

Módulo de Introdução à Probabilidade

Ferramentas Básicas.

2^a série E.M.



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Uma prova é composta por 5 questões de múltipla escolha com 3 alternativas cada uma. Qual a probabilidade de um candidato responder no “chute” a todas as questões e:

- acertar as três primeiras e errar as duas últimas?
- acertar exatamente três questões?
- acertar pelo menos três questões?

Exercício 2. A urna A contém 7 bolas brancas e 3 pretas. A urna B contém 4 bolas brancas e 5 pretas. Passa-se uma bola, escolhida ao acaso, da urna A para a urna B e, em seguida, retira-se, também ao acaso, uma bola da urna B . Qual a probabilidade de que a bola retirada da urna B seja branca?

Exercício 3. Uma microempresa é composta por 5 pessoas, 3 mulheres e 2 homens. Duas dessas pessoas serão enviadas para uma convenção.

- Qual a probabilidade de selecionarem 2 mulheres?
- Se 3 membros da microempresa puderem viajar, qual a probabilidade de escolherem exatamente 2 mulheres?

Exercício 4. Segundo os dados meteorológicos divulgados pela TV para este fim de semana, a probabilidade de chover no sábado é de 50%, e de chover no domingo é de 50%. Considerando essas previsões e esses eventos independentes, qual é a probabilidade de chover neste final de semana?

Exercício 5. Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 9 rosas das quais 5 tem espinhos e o vaso B contém 8 rosas sendo que exatamente 6 não tem espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B . Em seguida, retira-se uma rosa de B . Qual a probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos?

Exercício 6. Quatro dados não-viciados são jogados. Qual é a probabilidade que o produto dos números que aparecem nas faces superiores dos dados seja 36?

Exercício 7. Numa prova de exame de Admissão a faculdade, há 9 questões de escolha múltipla com 4 respostas, das quais só uma é verdadeira. Se um aluno decidir responder ao acaso, qual é a probabilidade:

- Acertar em todas as respostas?
- Acertar em apenas duas respostas?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma; quando sai coroa, ele avança duas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

Exercício 9. No brinquedo ilustrado na figura 1, bolinhas são colocadas nas entradas A , B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando nas caixas 1, 2 ou 3.

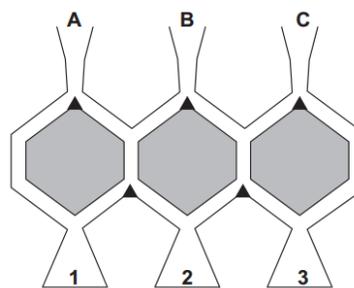


Figura 1

Ao atingir um dos pontos marcados com \blacktriangle , as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.

- Se uma bolinha for colocada em C , em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B ?
- Se uma bolinha for colocada em A , qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B , qual é essa probabilidade?

Exercício 10. Paulo e Beto são amigos e pretendem assistir determinado jogo de futebol no estádio. Sabendo que a probabilidade de Paulo ir a esse jogo é $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de Beto não ir a esse jogo é $\frac{2}{5}$, então qual a probabilidade de que pelo menos um deles vá ao jogo?

Exercício 11. Dois eventos A e B de um espaço amostral são independentes. A probabilidade do evento A é $P(A) = 0,4$ e a probabilidade da união de A com B é $P(A \cup B) = 0,8$. Pode-se concluir que a probabilidade do evento B é:

- a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

Exercício 12. A Boutique TT tem em estoque 400 camisas da marca X das quais 50 apresentam defeitos e 200 da marca Y das quais 15 são defeituosas. Se um cliente comprou (aleatoriamente) uma camisa nesta loja, a probabilidade de ela ser da marca Y ou defeituosa é:

- a) 0,025 b) 0,358 c) 0,417 d) 0,500 e) 0,592

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

- a) $\frac{1}{29}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{1}{31}$ d) $\frac{1}{60}$ e) $\frac{1}{61}$

Exercício 14. Um professor de matemática entrega aos seus alunos uma lista contendo 10 problemas e avisa que 5 deles serão escolhidos ao acaso para compor a prova final. Se um aluno conseguiu resolver, corretamente, apenas 7 dos 10 problemas, a probabilidade de que ele acerte todos os problemas da prova é

- a) $\frac{7}{84}$ b) $\frac{21}{84}$ c) $\frac{59}{84}$ d) $\frac{77}{84}$ e) 1

Exercício 15. Qual a probabilidade num grupo de 44 pessoas, que existam, ao menos duas, que façam aniversário no mesmo dia?

Exercício 16. Um jogo é composto das seguintes regras:

- I) Um dado não-viciado é jogado;
- II) Se sair o número 3, então o jogador *A* ganha;
- III) Se sair um dos números dentre 4, 5 ou 6, então o jogador *B* ganha; e
- IV) Se sair um dos números dentre 1 ou 2, o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.

Qual a probabilidade do jogador 2 vencer?

Exercício 17. Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

Exercício 18. Se um método de fertilização *in vitro* tiver 30% de chance de sucesso a cada tentativa, pode-se estimar, usando $\log_{10} 7 = 0,85$, qual o número mínimo de tentativas para se ter uma probabilidade de sucesso superior a 90%?

Exercício 19. Jogando-se quatro vezes um dado comum de seis faces, não viciado, qual a probabilidade de obtermos um resultado maior ou igual a 5 apenas na quarta jogada?

Exercício 20. João faz parte de um grupo de 10 pessoas. Desse grupo, três pessoas são sorteadas em uma premiação. Qual é a probabilidade de João ter sido sorteado?

Exercício 21. Numa caixa estão três bolas numeradas de 1 a 3. Um dado, com seis faces numeradas de 1 a 6, é lançado e uma das bolas é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade da bola e do dado exibirem o mesmo número?

Exercício 22. Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tato: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se simultaneamente três bolas do saco, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números das bolas retiradas ser igual a cinco?

Respostas e Soluções.

1. A probabilidade de acertar cada questão de modo aleatório é igual a $\frac{1}{3}$ (e o erro tem probabilidade de $\frac{2}{3}$).

a) Foi pedida uma sequência do tipo $CCCEE$, o que tem probabilidade igual a

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{243}.$$

b) A sequência $CCCEE$, não necessariamente nessa disposição, pode ser feita de $P_{3,2}^5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ maneiras. Então a probabilidade pedida será igual a

$$10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{243}.$$

c) O mínimo de três acertos permite também a ampliação para quatro ou cinco acertos e isso pode ser com três acertos (letra b), ou

- quatro acertos, que tem probabilidade igual a

$$5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{243}; \text{ ou}$$

- cinco acertos, com probabilidade igual a

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{243}.$$

e no total

$$\frac{40}{243} + \frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{51}{243}.$$

2. (Adaptado do vestibular da FEI – 2015.2) Temos dois cenários, a saber:

i) passar uma bola branca de A para B e sacar uma branca de B . Nesse caso, temos

$$P(A_{\text{branca}}) \cap P(B_{\text{branca}}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4+1}{9+1} = \frac{35}{100}; \text{ e.}$$

ii) passar uma bola preta de A para B e sacar uma branca de B . Chegamos a

$$P(A_{\text{preta}}) \cap P(B_{\text{branca}}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9+1} = \frac{12}{100}.$$

Por fim, o que é pedido obtém-se com a soma dos casos anteriores

$$P = \frac{35}{100} + \frac{12}{100} = \frac{47}{100} = 47\%.$$

3. O universo das escolhas pode ser calculado como $|U| = C_2^5 = 10$. Seja M_2 o conjunto de todas as possíveis duplas de mulheres a serem formadas, então $|M_2| = C_2^3 = 3$, logo a $P(M_2) = \frac{3}{10} = 30\%$. Na sequência, temos duas opções entre os homens para ocupar a nova vaga juntamente com as duplas já postas na letra "a", então ficaremos com $2 \cdot 3 = 6$ trios possíveis com duas mulheres e um homem, o que gera $P(M_2 \cap H_1) = \frac{3}{10} \cdot 2 = 60\%$.

4. Podemos ter a chuva:

i) no sábado e não no domingo, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

ii) não no sábado, mas no domingo, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; e

iii) em ambos, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

A probabilidade pedida será igual a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

5. (Extraído da exame de acesso da AFA – 2016)

Podemos ter duas situações, a saber:

i) retirar do vaso A um rosa sem espinho e colocá-la em B e depois retirar uma rosa com espinho de B , a probabilidade para isso será igual a

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8+1} = \frac{8}{81}; \text{ e}$$

ii) retirar do vaso A um rosa com espinho e colocá-la em B e depois retirar uma rosa com espinho de B , a probabilidade para isso será igual a

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{2+1}{8+1} = \frac{15}{81}.$$

Por fim, a probabilidade pedida será $P = \frac{8}{81} + \frac{15}{81} = \frac{23}{81}$.

6. (Extraído da Olimpíada da Holanda)

Seis dados podem gerar 6^4 resultados dispostos e temos quatro possíveis fatores para o produto ser igual a 36, a saber:

i) $\{1, 1, 6, 6\}$, obtido de $P_{2,2}^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ formas;

ii) $\{1, 2, 3, 6\}$, obtido de $P^4 = 4! = 24$ formas;

iii) $\{1, 3, 3, 4\}$, obtido de $P_{2,2}^4 = \frac{4!}{2!} = 12$ formas; e

iv) $\{2, 2, 3, 3\}$, obtido de $P_{2,2}^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ formas.

Por fim, a probabilidade pedida será igual a

$$\frac{6 + 24 + 12 + 6}{6^4} = \frac{1}{27}.$$

7. Para acertar uma questão ao acaso a probabilidade será igual a $\frac{1}{4}$, para acertar a nove teremos

$$P = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{262144}.$$

Para acertar em apenas duas temos

$$P(\text{duas certas}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Para errar as outras 7 ficamos com

$$P(\text{errar sete}) = \left(\frac{3}{4}\right)^7.$$

A sequência de acertos e erros pode ser formada começando pelos acertos com a quantidade de (entre 9 escolher 2) $C_2^9 = 36$ (logicamente, as demais serão erradas),

o que dá uma probabilidade de $P = 36 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

8. (Adaptado da OBMEP)

Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras, a saber:

i) (cara, cara, cara) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

ii) (cara, cara, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

iii) (cara, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

iv) (coroa, cara) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \text{ e}$$

v) (coroa, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Apenas os itens ii, iii e v terminam em **coroa**. Como as alternativas são mutuamente exclusivas ("regra do ou"), devemos somá-las para obter a probabilidade desejada que é igual

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

9. (Adaptado da OBMEP)

a) Uma bolinha colocada em C só poderá parar nas caixas 2 ou 3; se colocada em B, ela poderá parar em qualquer das caixas.

b) Se ela parte de C, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a esquerda tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade dela chegar à caixa 2 é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou 25%.

Se a bolinha for depositada em B, pelo mesmo raciocínio, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: direita, esquerda ou esquerda, direita; ambos ocorrem com probabilidade $\frac{1}{4}$. Como estes eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo a probabilidade da bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

10. (Extraído do vestibular da FACISB)

Podemos ter:

i) a ida de Paulo e a não ida de Beto, $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$;

ii) a não ida de Paulo e a ida de Beto, $P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$; e

iii) a ida de ambos, $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{15}$.

A probabilidade pedida será igual a

$$\frac{2}{15} + \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = \frac{11}{15}.$$

11. (Extraído do vestibular da FGV – 2014)

Se os eventos são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Substituindo os valores do enunciado ficaremos com

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$0,8 = 0,4 + P(B) - 0,4 \cdot P(B)$$

$$0,4 = 0,6P(B)$$

$$P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{8}$$

$$P(B) = \frac{2}{3},$$

o que está na letra **D**.

12. (Extraído do vestibular da UFGD (MS) – 2014)
A probabilidade de ser da marca Y é $\frac{200}{600}$, de ser defeituosa é de $\frac{15+50}{600}$ e de ser uma camisa Y e defeituosa é de $\frac{15}{600}$. Assim, sendo D o conjunto das camisas defeituosas, a probabilidade pedida pode ser calculada usando a fórmula $P(Y \cup D) = P(Y) + P(D) - P(Y \cap D)$, que resulta em $\frac{200}{600} + \frac{65}{600} - \frac{15}{600} = P(55) = \frac{250}{600} = 0,41\bar{6}$, cuja aproximação está na letra C.

13. (Extraído da OBM)
Inicialmente, observe que todos os alunos têm a mesma probabilidade de serem sorteados. Com o ocorrido temos duas situações, a saber:

- i) a probabilidade do número de Pedro ter se perdido é igual a $\frac{1}{30}$ e caso isso tenha acontecido a probabilidade dele ganhar é igual a 0; e
- ii) a probabilidade do número de Pedro NÃO ter se perdido é igual a $\frac{29}{30}$ e assim a probabilidade dele ganhar é igual a $\frac{1}{29}$.

Por fim, ficamos a probabilidade da união desses casos

$$\frac{1}{30} \cdot 0 + \frac{29}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{30}.$$

O que está na letra B.

14. (Extraído do vestibular do MACK(SP) – 2012)
A probabilidade das questões que ele sabe cair é igual a $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12} = \frac{7}{84}$, o que está na letra A.

15. A quantidade de datas de dispor os aniversários das 44 pessoas é 365^{44} . Agora, sendo A o conjunto com a listagem de todas as distribuições com datas repetidas (duas ou mais vezes), então \bar{A} é o conjunto no qual não há repetição de datas. Daí, é claro que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ e

$$P(\bar{A}) = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - 44 + 1)}{365^{44}}.$$

Logo, ficamos com

$$P(A) = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - 44 + 1)}{365^{44}},$$

que é aproximadamente igual a 95%.

16. Seja $P_i(n)$ a probabilidade do jogador n , $n \in \{A, B\}$ vencer na rodada i , com i inteiro positivo, e $P_i(\bar{n})$ a probabilidade do jogador n não vencer na rodada i . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} P_1(B) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ P_2(B) &= P_1(\bar{B}) \cdot P_2(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \\ P_3(B) &= P_1(\bar{B}) \cdot P_2(\bar{B}) \cdot P_3(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \\ &\vdots \\ P_n(B) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por fim, a probabilidade do jogador 2 vencer será igual a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

17. (Extraído da OBM)
A probabilidade de sair um dois é igual a $\frac{1}{6}$, e de não sair é $\frac{5}{6}$. No lançamento de n dados, se o primeiro dado for igual a dois e os demais todos forem diferentes, teremos

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

e a soma de todas as posições nas quais um único dado pode ser igual a 2 ficará $P_n = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Buscamos n tal que $P_{n-1} \leq P_n$ e $P_n \geq P_{n+1}$. Daí, ficamos com

$$\begin{aligned} P_{n-1} &\leq P_n \\ (n-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{(n-1)-1} &\leq n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ 6(n-1) &\leq 5n \\ n &\leq 6. \end{aligned}$$

Por outro lado, escrevemos

$$\begin{aligned} P_n &\geq P_{n+1} \\ n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} &\geq (n+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{(n+1)-1} \\ 6n &\geq 5(n+1) \\ n &\geq 5. \end{aligned}$$

Por fim, $n = 5$ ou $n = 6$.

18. Se, em uma tentativa, a chance de sucesso é 30%, então o erro ocorre com 70%. Por tanto, para dar *totalmente* errado (sem tentativa certa) depois de n tentativas equivale a $(0,7^n \cdot 100)\%$ e a chance de algum dar certo é igual a $((1 - 0,7^n) \cdot 100)\%$. Assim, podemos construir a inequação com o que questão pede

$$\begin{aligned} 1 - 0,7^n &> 0,9 \\ 0,7^n &< 0,1 \\ \log 0,7^n &< \log 0,1 \\ n \cdot \log 0,7 &< \log 0,1 \\ n &> \frac{\log 0,1}{\log 0,7} \\ n &> \frac{\log 0,1}{\log 7 + \log 0,1} \\ n &> \frac{-1}{0,85 - 1} \\ n &> \frac{100}{15} \cong 6,66. \end{aligned}$$

Logo, o menor número de tentativas deve ser 7.

19. (Extraído do material do PROFMAT – 2015)

A probabilidade de obter um resultado maior ou igual a 5 é $\frac{2}{6}$, logo, a probabilidade de seu complementar é $\frac{4}{6}$ (a cada lançamento). A probabilidade de ocorrer o valor maior do que ou igual a 5 apenas na quarta jogada significa que nos três lançamentos anteriores, não ocorreu tal resultado. Assim, como cada arremesso de dados é independente dos demais, temos

$$P = \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{8}{81}.$$

20. (Extraído do material do PROFMAT – 2014)

Seja $P(J_i)$ a probabilidade de João ser sorteado para a vaga i , $i \in \{1, 2, 3\}$ e considerando todo sorteio equiprovável, então a

$$\begin{aligned} \text{i) } P(J_1) &= \frac{1}{10} \text{ e } P(\bar{J}_1) = \frac{9}{10}; \\ \text{ii) } P(J_2) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10} \text{ e } P(\bar{J}_2) = \frac{9}{10}; \text{ e} \\ \text{iii) } P(J_3) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Assim, unindo os possíveis eventos, temos que ele pode ter sido sorteado em qualquer uma das vagas para vencer. Daí, chegamos a

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

21. (Adaptado do material do PROFMAT – 2014)

Sejam B_n , $n \in \{1, 2, 3\}$, e D_i , $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, os resultados possíveis das/os retiradas/lançamentos de uma bola e um dado quaisquer. Para a bola sair com um número n , temos a probabilidade $P(B_n) = \frac{1}{3}$, para uma face qualquer do dado temos a probabilidade $P(D_n) = \frac{1}{6}$. Queremos a probabilidade de para $i = j$, ou seja,

$$\begin{aligned} P(B_1) \cdot P(D_1) + P(B_2) \cdot P(D_2) + P(B_3) \cdot P(D_3) &= \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} &= \\ 3 \cdot \frac{1}{18} &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

22. (Extraído do material do PROFMAT – 2014)

Para que os números somem 5 podemos ter as triplas $(1, 1, 3)$ ou $(1, 2, 2)$ além de suas permutações (3 de cada). Logo a probabilidade é dada por

$$\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot 3 + \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot 3 = \frac{21}{110}.$$