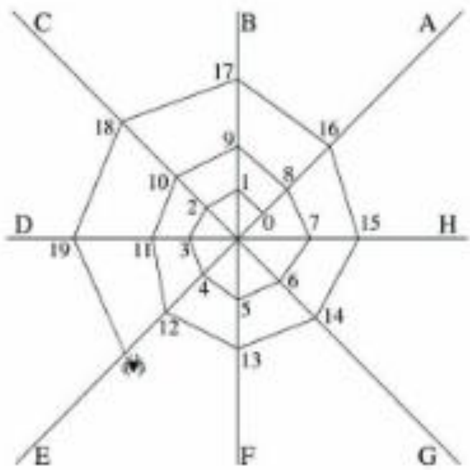
Exercício 1.

Os pontos da rede quadriculada a seguir são numerados seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente à esquerda dele?



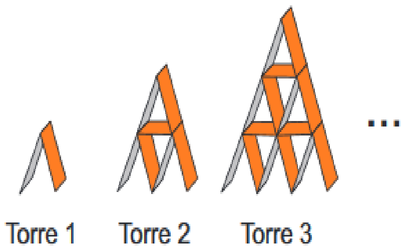
Exercício 2.

Na teia de aranha representada na figura que segue, A, B, C, D, E, F, G e H são os “fios” de apoio que uma aranha usa para construir sua teia. A aranha continua seu trabalho e, nesse sentido, sobre qual fio de apoio estará o número 118?



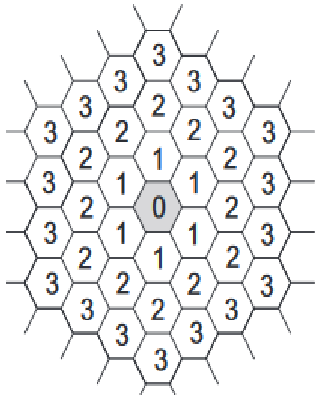
Exercício 3.

Janaína faz torres com cartões, seguindo o padrão da figura. A primeira torre foi feita com 2 cartões, a segunda com 7, a terceira com 15 e assim por diante. Quantos cartões ela deve acrescentar à décima torre para obter a décima primeira?



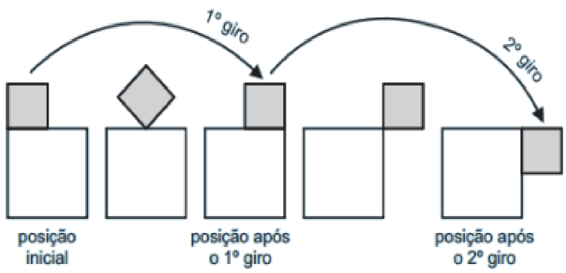
Exercício 4.

Na malha hexagonal, a casa central recebeu o número 0 e as casas vizinhas a ela receberam o número 1. Em seguida, as casas vizinhas às de número 1 receberam o número 2 e assim sucessivamente, como na figura. Quantas casas receberam o número 6?

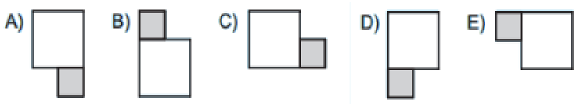


Exercício 5.

Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

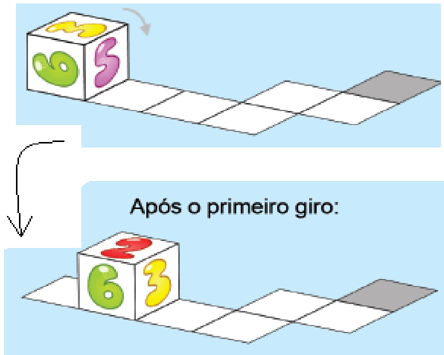


Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?



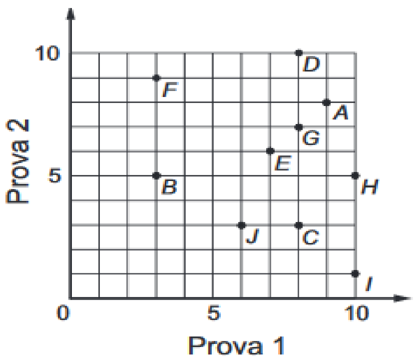
Exercício 6.

A soma dos números das faces opostas de um dado é sempre 7. O dado da figura é girado sucessivamente sobre o caminho indicado até parar na última posição, destacada em cinza. Nessa posição, qual é o número que está na face superior do dado?



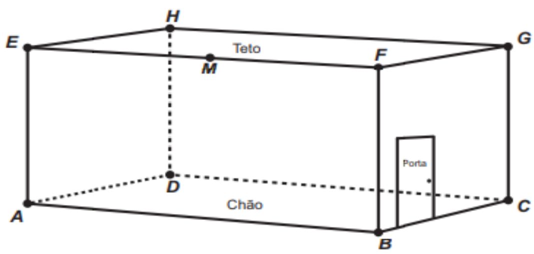
Exercício 7.

O professor Michel aplicou duas provas a seus dez alunos e divulgou as notas por meio do gráfico mostrado abaixo. Por exemplo, o aluno A obteve notas 9 e 8 nas provas 1 e 2, respectivamente; já o aluno B obteve notas 3 e 5. Para um aluno ser aprovado, a média aritmética de suas notas deve ser igual a 6 ou maior do que 6. Quantos alunos foram aprovados?



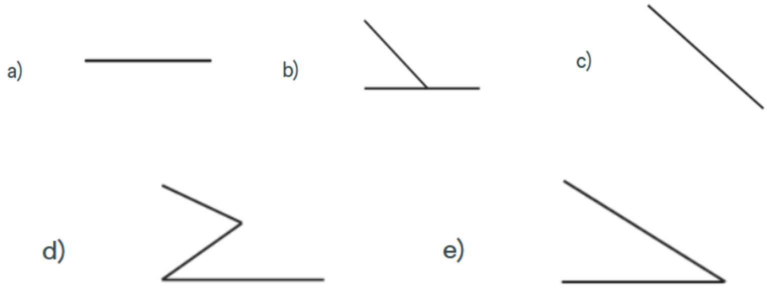
Exercício 8.

Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



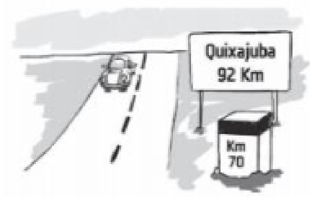
A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

A projeção “ortogonal” desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:



Exercício 9.

A estrada que passa pelas cidades de Quixajuba e Paraqui tem 350 quilômetros. No quilômetro 70 dessa estrada há uma placa indicando Quixajuba a 92 km. No quilômetro 290 há uma placa indicando Paraqui a 87 km. Qual é a distância entre Quixajuba e Paraqui?

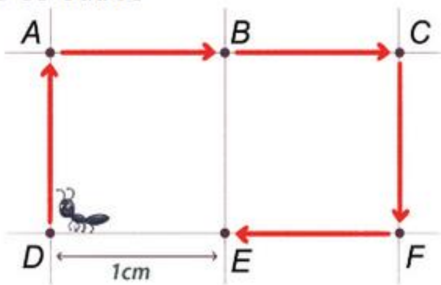


Exercício 10.

Escreva em ordem decrescente os números $\sqrt[5]{3}$, $3^{-2/3}$, 3^{-2}, $\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

Exercício 11.

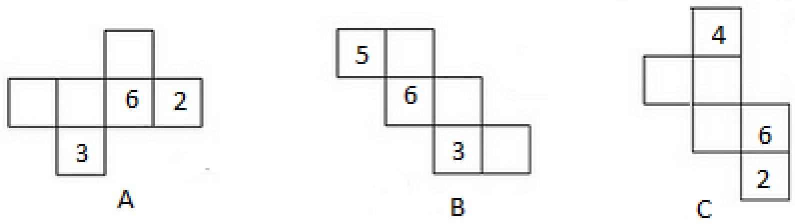
No quadriculado abaixo foram marcados seis pontos: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*. Uma formiguinha parte de um desses pontos e, andando apenas 5 cm, consegue visitar todos os outros pontos. Um exemplo é mostrado na figura.



Represente todas as trajetórias diferentes que a formiguinha pode escolher um ponto de partida e depois visitar os outros pontos andando apenas 5 cm.

Exercício 12.

Cada uma das figuras seguintes pode ser “dobrada” de forma a representar um dado. Em todas as figuras faltam três números. Determine como numerar os quadrados em branco, de forma que a soma dos números em faces opostas seja sempre sete.



OBS: Sugerimos relacionar essa questão com a questão 06 anterior.

Solução Exercício 1. (Livro: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra, pg. 28)

Observe que os pontos correspondentes aos quadrados perfeitos pares e ímpares estão sobre os lados vertical e horizontal do quadriculado, respectivamente. Os quadrados perfeitos mais próximos de 2001 são $1936 = 44^2$ e $2025 = 45^2$. Como 2001 está mais próximo de 2025, o ponto correspondente está no segmento vertical descendente que termina em 2025. Logo, o ponto imediatamente abaixo dele corresponde ao número 2002. Para determinar o número do ponto imediatamente à sua esquerda, consideramos o quadrado perfeito ímpar anterior ao 2015, que é o $43^2 = 1849$. O ponto desejado está no segmento ascendente, que começa em 1850 e está situado à mesma distância que o ponto 2001 está de 2025. Dessa forma, o número procurado é $1850 + (2025 - 2001) = 1850 + 24 = 1874$.

OBS: O problema estimula a percepção de padrões numéricos presentes na rede quadriculada. Sugerimos ao professor iniciar a atividade destacando, junto aos alunos, os posicionamentos na rede dos quadrados perfeitos pares e ímpares.

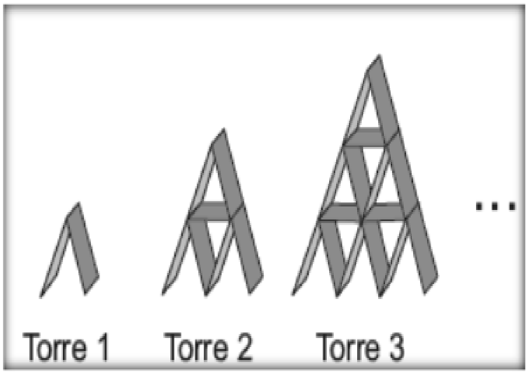
Solução do Exercício 2. (Banco de Questões 2010, Nível 2, questão 5, página 35)

Observe que a aranha utiliza oito fios de apoio, numerados a partir do fio A, iniciando em 0. Logo,

- sobre o fio A aparecem os múltiplos de 8;
- sobre o fio B aparecem os (múltiplos de 8)+1;
- sobre o fio C aparecem os (múltiplos de 8)+2;
- sobre o fio D aparecem os (múltiplos de 8)+3;
- sobre o fio E aparecem os (múltiplos de 8)+4;
- sobre o fio F aparecem os (múltiplos de 8)+5;
- sobre o fio G aparecem os (múltiplos de 8)+6;
- sobre o fio H aparecem os (múltiplos de 8)+7.

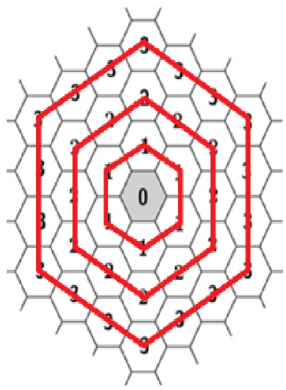
Na divisão de 118 por 8 encontramos resto 6, o que significa que 118 é dado por (múltiplos de 8) + 6. Assim, 118 está sobre o fio G.

Solução do Exercício 3. (Prova da OBMEP – 2018, N1, 1ª fase, questão 11)



Basta observar que da Torre 1 para a Torre 2 foram acrescentados 5 = 2 + 1 x 3 cartões. De fato, para construir a Torre 2 a partir da Torre 1, foram acrescentados dois novos cartões (em contato com a mesa) e, a seguir, no topo foram acrescentados mais 3 cartões. De modo análogo, para construir a Torre 3 a partir da Torre 2, foram acrescentados à Torre 2 mais 8 = 2 + 2 x 3 cartões, ou seja, dois novos cartões em contato com a mesa e 2 grupos de três cartões acima deles. Continuando, da Torre 3 para a 4 devem ser acrescentados 2 + 3 x 3 = 11 cartões e assim sucessivamente, sempre colocando 2 cartões novos em contato com a mesa e mais grupos de 3 cartões até completar a torre seguinte. Concluímos, desse modo, que da torre 10 para a torre 11 devem ser acrescentados 2 + 10 x 3 = 32 cartões.
Observe que a Torre N+1 é obtida da Torre N acrescentando-se 3N + 2 cartões.

Solução do Exercício 4. (Prova da OBMEP – 2015, N2, 1ª fase, questão 4)



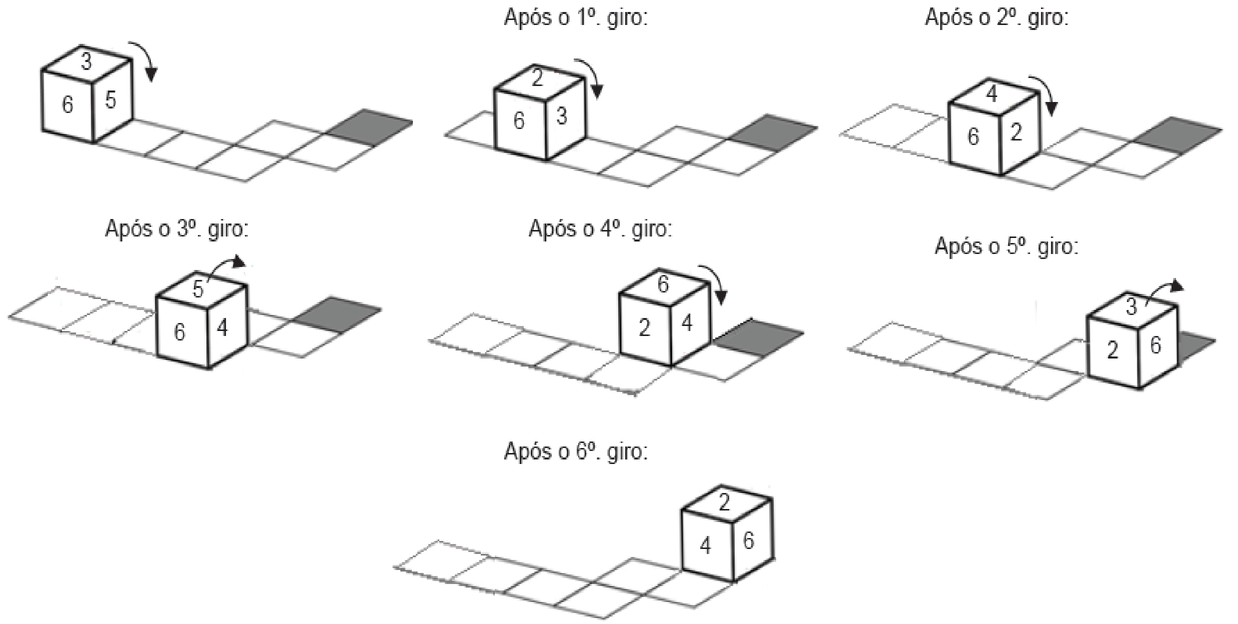
Observemos os segmentos que unem os centros dos hexágonos de cada etapa, mostrados na figura ao lado. Percebemos que cada um desses segmentos, na etapa 1, une dois centros, na etapa 2, três centros, na etapa 3, quatro centros e assim sucessivamente, aumentando 1 centro por segmento, por etapa.
Como em cada etapa os segmentos que unem os centros formam um hexágono, temos o acréscimo de 6 pequenos hexágonos por etapa. Logo, 6 hexágonos recebem o número 1, 6+6=12 recebem o número 2, (6+6+6)=3x6=18 recebem o número 3 e, continuando o processo, concluímos que 6 x 6 = 36 hexágonos recebem o número 6.

Solução do Exercício 5. (Simulado OBMEP, 2018, nível 3, questão3)

Basta verificar que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial. Como $2012 = 8 \times 251 + 4$, após o 2012º giro o quadrado cinza terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à alternativa A.

Solução do exercício 6. (Prova da OBMEP, nível 3, 2016, questão 1)

O enunciado da questão mostra o dado em suas duas primeiras posições. Continuando os sucessivos giros, observamos que as faces do dado se comportam da seguinte maneira:



Assim, o número que aparece no topo do dado quando este estiver sobre a casa cinza é 2.

Solução do exercício 7. (Prova OBMEP 2014, nível 2, questão 8, 1ª fase)

De acordo com o gráfico, os alunos obtiveram as seguintes notas e médias:

	Prova 1	Prova 2	Média Aritmética
A	9	8	8,5
B	3	5	4
C	8	3	5,5
D	8	10	9
E	7	6	6,5
F	3	9	6
G	8	7	7,5
H	10	5	7,5
I	10	1	5,5
J	6	3	4,5

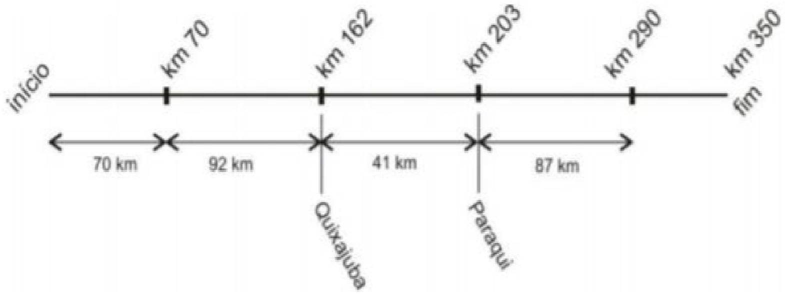
Assim, somente os alunos *A*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* ficaram com média aritmética maior do que ou igual a 6 e, dos dez alunos, somente seis foram aprovados.

Solução do Exercício 8. (Prova ENEM 2017, questão 179)

A projeção será linha reta, representando o deslocamento AB. Já o deslocamento de A até M será uma reta inclinada representando o trajeto de A até E e de E até M. Considerando a projeção de M no ponto médio do segmento AB a melhor resposta será a letra B.

Solução do Exercício 9. (Simulado OBMEP, 2017, nível 2, 1ª fase)

Na figura a seguir, admitimos que a estrada de 350 km começa à esquerda e termina à direita; também não faz diferença supor que Quixajuba esteja à esquerda de Paraqui.



Vamos explicar como foi feita a figura. Notamos que Quixajuba não pode estar à esquerda do quilômetro 70, pois nesse caso ela estaria antes do início da estrada. Logo ela está à direita do quilômetro 70 e fica no quilômetro 70 + 92 = 162 da estrada. Do mesmo modo vemos que Paraqui está à esquerda do quilômetro 270 e fica no quilômetro 290 − 87 = 203. Portanto, a distância entre as duas cidades é 203 − 162 = 41 quilômetros.

Solução do Exercício 10. (Banco de Questões 2010, N2, página 55)

Observe que $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \iff 0 < a < b < c$. Como $1 < 3^{2/3} < 3^2 < 3^3$, resulta

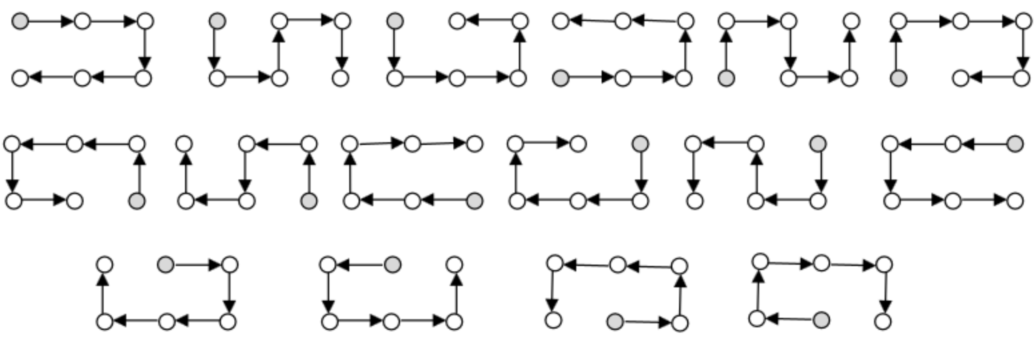
$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3^{2/3}} < 1.$$

Também $1 < 3 < 3^5$, portanto $1 < \sqrt[5]{3} < 3$. Resta observar que $\frac{1}{3^3} = (\frac{1}{3})^3$, $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, $\frac{1}{3^{2/3}} = 3^{-2/3}$ e $3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, para estabelecer que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 < 3^{-2} < 3^{-2/3} < \sqrt[5]{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

Solução do Exercício 11. (Prova da OBMEP – 2015, N2, 1ª fase, questão 8)

Há exatamente 4 x 3 + 2 x 2 = 16 possibilidades, três para cada um dos pontos dos cantos A, C, F e D e dois para cada um dos pontos intermediários B e E.



Solução do Exercício 12.

O objetivo dessa atividade é estimular a visão espacial do aluno, gerando representações que prioritariamente não façam uso de modelos concretos. Estimule o aluno a tentar visualizar a ação de dobra. Caso não tenha sucesso, pode-se recorrer a manipulação de um modelo concreto facilmente obtido com um cubo de papel.