

Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 2

Congruência de Triângulos e Aplicações.

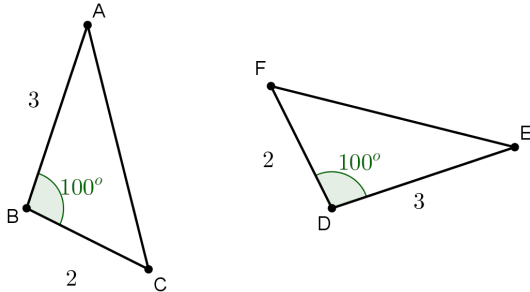
8° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

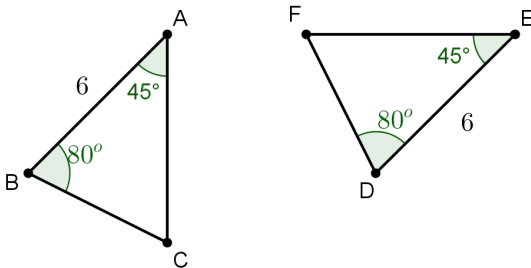


1 Exercícios Introdutórios

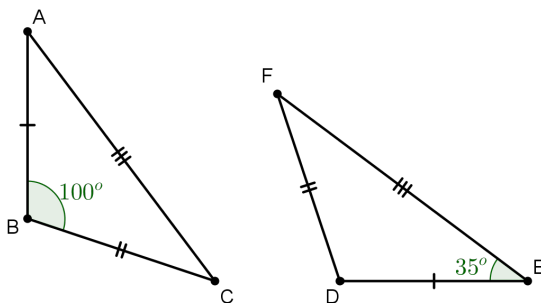
Exercício 1. Os triângulos abaixo são congruentes pelo caso *LAL*. Determine os lados homólogos e os vértices correspondentes desta congruência.



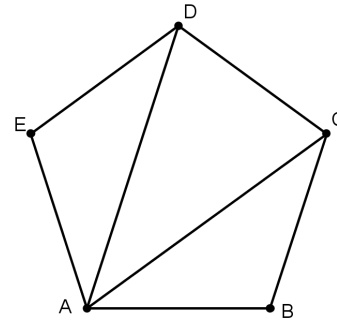
Exercício 2. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes?



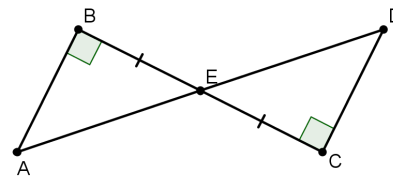
Exercício 3. Calcule os ângulos internos dos triângulos abaixo.



Exercício 4. No pentágono regular abaixo, duas diagonais são traçadas formando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEA$. Determine o caso de congruência destes triângulos.

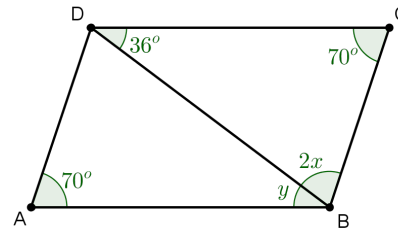


Exercício 5. Na figura, temos $AB = 30$, $DE = 50$, $AE = 3x - 1$ e $CD = 2y + 8$. Determine os valores de x e y .



2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Determine $x + y$ no paralelogramo abaixo.

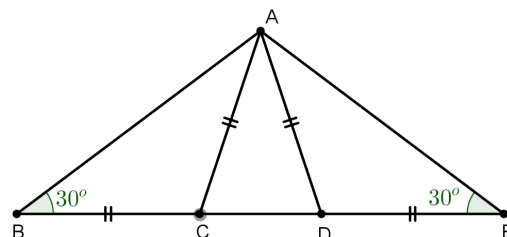


Exercício 7. Mostre que a altura, relativa à base, de um triângulo isósceles o divide em dois triângulos congruentes.

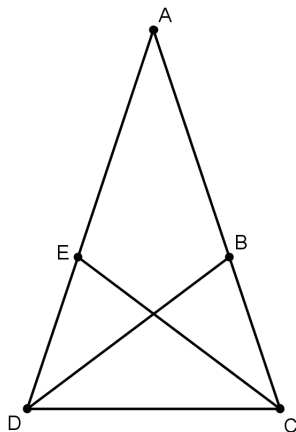
Exercício 8. Dado um segmento AB , construímos $\angle CAB \equiv \angle DBA$, com $AC = DB$. Unindo os pontos C e D obtemos o ponto M no segmento AB . Mostre que M é ponto médio de AB .

Exercício 9. No triângulo isósceles $\triangle ABC$, de base BC , marcamos sobre o lado BC os pontos D e E , de maneira que $BD \equiv EC$. Mostre que $\triangle ADB \equiv \triangle AEC$.

Exercício 10. Na figura, ABC é um triângulo e $BC = CA = AD = DE$. Determine a medida de $\angle DAC$.



Exercício 11. Na figura abaixo $AE = EC = CD = DB = BA$. Determine a medida de $\angle DAC$.

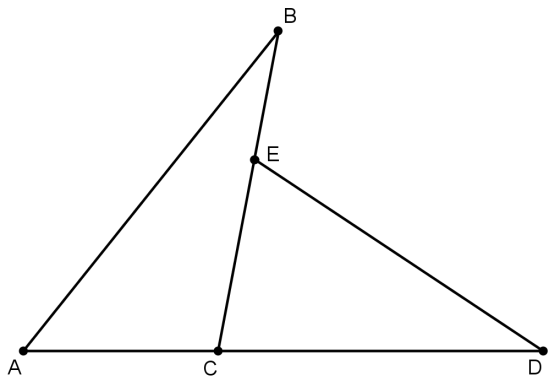


Exercício 12. Mostre que qualquer diagonal do paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes.

Exercício 13. Mostre que se um triângulo possui duas alturas iguais, então o triângulo é isósceles.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

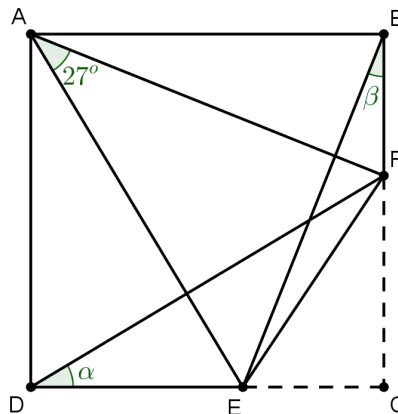
Exercício 14. A figura a seguir foi feita por uma criança. No entanto, sabe-se que $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ são triângulos congruentes, os vértices A, C e D são colineares e os vértices B, E e C também o são.



É correto afirmar que:

- o segmento BE é congruente ao segmento AC .
- a reta AD é perpendicular à reta BC .
- o ângulo $\angle BED$ é congruente ao ângulo $\angle ACB$.
- o segmento CD é hipotenusa do triângulo $\triangle CDE$.
- o ponto E é o ponto médio do segmento BC .

Exercício 15. O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura a seguir?



Exercício 16. Mostre que, se P é um ponto da bissetriz do ângulo $\angle AOB$, então a distância de P à reta OA é igual à distância de P à reta OB .

Exercício 17. Seja m a mediatriz do segmento AB . Mostre que $P \in m$ se, e somente se, $PA \equiv PB$.

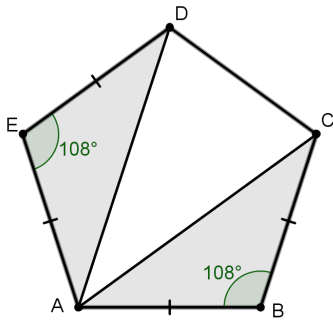
Respostas e Soluções.

1. Os pares de lados homólogos são AB e DE , AC e EF , BC e DF ; e os pares de vértices correspondentes são A e E , B e D , C e F .

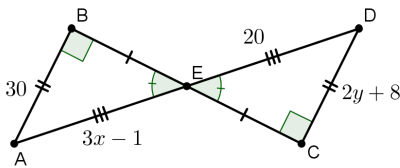
2. São congruentes pelo caso ALA , pois $\angle BAC = \angle DEF = 45^\circ$, $AB = DE = 6$ e $\angle ABC = \angle EDF = 80^\circ$.

3. Os triângulos são congruentes pelo caso LLL . Observando os lados homólogos, concluímos que $\angle ABC = \angle EDF = 100^\circ$, $\angle DEF = \angle BAC = 35^\circ$ e $\angle ACB = \angle EFD = 180^\circ - 100^\circ - 35^\circ = 45^\circ$.

4. Como o pentágono é regular, então $AB = BC = AE = ED$ e $\angle AED = \angle ABC = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle DEA$, pelo caso LAL .

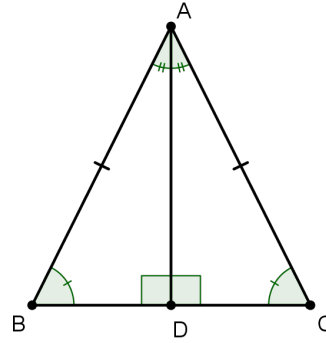


5. Como $\angle ABE = \angle DCE = 90^\circ$, $BE = CE$ e $\angle BEA \equiv \angle CED$, pois são opostos pelo vértice, então $\triangle ABE \equiv \triangle DCE$, pelo caso ALA . Igualando os lados homólogos temos $2y + 8 = 30$, segue que $y = 11$, e $3x - 1 = 50$, segue que $x = 17$.

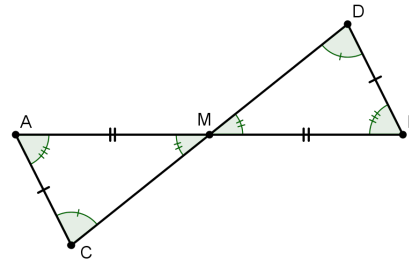


6. Como se trata de um paralelogramo, $AB = CD$, $AD = BC$ e $\angle BCD = \angle DAB = 70^\circ$, ou seja, $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$. Sendo assim, temos $y = \angle ABD = \angle CDB = 36^\circ$ e $2x + 70^\circ + 36^\circ = 180^\circ$, segue que $x = 37^\circ$. Concluímos então que $x + y = 73^\circ$.

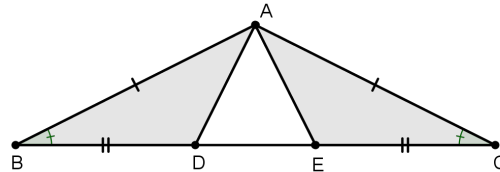
7. Vamos construir o triângulo isósceles $\triangle ABC$ de base BC e altura AD . Como o triângulo é isósceles, então $AB \equiv AC$ e $\angle ABD \equiv \angle ACD$. Além disso, se AD é altura, então $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$ e como $\angle ABD \equiv \angle ACD$, então $\angle BAD \equiv \angle CAD$. Sendo assim, podemos concluir que $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$, pelo caso ALA .



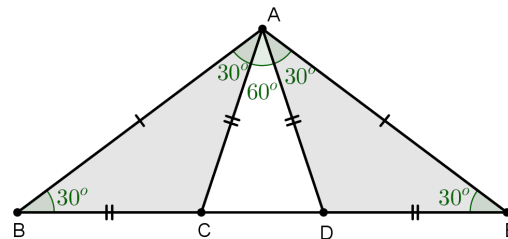
8. Como $\angle CAB \equiv \angle DBA$ e $\angle AMC \equiv \angle BMD$, pois são opostos pelo vértice, então $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$. Mas se $AC = DB$, então $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ e, por isso, AM e BM são homólogos, ou seja, $AM = BM$ e, portanto, M é ponto médio de AB .



9. Se $\triangle ABC$ é isósceles de base BC , então $AB \equiv AC$ e $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Por construção, $BD = EC$. Sendo assim, pelo caso LAL , $\triangle ADB \equiv \triangle AEC$.

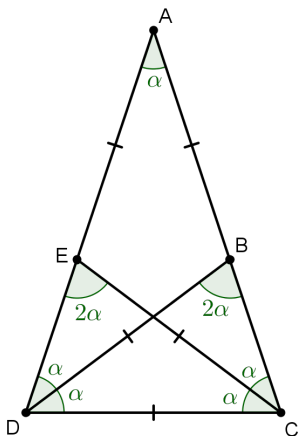


10. Como $BC = CA = AD = DE$, então $\triangle ABC$ e $\triangle AED$ são isósceles de bases AB e AE , respectivamente, além de serem congruentes. Temos então que $\angle BAC = \angle EAD = 30^\circ$. Como $\angle BAE = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$, então $\angle DAC = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

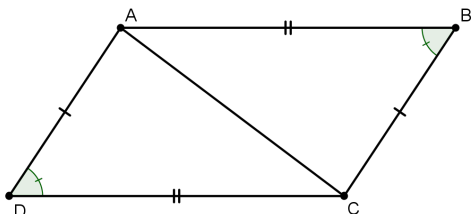


11. Se $AE = EC$, então $\angle EAC = \angle ECA = \alpha$. Da mesma forma, $\angle BDA = \angle BAD = \alpha$. Como $\angle CBD$ é ângulo externo de $\triangle ABD$, então

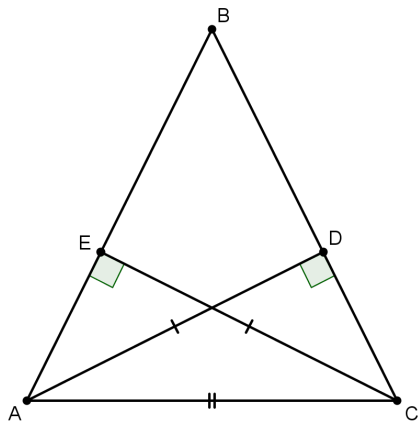
$\angle CBD = 2\alpha$ e, de forma análoga, $\angle DEC = 2\alpha$. Como $CD = DB$, então $\angle BCD = \angle CBD = 2\alpha$ e, pelo mesmo motivo, $\angle EDC = 2\alpha$. Somando os ângulos internos de $\triangle ACD$, temos $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, segue que $\alpha = 36^\circ$, ou seja, $\angle DAC = 36^\circ$.



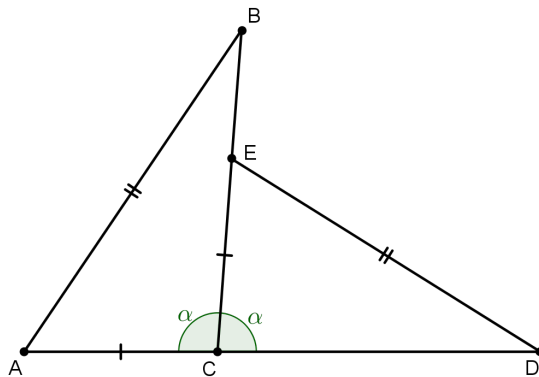
12. Vamos tomar o paralelogramo $ABCD$ e a diagonal AC (não seria diferente se tomássemos a diagonal BD). Como se trata de um paralelogramo, os lados opostos são congruentes e os ângulos opostos também são congruentes. Sendo assim, $AB = CD$, $BC = AD$ e $\angle ADC = \angle CBA$. Portanto, pelo caso LAL , $\triangle ACD \cong \triangle CAB$.



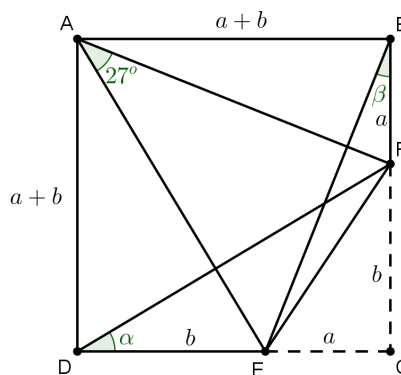
13. Seja ABC um triângulo onde as alturas AD e CE têm o mesmo comprimento e $\angle AEC = \angle CDA = 90^\circ$. Pelo caso especial de congruência (cateto-hipotenusa), temos $\triangle AEC \cong \triangle CDA$, sendo $\angle EAC \cong \angle DCA$. Portanto, $\triangle ABC$ é isósceles.



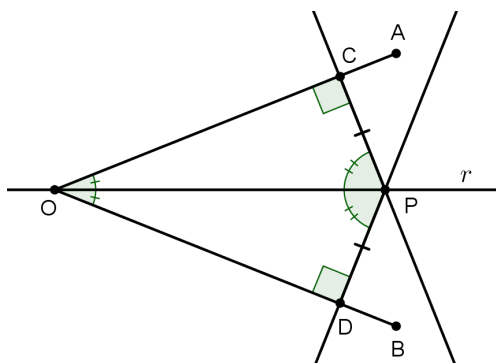
14. (Extraído da UEM-PR) Como $\triangle ABC \cong \triangle EDC$, os pares de lados homólogos são AC e CE , BC e DC , AB e ED , e $\angle ACB = \angle DCE$. Mas $\angle ACB + \angle DCE = 180^\circ$, ou seja, ambos são iguais a 90° . Portanto, as retas AD e BC são perpendiculares. Resposta B.



15. (Extraído da OBM) Chamando estes catetos CE e CF de a e b , respectivamente, o lado do quadrado vale $a + b$. Assim, $BF = a + b - b = a$ e $\triangle ABF \cong \triangle BCE$, pelo caso LAL , e, como consequência, $\angle BAF = \angle CBE = \beta$. De forma análoga, temos $\angle DAE = \angle CDF = \alpha$. Como $\angle DAB = 90^\circ$, ou seja, $\alpha + \beta + 27^\circ = 90^\circ$, chegamos a $\alpha + \beta = 63^\circ$.



16. (Extraído da Vídeo Aula) Sejam PC e PD as distâncias de P à OA e à OB , respectivamente. Sendo assim, $\angle OCP = \angle ODP = 90^\circ$. Se r , que contém P , é a bissetriz de $\angle AOB$, então $\angle COP = \angle BOP$ e, por consequência, $\angle CPO = \angle DPO$. Como OP é lado comum a $\triangle OCP$ e $\triangle OPB$, estes são congruentes, pelo caso ALA , e $PC = PB$.

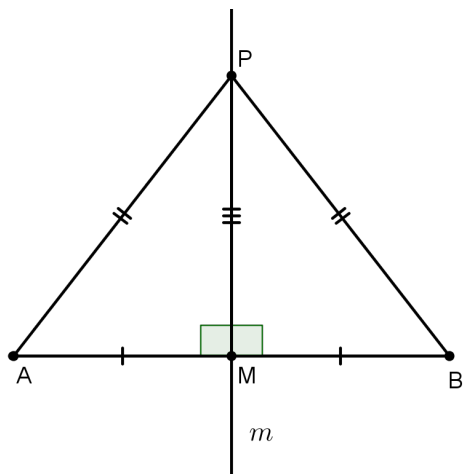


17. (Extraído da Vídeo Aula) Seja M o ponto médio do segmento AB .

I) Vamos mostrar que se $P \in m$, então $PA \equiv PB$:
 Se m é mediatriz do segmento AB , então $AM = BM$, pois M é ponto médio, e $\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ$. Além disso, PM é lado comum a $\triangle PMA$ e a $\triangle PMB$, ou seja, eles são congruentes, pelo caso LAL , e $PA \equiv PB$.

II) Vamos mostrar que se $PA \equiv PB$, então $P \in m$:
 Se M é ponto médio de AB , então $AM = BM$. Como $PA = PB$, por hipótese, e PM é lado comum a $\triangle PMA$ e a $\triangle PMB$, então eles são congruentes, pelo caso LLL , e $\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ$, ou seja, $P \in m$.

Por I e II, temos que $P \in m$ se, e somente se, $PA \equiv PB$.



ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
 PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
 CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM