Módulo de Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares.

Lei dos Cossenos e Lei dos Senos.

9º ano E.F.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares.
Leis dos Senos e dos Cossenos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule o que se pede em cada um dos itens abaixo.

a) Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 6 e 7?

b) Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?

c) Num triângulo com lados medindo 5 e 6 e ângulo entre eles de 60°, qual o lado oposto ao ângulo informado?

d) Qual o cosseno de maior ângulo do triângulo de lados medindo 2, 3 e 5?

Exercício 2. Dois lados de um triângulo medem 6 m e 10 m e formam entre si um ângulo de 120°. Determinar a medida do terceiro lado.

Exercício 3. Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3, 4 e x. Podemos afirmar que

a) $5 < x < 7$.
b) $\sqrt{7} < x < 5$.
c) $1 < x < \sqrt{7}$ ou $5 < x < 7$.
d) $x = 5$ ou $x = 7$.

Exercício 4. Sendo a o lado oposto ao ângulo α, b oposto a β e c oposto a γ, em um triângulo. Calcule:

a) o seno de β para $a = 4$ cm, $\alpha = 30^\circ$ e $b = 8$ cm;

b) o valor de γ para $a = \sqrt{2}$ cm, $\beta = 45^\circ$ e $b = 2$ cm.

Exercício 5. Dado um triângulo ABC com $BC = 5\sqrt{2}$ cm, $B\hat{A}C = 45^\circ$ e $A\hat{B}C = 30^\circ$. Qual a medida de AC ?

Exercício 6. Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo do qual se conhecem um lado $AB = 10$ m e o ângulo oposto $C = 60^\circ$.

Exercício 7. Um navio, deslocando-se em linha reta, visa um farol e obtém a leitura de 30° para o ângulo formado entre a sua trajetória e a linha de visada do farol. Após navegar 20 milhas, através de uma nova visada ao farol, obtém a leitura de 75°. Determine a distância entre o farol e o navio no instante em que fez a 2^a leitura.
(Use $\sqrt{2} \cong 1,4$).

Exercício 8. Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno do menor ângulo interno desse triângulo.

Exercício 9. No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30°. Quanto vale o seno do ângulo B?

Exercício 10. Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1 : 10000, como na figura 1. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância em km entre as ilhas A e B é:

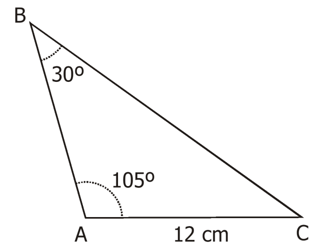


Figura 1

a) 2,3.
b) 2,1.
c) 1,9.
d) 1,4.
e) 1,7.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 11. Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

a) $\frac{11}{24}$
b) $-\frac{11}{24}$
c) $\frac{3}{8}$
d) $-\frac{3}{8}$
e) $-\frac{3}{10}$

Exercício 12. Calcule o que se pede em cada um dos itens abaixo.

a) Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 4, 5 e 6?

b) Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?

c) Qual o cosseno de maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 10 e 15?

Exercício 13. A, B e C são pontos de uma circunferência de raio 3 cm, $AB = BC$ e o ângulo $A\hat{B}C$ mede 30°. Calcule, em cm, o comprimento do segmento AC.

Exercício 14. Um $\triangle ABC$ tem lados AB, AC e BC que medem, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 9 cm. Determine a medida da mediana relativa ao lado AC.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15.

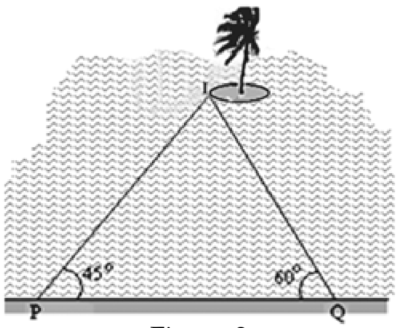


Figura 2

Estudos mostraram a viabilidade da construção de uma ponte ligando uma cidade litorânea a uma ilha, a partir de um ponto P ou de um ponto Q da costa, distantes 2400 m um do outro, até um ponto I da referida ilha.

Sabe-se que se a ponte for construída a partir de P ou de Q, formará com PQ ângulos de $45°$ e $60°$, respectivamente, e que, nas duas situações, o custo de construção é de 100 unidades monetárias por metro linear.

Com base nessas informações e considerando-se $\operatorname{sen} 75° = 0,96$, $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$, pode-se afirmar que, optando-se pela construção da ponte menor, haverá uma economia, em centenas de unidades monetárias, de

a) 12500.
b) 20350.
c) 37500.
d) 41330.
e) 51200.

Exercício 16. Considere o quadrilátero convexo $ABCD$ mostrado na figura 3, em que $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm e $\hat{A} = 90°$.

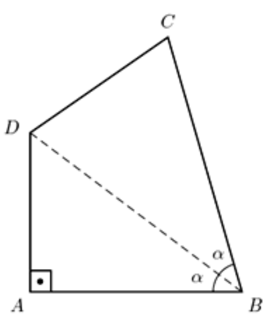


Figura 3

Se a diagonal BD está contida na bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ e $BD = BC$, então a medida do lado CD , em centímetros, vale

a) $2\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{10}$.
c) $\sqrt{11}$.
d) $2\sqrt{3}$.
e) $\sqrt{15}$.

Exercício 17. O vértice A de um $\triangle ABC$, equilátero de lado igual a 12 cm, foi dobrado sobre o segmento DE, $D \in AB$ e $E \in AC$, até ficar sobre BC, onde foi marcado o ponto A'. Se $CA' = 3$, determine a medida do segmento DE.

Exercício 18. No quadrilatero $ABCD$ da figura 4, $AB = CD = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $A\hat{D}C = 60°$ e $A\hat{B}C = 90°$. Determine a medida, em centímetros, do perímetro do quadrilátero.

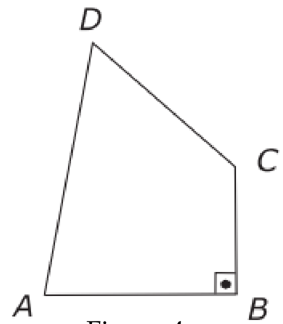


Figura 4

Exercício 19. Considere o triângulo ABC, retângulo em A, da figura 6.

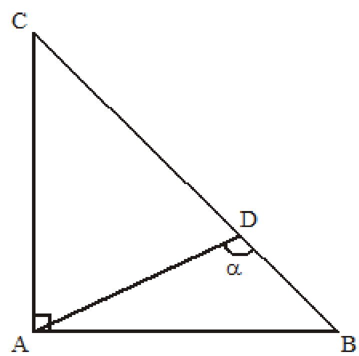


Figura 6

Sabendo que $\alpha = 120°$, $AB = AC = 1$ cm, então qual o valor de AD?

Exercício 20. Na figura 7, $AD = 2$ cm, $AB = \sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é $30°$ e $BD = DC$, onde D é ponto do lado AC . A medida do lado BC , em cm, é

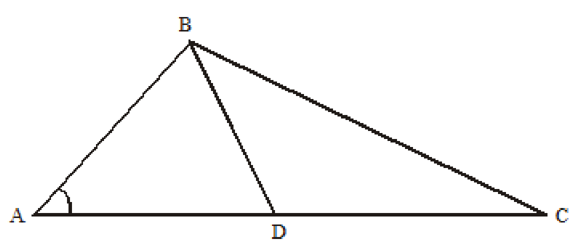
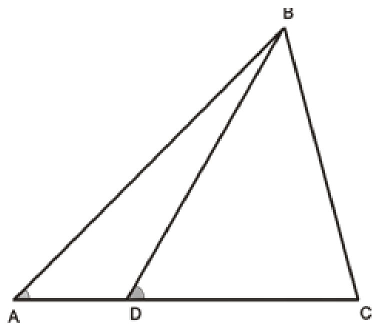


Figura 7

Exercício 21. Uma circunferência de raio 14 cm circunscreve um triângulo ABC. Calcule a medida do lado AB, sabendo-se que o triângulo ABC não é retângulo e que o ângulo $A\hat{C}B$ mede $30°$.

Exercício 22. Na figura abaixo, tem-se $B\hat{A}C = 45°$, $B\hat{D}C = 60°$, $AD = 5$ u.c. e $DC = 10$ u.c.. Com base nesses dados, calcule o comprimento de BC.



Exercício 23. Num triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60°$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

Exercício 24. Um observador, situado no ponto A, distante 30 m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura abaixo. Baseado nos dados da figura 8, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$.
Dados: $AB = 30$ m; $A\hat{C}D = 30°$; $C\hat{A}B = 75°$; $A\hat{B}C = 60°$; $D\hat{C}A = 90°$.

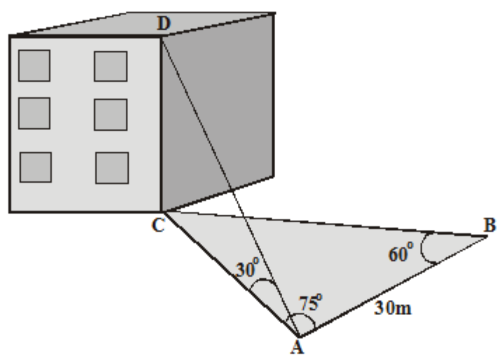


Figura 8

Exercício 25. a) Determine o perímetro do triângulo na forma decimal aproximada, até os décimos. Se quiser, use algum destes dados: $35^2 = 1225$; $36^2 = 1296$; $37^2 = 1369$.

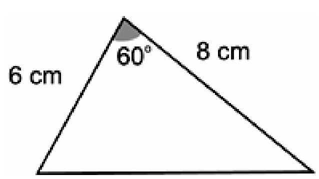


Figura 9

b) Um aluno tinha de fazer um cartaz triangular, em cartolina. Decidiu construir o triângulo com as seguintes medidas dos lados: 6 cm, 8 cm e 16 cm. Ele conseguirá fazer o cartaz? Por quê?

Exercício 26. Na figura 11, tem-se o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro D.

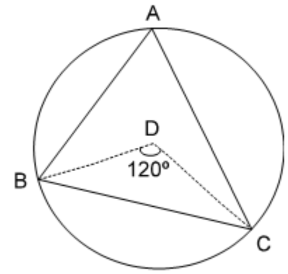


Figura 11

Se $AB = 6$ cm e $AC = 9$ cm, o perímetro do triângulo ABC, em centímetros, é aproximadamente igual a

a) $18,4$ b) $19,8$ c) $20,6$ d) $21,4$ e) $22,9$

Exercício 27. No dia 11 de março de 2011, o Japão foi sacudido por terremoto com intensidade de $8,9$ na Escala Richter, com o epicentro no Oceano Pacífico, a 360 km de Tóquio, seguido de tsunami. A cidade de Sendai, a 320 km a nordeste de Tóquio, foi atingida pela primeira onda do tsunami após 13 minutos. (O Estado de S.Paulo, 13/03/2011. Adaptado.)

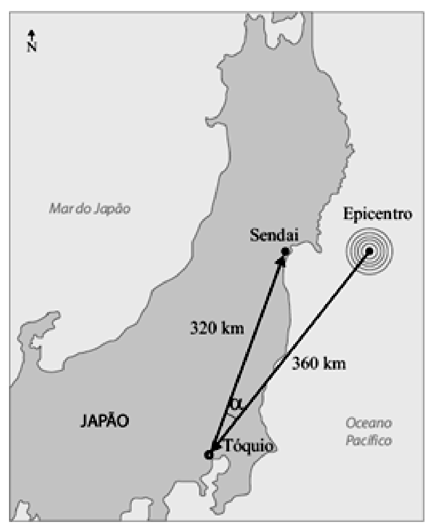


Figura 12

Baseando-se nos dados fornecidos e sabendo que $\cos\alpha \cong 0,934$, onde α é o ângulo Epicentro-Tóquio-Sendai, e que $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93,4 \cong 215100$, a velocidade média, em km/h, com que a 1^a onda do tsunami atingiu até a cidade de Sendai foi de:

a) 10. b) 50. c) 100. d) 250. e) 600.

Respostas e Soluções.

1.

a) O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado. Chame de α o ângulo oposto ao lado de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos\alpha$$

e chegaremos a $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

b) O menor ângulo do triângulo é o oposto ao menor lado. Chame de α o ângulo oposto ao lado de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$7^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos\alpha$$

e chegaremos a $\cos\alpha = \dfrac{23}{32}$.

c) Aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 60^\circ$$

e chegaremos a $a = \sqrt{31}$.

d) Observe que esses lados não formam um triângulo, pois, pela desigualdade triangular deveríamos ter $a < b + c$ e na questão $5 = 3 + 2$.

2. Seja a o lado oposto a 120°, então podemos escrever que

$$\begin{aligned} a^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ \\ a^2 &= 36 + 100 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ a &= \sqrt{196} \\ a &= 14 \text{ m.} \end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular da UNIMONTES MG)
Para o triângulo existir deveremos ter, pela desigualdade triangular, $4 - 3 < x < 4 + 3$, ou seja, $1 < x < 7$. Perceba que se $x = 5$ teremos o triângulo retângulo pitagórico [1]. Se x for o maior lado, o triângulo será obtusângulo se

$$\begin{aligned} x^2 &> 3^2 + 4^2 \\ x^2 &> 25 \\ x &> 5. \end{aligned}$$

Então, $5 < x < 7$. Mas, se x não for o maior lado, teremos

$$\begin{aligned} 4^2 &> 3^2 + x^2 \\ x^2 &< 7 \\ x &< \sqrt{7} \end{aligned}$$

Portanto, obtemos $1 < x < \sqrt{7}$. Resposta na letra **C**.

[1] Catetos medido 3 e 4 e hipotenusa medindo 5, esse é o triângulo retângulo com menores medidas inteiras para os lados.

4.

a) Pela lei dos senos temos que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \\ \frac{4}{\operatorname{sen} 30^\circ} &= \frac{8}{\operatorname{sen}\beta} \\ \operatorname{sen}\beta &= 1. \end{aligned}$$

b) Pela lei dos senos temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{2}{\operatorname{sen} 45^\circ} \\ \operatorname{sen}\alpha &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Portanto, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, então $\gamma = 105^\circ$.

5. Pela lei dos senos temos que

$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45^\circ} &= \frac{AC}{\operatorname{sen} 30^\circ} \\ \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{AC}{\frac{1}{2}} \\ AC &= 5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

6. Da lei dos senos, temos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

sendo R o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Daí, $\dfrac{10}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 2R$ e $R = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ m.

7. Seja A o ponto em que o navio se encontra no primeiro momento, B o do segundo, C um ponto qualquer da trajetória do navio e F o do farol. Da interpretação do enunciado concluímos que $F\hat{A}B = 30^\circ$, $AB = 20$ milhas, $F\hat{B}C = 75^\circ$ e $BF = d$ milhas. Podemos concluir que $B\hat{F}A = 45^\circ$ e, pela lei de senos, ficaremos com:

$$\begin{aligned} \frac{d}{\operatorname{sen} 30^\circ} &= \frac{20}{\operatorname{sen} 45^\circ} \\ \frac{d}{\frac{1}{2}} &= \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ d &= \frac{20}{\sqrt{2}} \\ d &= 10\sqrt{2} \\ d &\cong 14,1 \text{ milhas.} \end{aligned}$$

8. Seja α o menor ângulo interno. Ele será o oposto ao lado de medida 5 e, aplicando a lei dos cossenos, teremos

$$\begin{aligned} 5^2 &= 7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos\alpha \\ -\cos\alpha &= \frac{25-49-64}{2\cdot7\cdot8} \\ \cos\alpha &= \frac{11}{14}. \end{aligned}$$

9. Da lei dos senos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{8}{\operatorname{sen}\hat{B}} &= \frac{6}{\operatorname{sen}30^\circ} \\ \operatorname{sen}\hat{B} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

10. (Extraído do vestibular do MACK SP)
Observe que $B\hat{C}A = 45^\circ$ e, aplicando a lei dos senos, teremos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\operatorname{sen}45^\circ} &= \frac{12}{\operatorname{sen}30^\circ} \\ AB &= 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Após o uso da escala, $AB = 120000\sqrt{2}$ cm ou $AB \cong= 1,7$ km, que está na letra **E**.

11. O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado, chame-o de θ, e o seu lado correspondente será o de medida 6. Aplicando a Lei dos Cossenos temos

$$6^2 = 3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos\theta$$

e chegaremos a $\cos\theta = -\dfrac{11}{24}$, que está na letra **B**.

12.

a) O maior ângulo do triângulo é o oposto ao maior lado, chame-o de β, e o seu lado correspondente será o de medida 6. Aplicando a Lei dos Cossenos temos

$$6^2 = 5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cos\beta$$

e chegaremos a $\cos\beta = \dfrac{1}{8}$.

b) O menor ângulo do triângulo é o oposto ao menor lado, chame-o de γ, e o seu lado correspondente será o de medida 7. Aplicando a Lei dos Cossenos temos

$$7^2 = 10^2+8^2-2\cdot10\cdot8\cos\gamma$$

e chegaremos a $\cos\gamma = \dfrac{23}{32}$.

c) Observe que esses lados não formam um triângulo, pois, pela desigualdade triangular, $a < b+c$ e na questão $15 = 10+5$.

13. (Adaptado do vestibular da FUVEST SP)
Da lei dos senos, temos que

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}30^\circ} = 2\cdot3.$$

Daí, $AC = 3$ cm.

14. Observe que, pela lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos B\hat{A}C \\ 9^2 &= 5^2+10^2-2\cdot5\cdot10\cdot\cos B\hat{A}C \\ \cos B\hat{A}C &= \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Agora, Sendo BM a mediana relativa a AC, teremos $AM = 5$, $B\hat{A}C = B\hat{A}M$ e, pela lei dos cossenos, teremos

$$\begin{aligned} BM^2 &= AB^2+AM^2-2\cdot AB\cdot AMC\cdot\cos B\hat{A}M \\ BM^2 &= 5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\frac{11}{25} \\ BM &= \sqrt{28} \;=\; 2\sqrt{7}\text{ cm.} \end{aligned}$$

15. (Extraído do vestibular da UEFS BA $-$ 2011) Observe que $P\hat{I}Q = 75^\circ$. A ponte menor será a de PI, pois está oposta ao menor ângulo, mas como pede-se a diferença de preço, precisamos calcular a medida de cada uma delas. Para tal, aplicaremos a lei dos senos duas vezes e teremos que

$$\begin{aligned} \frac{2400}{\operatorname{sen}75^\circ} &= \frac{IQ}{\operatorname{sen}45^\circ} & \text{e} \qquad \frac{2400}{\operatorname{sen}75^\circ} &= \frac{IP}{\operatorname{sen}60^\circ} \\ \frac{2400}{0,96} &= \frac{IQ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} & \frac{2400}{0,96} &= \frac{IP}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ IQ &= \frac{2400\cdot1,4}{0,96\cdot2} & IP &= \frac{2400\cdot1,7}{0,96\cdot2}. \end{aligned}$$

Fazendo a diferença entre os valores encontrados, ficamos com

$$\begin{aligned} IQ-IP &= \frac{2400\cdot1,7}{0,96\cdot2}-\frac{2400\cdot1,4}{0,96\cdot2} \\ &= \frac{2400\cdot0,3}{0,96\cdot2} \\ &= 375. \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando pelo valor por metro, ficaremos com R\$ 37500,00. Que está na letra **C**.

16. (Extraído do vestivular do IBMEC SP $-$ 2014)
Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABD$, calculamos que a hipotenusa $BD = 5$ cm, e como $BD = BC$, então $BC = 5$ cm. Ainda nesse triângulo, podemos calcular

que $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Agora, no $\triangle BDC$, vamos aplicar a lei dos cossenos e ficaremos com

$$DC^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{4}{5}$$
$$DC = \sqrt{10}\text{ cm.}$$

Que está na letra **B**.

17. Do enunciado, $\triangle ADA'$ é isósceles em D e $\triangle AEA'$ é isósceles em E. Temos que $\angle DBA' = \angle DA'E = \angle ECA' = 60^\circ$, daí $\angle DA'B = \angle CEA' = 180^\circ - 60^\circ - \angle CA'E$. Portanto, $\triangle DBA' \simeq \triangle A'CE$. Se $AD = DA' = a$ e $AE = EA' = b$, como $A'C = 3$, então $BA' = 12 - 3 = 9$, $DB = 12 - a$ e $EC = 12 - b$. Pela semelhança, obtemos:

$$\frac{12-b}{9} = \frac{3}{12-a} = \frac{b}{a}.$$

Daí,

$$\frac{b}{a} = \frac{3+b}{12-a+a} = \frac{3+b}{12}$$

e, consequentemente, $b = \dfrac{39}{7}$. Substituindo na equação $\dfrac{12-b}{9} = \dfrac{b}{a}$, podemos concluir que $a = \dfrac{39}{5}$. Pela lei dos cossenos no triângulo $\triangle EDA'$, temos que:

$$DE^2 = \left(\frac{39}{5}\right)^2 + \left(\frac{39}{7}\right)^2 - 2\cdot\frac{39}{5}\cdot\frac{39}{7}\cdot\cos 60^\circ.$$

E o lado pedido mede $\sqrt{\dfrac{59319}{1225}} = \dfrac{39\sqrt{39}}{35}$.

18. Observe a figura 5.

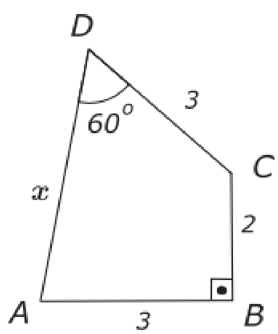


Figura 5

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 3^2 + 2^2$$
$$= 13$$
$$AC = \sqrt{13}.$$

Seja $AD = x$. Usando a lei dos cossenos no $\triangle ACD$, chegamos a:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cdot cos 60^\circ$$
$$\sqrt{13}^2 = x^2 + 3^2 - 2\cdot x\cdot 3\cdot\frac{1}{2}$$
$$13 = x^2 + 9 - 3x$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

que possui como raízes 4 e -1. A última não convém pois x representa o comprimento de um segmento e deve ser positivo. Por fim, o perímetro do quadrilátero $ABCD$ é :

$$AB + BC + CD + AD = 3 + 2 + 3 + 4 = 12\text{ cm.}$$

19. (Adaptado do vestibular da UFU MG)
Observe que $A\hat{D}C = 60^\circ$ e como $AB = AC$, temos $A\hat{C}D = 45^\circ$. Pela lei dos senos, temos

$$\frac{AC}{\text{sen }60^\circ} = \frac{AD}{\text{sen }45^\circ}$$
$$AD = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\text{ cm.}$$

20. (Extraído do vestibular da FUVEST SP)
Pela lei dos cossenos, temos

$$BD^2 = \sqrt{3}^2 + 2^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos 30^\circ$$
$$BD = 1\text{ cm.}$$

Como $BD = DC$, temos $AC = AD + DC = 3$ cm e, novamente pela lei dos cossenos, chegamos a

$$BC^2 = \sqrt{3}^2 + 3^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos 30^\circ$$
$$BD = \sqrt{3}\text{ cm.}$$

21. (Extraído do vestibular da UNB)
Da lei dos senos temos que

$$\frac{AB}{\text{sen }30^\circ} = 2\cdot 14,\text{ daí } AB = 14\text{ cm.}$$

22. (Extraído do vestibular da UFBA)
Seja x o comprimento de BD. Como $A\hat{B}D = 15^\circ$, aplicando a lei dos senos, chegamos a

$$\frac{BD}{\text{sen }45^\circ} = \frac{AD}{\text{sen }15^\circ}$$
$$\frac{x}{5} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$
$$x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{10}{\sqrt{3}-1}$$
$$x = 5(\sqrt{3}+1)\text{ u.c..}$$

Agora, pela lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{aligned} BC^2 &= 10^2 + (5(\sqrt{3}+1))^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5(\sqrt{3}+1) \cdot \cos 60^\circ \\ BC &= \sqrt{150} \\ &= 5\sqrt{6} \text{ u.c..} \end{aligned}$$

23. (Extraído do vestibular do ITA)
Dado que $A\hat{B}C = 60^\circ$, se a hipotenusa BC mede x, então $AB = \dfrac{x}{2}$. Agora, no $\triangle ADB$, como D é incentro, teremos $D\hat{A}B = 45^\circ$, $A\hat{B}D = 30^\circ$ e $A\hat{D}B = 105^\circ$. Como $\text{sen}\,105^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, pela lei dos senos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\text{sen}\,105^\circ} &= \frac{BD}{\text{sen}\,45^\circ} \\ \frac{x}{2} &= \frac{\text{sen}\,105^\circ}{\text{sen}\,45^\circ} \\ \frac{x}{2} &= \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ x &= 1+\sqrt{3} \text{ cm.} \end{aligned}$$

24. (Extraído do vestibular do UNB)
Observe que se $CD = x$, então $AC = x\sqrt{3}$. Agora, no $\triangle ABC$ teremos $A\hat{C}B = 45^\circ$, pela lei dos senos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\text{sen}\,45^\circ} &= \frac{AC}{\text{sen}\,60^\circ} \\ x &= \frac{30}{\sqrt{2}} \text{ metros.} \end{aligned}$$

Dividindo o resultado por $\sqrt{2}$, obtemos $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = 15$.

25. (Exrtaído do vestibular da FGV.)

a) Sendo x a medida do lado desconhecido, aplicando-se a lei dos cossenos, teremos

$$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ.$$

Daí, $x \cong 7,2$ e o perímetro fica aproximadamente igual a $21,2\ cm$.

b) Não conseguirá construir o triângulo, pois em todo triângulo a medida de um lado é menor que a soma das medidas dos outros dois. Outra solução é usar a lei dos cossenos:

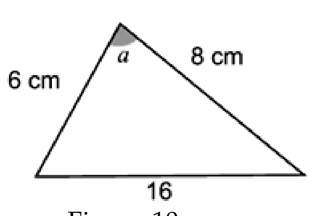


Figura 10

$$\begin{aligned} 162 &= 62 + 82 - 2(6)(8)\cos\alpha \\ 156 &= -96\cos\alpha \\ \cos\alpha &= -\frac{156}{96} \end{aligned}$$

Porém $-\dfrac{156}{96}$ é menor que -1, portanto, não existe tal triângulo.

26. (Extraído do vestibular da UNIFOR CE) Como $B\hat{A}C$ é um ângulo inscrito na circunferência de centro O, $B\hat{A}C = \dfrac{B\hat{D}C}{2} = 60^\circ$. Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} BC^2 &= 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ \\ BC &= \sqrt{63} \\ BC &\cong 7,9 \end{aligned}$$

Portanto, $AB + BC + CA \cong 22,9$.

27. (Extraído do vestibular da UNESP SP-2012)
Sejam os pontos T, S e E, os representadas das cidades e do epicentro e $ES = d$, a distância entre Sendai e o Epicentro, pela lei dos cossenos, teremos que

$$\begin{aligned} d^2 &= 320^2 + 360^2 - 2 \cdot 320 \cdot 360 \cdot 0,934 \\ d &= \sqrt{320^2 + 360^2 - 2 \cdot 320 \cdot 360 \cdot 0,934} \\ d &= \sqrt{320^2 + 360^2 - 2 \cdot 32 \cdot 36 \cdot 93,4} \\ d &= \sqrt{320^2 + 360^2 - 215100} \\ d &= 130 \text{ km.} \end{aligned}$$

E a velocidade média foi de $v = \dfrac{130}{\frac{13}{60}} = 600\ \frac{km}{h}$, que está na letra **E**.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com