Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Teorema do Resto

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos
Teorema do Resto

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual o resto na divisão de $P(x) = x^2 + x + 1$ por $D(x) = x - 1$?

a) -3.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 3.

Exercício 2. Dividindo-se um polinômio de grau 7 por um polinômio de grau 3, o grau do resto é menor que:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 3. Qual o valor de m para que a divisão de $p(x) = x^3 - x + m$ por $d(x) = x + 2$ tenha resto igual a 4?

a) -20.

b) -10.

c) 0.

d) 10.

e) 20.

Exercício 4. Sejam as funções polinomiais $P(x) = m^2x^2 - 5mx + 1$ e $D(x) = x - 1$. O resto na divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é -6. Qual a soma dos possíveis valores de m?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 5. Sabendo que $A(x) = ax^2 + bx + c$ é divisível por $B(x) = x + 1$, então o valor de $a - b + c$ é:

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Exercício 6. Sejam $p(x) = x^4 + 3x^2 + k$ e $d(x) = x^2 - 1$. Se $p(x)$ é divisível por $d(x)$, então k vale:

a) -1.

b) -2.

c) -3.

d) -4.

e) -5.

Exercício 7. Qual o quociente na divisão de $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + b$ por $D(x) = x^4 + 1$, se $P(x)$ é divisível por $T(x) = x - 2$?

a) x.

b) $x + 1$.

c) $x + 2$.

d) $x + 3$.

e) $x + 4$.

Exercício 8. Se o resto da divisão de $P(x) = x^5 + ix^4 - 3ix + a$ por $D(x) = x - 2$ é 3, determine o valor de a.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Determine o valor de a para que $p(x) = 4x^3 + (a+1)x^2 - ax + 1$ seja divisível por $q(x) = 2x - 1$.

Exercício 10. Sabe-se que $p(x) = 2x^3 - 2x^2 - (k^2 - 1)x - k$ é divisível por $2x - 4$. Determine:

a) k.

b) O resto na divisão de $p(x)$ por $3x - 6$.

Exercício 11. Determine a e b reais, de modo que $-2x^3 + ax^2 + b$ seja divisível por $(x-1)(x-2)$.

Exercício 12. Determine os valores das constantes m e n, sabendo que $P(x) = x^5 + mx^3 + x^2 + nx + n$ é divisível por $x^2 - 4$.

Exercício 13. Se $P(x) = x^4 - kx^3 + px^2 - 3x + 1$ é divisível por $D(x) = x^2 + 1$, então kp é:

a) 4.

b) 6.

c) 8.

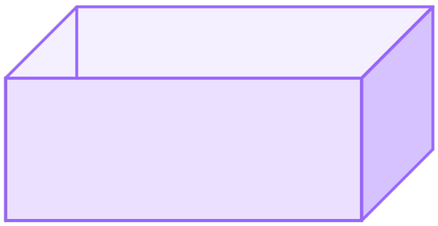
d) 10.

e) 12.

Exercício 14. Na figura, o volume do paralelepípedo é $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ e sua altura mede $x - 1$. Determine:

a) A área da base do paralelepípedo.

b) As dimensões da base, sabendo que são polinômios do tipo $x+k$, sendo k um número real.



Exercício 15. Dividindo-se o polinômio $p(x) = 5ix^3 - (i+3)x^2 + (-1+i)x + k$ por $h(x) = x+i$, obtém-se resto $r(x) = 2i$. Determine k.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. O resto da divisão de $kx^2 + x - 1$ por $x + 2k$, onde k é uma constante não nula é:

a) $-2k-1$.

b) $k-1$.

c) $4k^2-2k-1$.

d) k^3-k-1.

e) $4k^3-2k-1$.

Exercício 17. O resto da divisão de $x + 5x^5 + 9x^9 + 13x^{13} + ... + 797x^{797}$ por $x-1$ é:

a) 39.500.

b) 79.800.

c) 95.200.

d) 102.300.

e) 108.200.

Exercício 18. Considere o polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais. Se $f(x)+1$ é divisível por $x+1$ e $f(x)-1$ é divisível por $x-1$, pode-se afirmar que os valores de a e b são, respectivamente:

a) 0 e 3.

b) -2 e -3.

c) -1 e 4.

d) -1 e -2.

e) 0 e -3.

Exercício 19. Na divisão do polinômio $x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 17x - 4$ pelo divisor $x^2 + 3x - 4$, o resto é:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 20. Os valores reais de a e b, tais que os polinômios $x^3 - 2ax^2 + (3a+b)x - 3b$ e $x^3 - (a+2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x+1$, são:

a) dois números inteiros positivos.

b) dois números inteiros negativos.

c) números inteiros, sendo que um deles é positivo e o outro é negativo.

d) dois números reais, sendo um racional e outro irracional.

e) nenhuma das respostas anteriores.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. Como o divisor é $x-1$, então o resto é $R = P(1) = 1^2+1+1 = 3$. Resposta E.

2. O grau do resto deve ser menor que o grau do divisor, então se o divisor tem grau 3, o grau do resto deve ser menor que 3. Resposta D.

3. Se o resto é 4 e o divisor é $x+2$, então:

$$\begin{aligned} P(-2) &= 4\\ (-2)^3-(-2)+m &= 4\\ -8+2+m &= 4\\ m &= 10. \end{aligned}$$

Resposta D.

4. Temos:

$$\begin{aligned} P(1) &= -6\\ m^2\cdot 1^2-5m\cdot 1+1 &= -6\\ m^2-5m+1 &= -6\\ m^2-5m+7 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos valores de m é 5. Resposta E.

5. Se $A(x)$ é divisível por $B(x)$, então $A(-1) = a(-1)^2 + b(-1)+c = 0$, segue que $a-b+c=0$. Resposta C.

6. Se $p(x)$ é divisível por $d(x)$, então é divisível também pelos divisores de $d(x)$. Como $d(x) = x^2-1 = (x+1)(x-1)$, então $p(x)$ é divisível por $x+1$ e por $x-1$. Temos, então $p(1) = 1^4+3\cdot 1^2+k = 0$, donde $k=-4$. Resposta D.

7. Se $P(x)$ é divisível por $x-2$, então $P(2) = 2^5+2^4+2^3+2^2+2+b = 0$, segue que $b=-62$. Vamos agora para a divisão entre $P(x)$ e $D(x)$:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & -62 & x^4\ +1\\ \cline{7-7} -x^5 & & & & -x & & x\ +1\\ \cline{1-6} & x^4 & +x^3 & +x^2 & & -62 & \\ & -x^4 & & & & -1 & \\ \cline{2-6} & & x^3 & +x^2 & & -63 & \end{array}$$

Portanto, o quociente é $x+1$. Resposta B.

8. Temos:

$$\begin{aligned} P(2) &= 3\\ 2^5+i\cdot 2^4-3i\cdot 2+a &= 3\\ 32+16i-6i+a &= 3\\ a &= -29-10i. \end{aligned}$$

9. Temos:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= 0\\ 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+(a+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-a\cdot\frac{1}{2}+1 &= 0\\ \frac{1}{2}+\frac{a+1}{4}-\frac{a}{2}+1 &= 0\\ 2+(a+1)-2a+4 &= 0\\ -a &= -7\\ a &= 7. \end{aligned}$$

10.

a) Se $p(x)$ é divisível por $2x-4$, então:

$$\begin{aligned} P(2) &= 0\\ 2\cdot 2^3-2\cdot 2^2-(k^2-1)\cdot 2-k &= 0\\ 16-8-2k^2+2-k &= 0\\ -2k^2-k+10 &= 0\\ 2k^2+k-10 &= 0\\ k_1 &= -\frac{5}{2}\\ k_2 &= 2. \end{aligned}$$

b) Para qualquer valor de k encontrado, se $p(x)$ é divisível por $2(x-2)$, então também vai ser divisível por $3(x-2)$. Portanto, o resto é zero.

11. Se uma função polinomial é divisível por $(x-1)(x-2)$, então é divisível também por $(x-1)$ e $(x-2)$. Sendo assim, temos:

$$\begin{cases} -2\cdot 1^3+a\cdot 1^2+b = 0\\ -2\cdot 2^3+a\cdot 2^2+b = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 2\\ 4a+b = 16. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos a $a = \dfrac{14}{3}$ e $b = -\dfrac{8}{3}$.

12. Se é divisível por $x^2-4 = (x+2)(x-2)$, então é divisível por $(x+2)$ e $(x-2)$. Temos então:

$$\begin{cases} 32+8m+4+2n+n = 0\\ -32-8m+4-2n+n = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8m+3n = -36\\ -8m-n = 28. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $n=-4$ e $m=-3$.

13. Se é divisível por $x^2+1 = (x+i)(x-i)$, então é divisível por $(x+i)$ e $(x-i)$. Sendo assim, temos:

$$\begin{cases} i^4 - ki^3 + pi^2 - 3i + 1 & = & 0 \\ (-i)^4 - k(-i)^3 + p(-i)^2 - 3(-i) + 1 & = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} ki - p & = & -2 + 3i \\ -ki - p & = & -2 - 3i. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $p = 2$ e $k = 3$. Portanto, $kp = 6$. Resposta B.

14.

a) Como o volume é o produto da área da base pela altura, precisamos apenas dividir o volume pela altura:

$$\begin{array}{rrrr|lll} x^3 & -8x^2 & +19x & -12 & x & -1 & \\ \cline{5-7} -x^3 & +x^2 & & & x^2 & -7x & +12 \\ \cline{1-4} & -7x^2 & +19x & -12 & & & \\ & +7x^2 & -7x & & & & \\ \cline{2-4} & & 12x & -12 & & & \\ & & -12x & +12 & & & \\ \cline{3-4} & & & 0 & & & \end{array}$$

Portanto, a área da base do paralelepípedo é representada pela expressão $x^2 - 7x + 12$.

b) As raízes da expressão polinomial $x^2 - 7x + 12$ são 3 e 4, então seus fatores são $(x - 3)$ e $(x - 4)$, que são as dimensões da base do paralelepípedo.

15. Aplicando o Teorema do Resto, temos:

$$\begin{aligned} p(-i) &= 2i \\ 5i(-i)^3 - (i + 3)(-i)^2 + (-1 + i)(-i) + k &= 2i \\ -5 + i + 3 + i + 1 + k &= 2i \\ k &= 1. \end{aligned}$$

16. (Extraído da Mackenzie - SP) Aplicando o Teorema do Resto, temos que o resto é $k(-2k)^2 + (-2k) - 1 = 4k^3 - 2k - 1$. Resposta E.

17. Pelo Teorema do Resto, temos que o resto é $1 + 5 \cdot 1^5 + 9 \cdot 1^9 + 13 \cdot 1^{13} + ... + 797 \cdot 1^{797} = 1 + 5 + 9 + 13 + ... + 797$, que é uma soma de progressão aritmética, cujo primeiro termo é 1, a razão é 4 e o último termo é 797. Para calcular o número de termos, temos $797 = 1 + 4 \cdot (n - 1)$, segue que $n = 200$. Voltando à soma da PA, temos $1 + 5 + 9 + 13 + ... + 797 = \dfrac{(1 + 797) \cdot 200}{2} = 79.800$. Resposta B.

18. (Extraído da UFMG) Aplicando o Teorema do Resto, temos:

$$\begin{cases} (-1)^3 + 3(-1)^2 + a(-1) + b + 1 & = & 0 \\ 1^3 + 3 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b - 1 & = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + b & = & -3 \\ a + b & = & -3. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos a $a = 0$ e $b = -3$. Resposta E.

19. Seja $R(x) = ax + b$ o resto da divisão. Como $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$, vamos usar o Teorema do Resto na divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$ e $(x + 4)$:

$$\begin{cases} 1^4 + 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1 - 17 \cdot 1 - 4 & = & a \cdot 1 + b \\ (-4)^4 + 8(-4)^3 + 12(-4)^2 - 17(-4) - 4 & = & a(-4) + 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b & = & 0 \\ 4a + b & = & 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos a $a = 0$ e $b = 0$. Resposta A.

20. (Extraído do ITA) Usando o Teorema do Resto, temos:

$$\begin{cases} (-1)^3 - 2a(-1)^2 + (3a + b)(-1) - 3b & = & 0 \\ (-1)^3 - (a + 2b)(-1) + 2a & = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5a - 4b & = & 1 \\ 3a + 2b & = & 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos a $a = 3$ e $b = -4$. Resposta C.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com