Módulo de Geometria Espacial I - Fundamentos

Pontos, Retas e Planos.

3° **ano/E.M.**

Geometria Espacial I - Fundamentos
Pontos, Retas e Planos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine quais das situações abaixo necessariamente determinam um único plano.

a) três pontos distintos.

b) uma reta e um ponto.

c) duas retas concorrentes.

d) duas retas paralelas.

e) duas retas.

Exercício 2. Classifique em verdadeiro ou falso.

a) duas retas são coplanares ou são reversas.

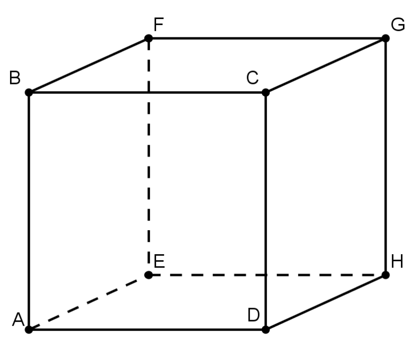
b) duas retas concorrentes têm um único ponto em comum.

c) duas retas coplanares são paralelas ou concorrentes.

d) duas retas distintas não paralelas são reversas.

e) duas retas concorretes são coplanares.

Exercício 3. Observe o cubo da figura abaixo e classifique as retas dadas em concorrentes, paralelas ou reversas.



a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$.

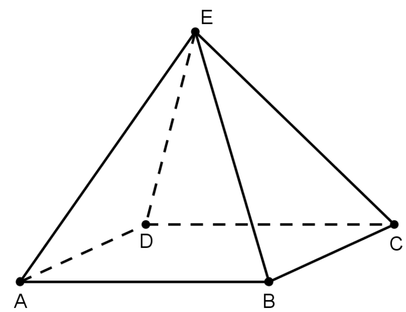
c) $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

d) $\overleftrightarrow{FE}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.

e) $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{FC}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Observe a pirâmide regular quadrangular abaixo e responda:



a) quais são os planos que podem ser traçados usando os vértices da pirâmide, ou seja, que passam por pelo menos três vértices?

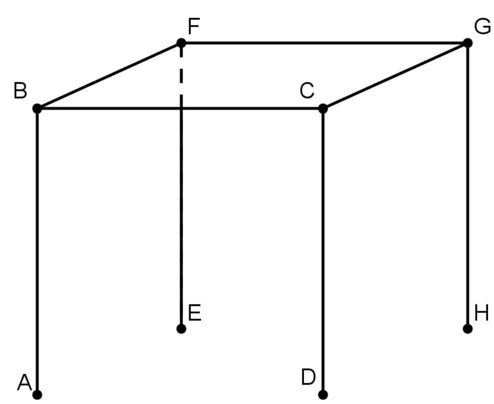
b) quantas retas podem ser traçadas usando os vértices da pirâmide, ou seja, que passam pelo menos por dois vértices?

c) qual a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$?

d) qual a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CB}$?

e) qual a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CE}$?

Exercício 5. A figura abaixo representa uma mesa, cujo tampo é perpendicular às pernas que, por sua vez, são perpendiculares ao solo. Responda:



a) qual a posição relativa das retas que contêm as pernas?

b) qual a posição relativa entre as retas que contêm as pernas e o plano que contém o tampo?

c) qual a posição relativa entre a reta que contém uma régua, deixada sobre o tampo, e as retas que contêm as pernas?

Exercício 6. Num plano α há duas retas, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, concorrentes num ponto O. Fora de α há um ponto P. Qual é a interseção dos planos $\beta = (PAB)$ e $\lambda = (PCD)$?

Exercício 7. Uma sala tem formato de um paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões são 3m de altura, 4m de comprimento e 4m de largura. Deseja-se colocar uma lâmpada, presa por uma haste ao teto, de maneira que a distância até os quatro cantos seja de 4m. A que distância essa lâmpada ficará do teto?

Exercício 8. Determine o ângulo formado por duas arestas opostas de um tetraedro regular.

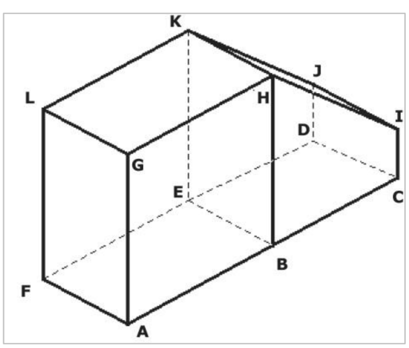
3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 9. Os triângulos não coplanares ABC e DEF são tais que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são concorrentes em O; $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{DF}$ são concorrentes em P; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são concorrentes em R. Prove que O, P e R são colineares.

Exercício 10. Como calcular o ângulo formado por uma face lateral e a base de uma pirâmide regular quadrangular?

Exercício 11. Determine a distância entre duas arestas opostas de um tetraedro regular cuja medida de cada aresta é 10cm.

Exercício 12. O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma, reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: $\overleftrightarrow{LB}$ e $\overleftrightarrow{GE}$; $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{HI}$; e $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.

b) reversas; reversas; paralelas.

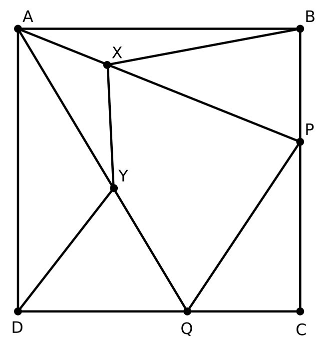
c) concorrentes; reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

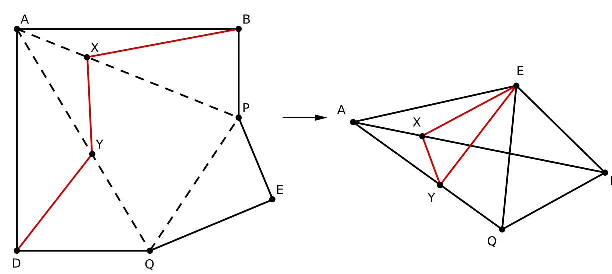
e) concorrentes; concorrentes; reversas.

Exercício 13. As retas que contêm os lados de um triângulo ABC interseptam um plano α nos pontos O, P e R. Prove que O, P e R são colineares.

Exercício 14. No quadrado $ABCD$, sejam P e Q pontos pertencentes aos lados BC e CD respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP = CQ$. Consideram-se pontos X e Y, $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos AP e AQ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam X e Y, existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos BX, XY e DY.



Imagine agora que os segmentos AP, PQ e AQ são marcas de dobraduras no papel. Como $BP = PE$, $QE = DQ$ e $AD = AB$, podemos agora dobrar os triângulos ao longo desses segmentos e formar um tetraedro como indica a figura abaixo.



Como X, Y e E são três vértices em arestas distintas do tetraedro, eles formam um triângulo.

Comentário para Professores: O apelo físico do uso dobraduras tem como propósito tornar a solução mais acessível, natural e divertida para alunos jovens. Tal operação pode ser formalizada com o uso de isometrias no espaço.

Respostas e Soluções.

1.

a) Não, pois caso os pontos sejam colineares eles não determinarão um plano.

b) Não, pois caso o ponto pertença a reta, eles não determinarão um plano.

c) Sim.

d) Sim.

e) Não, pois caso as retas sejam reversas não existirá plano que as contenha.

2.

a) V.

b) V.

c) V.

d) F. Podem ser concorrentes.

e) V.

3.

a) paralelas.

b) paralelas.

c) concorrentes.

d) reversas.

e) reversas.

4.

a) (ABC), (ABE), (ACE), (ADE), (BCE), (BDE) e (CDE).

b) Como não existem três vértices colineares, o total de retas é $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$.

c) Paralelas.

d) Concorrentes.

e) Reversas.

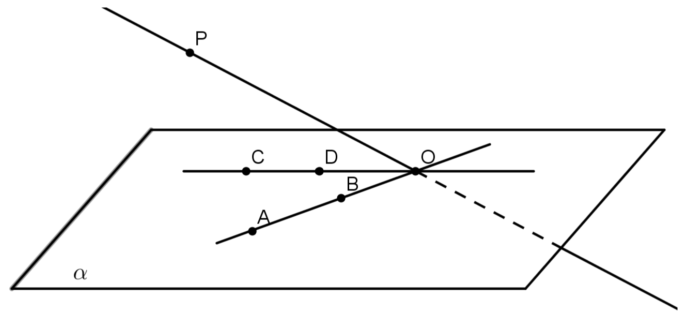
5.

a) Paralelas.

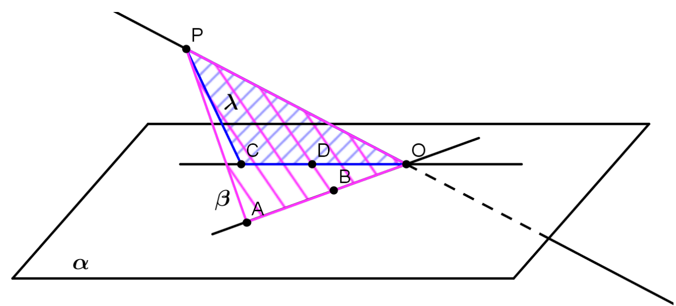
b) As retas são secantes e perpendiculares ao plano.

c) A reta que contém a régua pode ser reversa às quatro retas; pode ser reversa a três e concorrente a uma; ou pode ser reversa a duas e concorrente a duas.

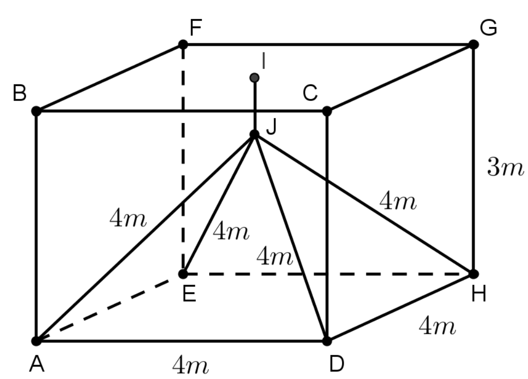
6.



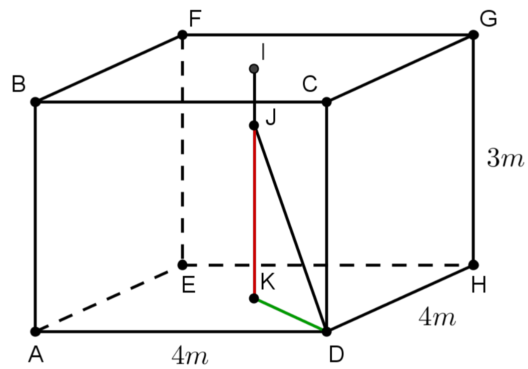
Os planos β e λ são distintos e P pertence a ambos. Como a interseção de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é o ponto O, então O pertence a β, pois pertence a $\overleftrightarrow{AB}$, e também pertence a λ, pois pertence a $\overleftrightarrow{CD}$. Assim, a interseção entre os planos β e λ é $\overleftrightarrow{OP}$.



7. (Extraído da Vídeo Aula) Inicalmente temos a seguinte figura.

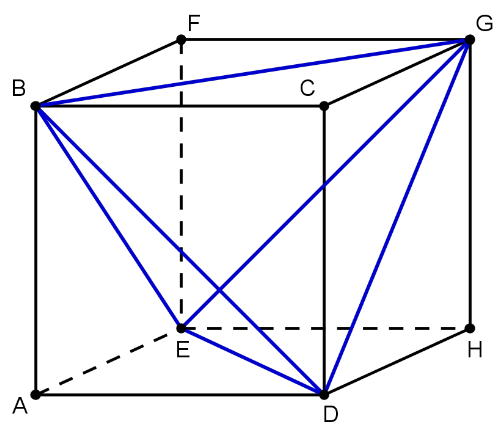


Nomeando todos os vértices, observe que a projeção da lâmpada, representada pelo ponto J, no plano do teto, é o ponto I, que coincide com o centro do quadrado $BCFG$ (teto). Vamos agora projetar a lâmpada no solo (quadrado $ADHE$), chamando esse ponto de K. Obtemos a seguinte figura.

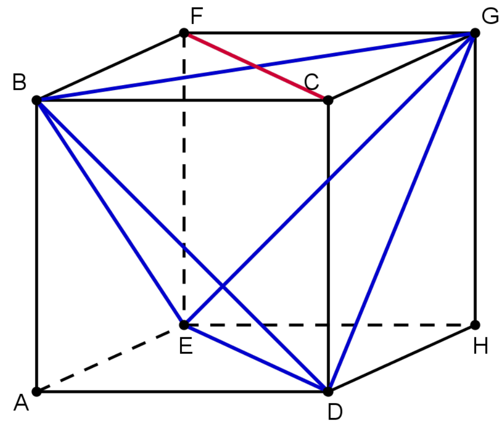


Como $\overline{JK}$ é perpendicular ao plano do solo, o triângulo JKD é retângulo. Além disso, $KD = 2\sqrt{2}$m, pois tem a metade da medida da diagonal do quadrado da base. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $JK^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4^2$, segue que $JK = 2\sqrt{2}$m. Portanto, a distância que a lâmpada ficará do teto é $3 - 2\sqrt{2} \cong 17,15$cm.

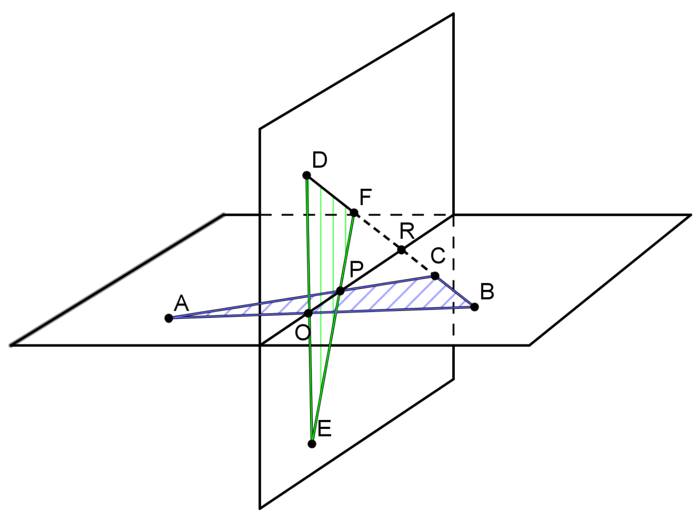
8. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos utilizar um cubo para desenharmos esse tetraedro regular e facilitar a visualização.



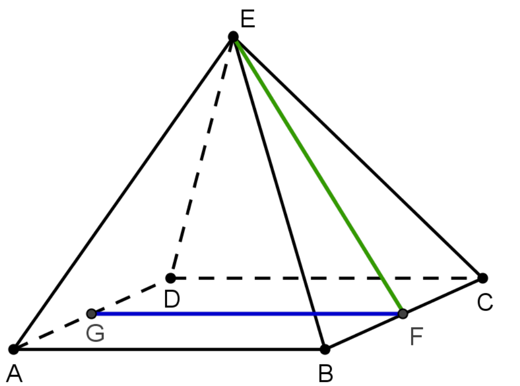
Analisando o tetraedro $BGDE$ da figura, percebe-se que $\overline{BG}$ está contido no plano do quadrado $BCGF$, inclusive, sendo sua diagonal. A projeção da aresta oposta $\overline{DE}$ no plano do quadrado $BCGF$ é a diagonal $\overline{CF}$, ou seja, o ângulo entre $\overline{BG}$ e $\overline{DE}$ é igual ao ângulo entre $\overline{BG}$ e $\overline{CF}$, que é 90^o.



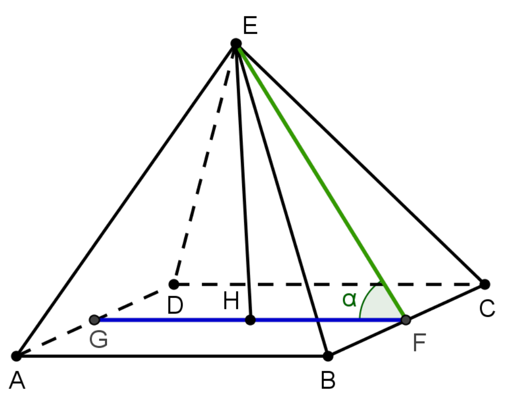
9. Sendo $\alpha = (ABC)$ e $\beta = (DEF)$, temos que a interseção entre $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ é o ponto O,então O pertence à $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$. Se O pertence à $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ está contida em α, então O pertence a α. De forma análoga, concluimos que O também pertence a β. Analogamente, temos que P e R também pertencentes a α e β. Como O, P e R pertencem à interseção de dois planos distintos, que é uma reta, e assim eles são colineares.



10. (Extraído da Vídeo Aula) Para calcularmos o ângulo entre dois planos, basta calcular o ângulo entre duas retas, cada uma contida em um plano, perpendiculares à reta de interseção desses planos. Vamos observar a figura seguinte.

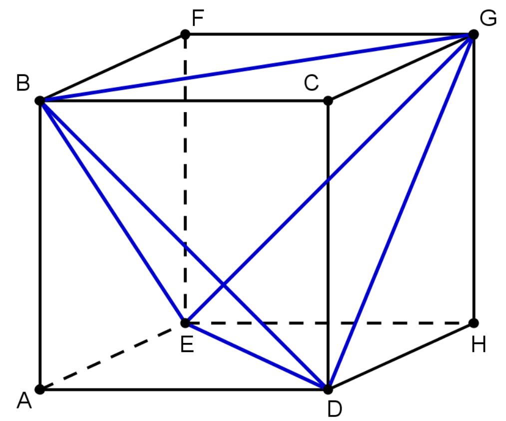


Observando a figura, a reta de interseção entre a base e uma das faces, BCE, contém $\overline{BC}$. Marcando o ponto médio F da aresta $\overline{BC}$, temos que $\overline{EF}$ é perpendicular à aresta $\overline{BC}$, pois é altura do triângulo isósceles BCE. Temos também que $\overline{FG}$, sendo G o ponto médio de $\overline{AD}$, é perpendicular a $\overline{BC}$, pois é paralelo a $\overline{AB}$, que, por sua vez, é perpendicular a $\overline{BC}$. Basta então calcular o ângulo entre $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$.



Projetando o vértice da pirâmide na base (ponto H), temos o triângulo retângulo EFH e o ângulo entre os planos pode ser calculado fazendo a tangente de $\angle EFH$, que é igual à razão entre a medida da altura da pirâmide e a metade da medida do lado da base.

11. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos construir um tetraedro a partir de um cubo, conforme a figura.



Para calcular a distância entre $\overline{BG}$ e $\overline{DE}$, basta calcularmos a distância entre dois planos paralelos, sendo cada um dos segmentos pertencentes a um desses planos, ou seja, a distância entre os planos que contém as faces do cubo $BCGF$ e $ADHE$, que é exatamente a medida da aresta do cubo. Como a aresta do tetraedro mede 10cm, a aresta do cubo mede $5\sqrt{2}$cm, que é a distância entre duas arestas opostas de um tetraedro regular de aresta medindo 10cm.

12. (Extraído da EsPCEx - 2012) Como $\overleftrightarrow{LB}$ e $\overleftrightarrow{GE}$ são as diagonais de um paralelepípedo, elas se interseptam em um ponto, ou seja, são concorrentes; como $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{HI}$ estão contidas no plano (AGC), mas não são paralelas, então elas são concorrentes; como não existe plano que contenha $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{GK}$, elas são reversas. Resposta E.

13. Vamos chamar de β o plano que contém o triângulo ABC, que não pode ser paralelo ao plano α, ou seja, α e β são concorrentes. Como O é o prolongamento de um lado de ABC, O pertence ao plano α, mas também pertence ao plano β. Da mesma forma, P e R também pertencem a ambos os planos, ou seja, os três pontos estão sobre a interseção de dois planos e, portanto, são colineares.

14. (Extraído da Olimpíada Iberoamericana) Recorte o triângulo $\triangle PQC$ e coloque-o virado formando o triângulo $\triangle PEQ$ de modo que $PE = QC$ e $QE = PC$. Formalmente estamos construindo um triângulo congruente ao incial.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com