Problemas dos Círculos Matemáticos

Problemas extras para os capítulos 0 e 1

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

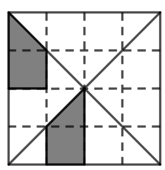
Problemas dos Círculos Matemáticos - Capítulos 0 e 1
Problemas extras para os capítulos 0 e 1

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Encontre o número de palavras de 4 letras, todas distintas, que podemos formar usando apenas as letras A, B, C, D.

Exercício 2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\angle A = 50°$. O lado BC é prolongado em ambas as direções e sobre os prolongamentos são marcados os pontos P e Q de modo que $PB = BA$, $CQ = CA$ e $PB + BC + CQ = PQ$. Calcule a medida do ângulo $\angle PAQ$.

Exercício 3. Na figura abaixo, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Qual a porcentagem que a região pintada cobre do quadrado total?



Exercício 4. Quantos números ímpares de três dígitos existem tais que cada dígito seja um divisor de 12?

Exercício 5. Patrícia marca sobre um pedaço de cartolina quadrada $ABCD$ o seu centro O e logo recorta do quadrado o triângulo AOB, obtendo um pedaço da cartolina $AOBCD$. Mostre que é possível Patricia (se ela for esperta!) cobrir todo o plano com peças todas idênticas a $AOBCD$, de modo que todo ponto do plano fique coberto por um pedaço de cartolina e não haja superposição de peças.

Exercício 6. Um negócio que vende calculadoras tem 10 modelos diferentes($A_1, A_2, \ldots, A_{10}$); dois destes modelos custam R\$ P cada um e os restantes custam R\$ $6P$ cada um, onde R\$ P é um número natural. Durante uma semana foi vendido uma calculadora do modelo A_1, duas do modelo A_2, três do modelo A_3, ..., 10 do modelo A_{10}. Com essas vendas foi arrecadado R\$ 5875. Quais os dois modelos cujo preço é P e quanto custa cada uma?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Existem 1997 números escritos ao redor de uma circunferência: 1996 são zeros e um deles é 1. A única operação permitida é escolher um número e modificar seus dois vizinhos, trocando 1 por 0 ou 0 por 1.

(a) Demonstrar que é possível, usando várias operações permitidas, obter todos os números ao redor da circunferência iguais a 1.

(b) Decidir se com 1998 números, um deles igual a 1 e os 1997 restantes iguais a 0, é possível chegar ao resultado da parte anterior?

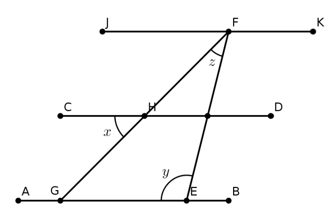
Exercício 8. Encontre todos os números de quatro dígitos $1a7b$ que são múltiplos de 15. (a e b são dígitos não necessariamente distintos.

Exercício 9. Demonstrar que um número inteiro não pode ser ao mesmo tempo um múltiplo de 12 aumentado de 5 e um múltiplo de 15 aumentado de 4.

Exercício 10. Chavier, em seu computador, tem um programa que modifica o número x que aparece na tela. Se ele aperta a tecla A, troca x por $x + 1$, Se ele aperta a tecla B, troca x por $\frac{1}{x+1}$. Quando começou a usar esse programa o número 1 estava na tela e depois de apertar algumas vezes as teclas apareceu o número $\frac{19}{94}$ Determine quantas vezes ele apertou cada tecla.

Exercício 11. O número 123 é mostrado na tela de um computador. A cada minuto, o número na tela é somado com 102. O programador Teddy pode mudar o número da tela em qualquer instante, apenas reordenando os dígitos escritos como ele quiser. O programador pode ficar reordendando os números de modo que sempre o número da tela tenha 3 dígitos?

Exercício 12. Na figura abaixo, JK, CD e AB são segmentos paralelos. Se $x + y = 150°$, determine o valor do ângulo z



Exercício 13. No planeta X, existem apenas dois tipos de notas de dinheiro: \$5 e \$78. É possível pagarmos exatamente \$7 por alguma mercadoria? E se as notas fossem de \$ 3 e \$ 78?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divide o outro?

Exercício 15. Qual é o maior inteiro n para o qual $n^3 + 100$ é divisível por $n + 10$?

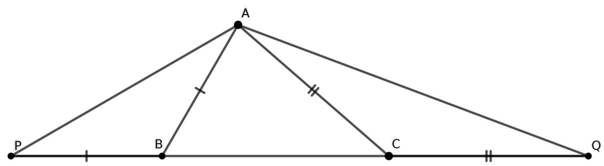
Exercício 16. Pode o número $X = 111\ldots1$ (formado por trezentos 1's) ser um quadrado perfeito?

Exercício 17. Existe um bloco de 1000 inteiros consecutivos contendo apenas um primo?

Respostas e Soluções.

1. Temos 4 opções de escolhas para a primeira letra, 3 para a segunda, 2 para a terceira e 1 para a última. Isso dá um total de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

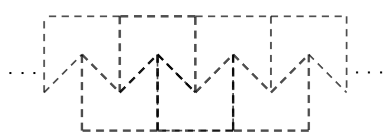
2. Como os triângulos ABP e ACQ são isósceles, segue que $\angle APB = \angle PAB = x$ e $\angle CAQ = \angle AQC = y$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\angle ABC = 2x$ e $\angle ACB = 2y$. Daí, $2x + 2y + 50° = 180°$, ou seja, $x + y = 65°$. Portanto, $\angle PAQ = x + \angle BAC + y = 115°$.



3. (Extraído da OMEBA 2018) As duas figuras pintadas formam juntas três quadradinhos colados. Portanto, a porcentagem que a região pintada cobre é $\dfrac{3}{16} = 18,75\%$.

4. Os divisores de 12 são $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Com exceção de 12, todos podem ser dígitos do número procurado. Para que o número seja ímpar, deve terminar em 1 ou 3. Assim, existem duas opções para o dígito das unidades. Para o dígito das dezenas e centenas existem 5 opções. Portanto, o total de números é $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$.

5. Basta dividir o plano em faixas paralelas e preencher essas faixas com as figuras do desenho abaixo:



6. A quantidade de calculadoras vendidas foi $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$. Se todas as calculadoras custassem $6P$, o arrecadado seria $55 \cdot 6P = 330P$. Devemos subtrair $5P$ por cada calculadora que custa P. Se i e j são os números desses modelos, devemos ter

$$\begin{aligned} 330P - i \cdot 5P - j \cdot 5P &= 5875 \\ P(66 - i - j) &= 1175. \end{aligned}$$

Como $i + j \leq 10 + 9 = 19$, segue que $66 \geq 66 - (i + j) \geq 66 - 19 = 47$. A fatoração em primos de 1175 é $5^2 \cdot 47$ e assim as únicas possibilidades para seus divisores P e $66 - i - j$ é $P = 25$ e $66 - i - j = 47$. Para que ocorra esta última equação, devemos ter $\{i, j\} = \{9, 10\}$. Assim, o preço é $R\$25$ e as canetas com menor preço são os dois últimos modelos.

7.

(a) Como 1996 é multiplo de 4, se mostrarmos que é possível transformarmos 4 zeros consecutivos em 4 uns, basta dividir os 1996 zeros em grupos de 4 e realizar essas transformações. Par ver como isso é possível, considere as transformações:

$$\begin{aligned} &0000 \rightarrow \\ &\mathbf{1}0\mathbf{1}0 \rightarrow \\ &1\mathbf{1}1\mathbf{1} \end{aligned}$$

(b) Se numerarmos as posições com os números $1, 2, \ldots, 1998$, podemos notar que a paridade da soma dos números nas casas pares, bem como a soma das casas ímpares, é invariante. Inicialmente uma dessas somas é ímpar e outra é par. Se fosse possível fazer todos os números se tornarem 1, as duas somas seriam ímpares no final e isso é um absurdo. Logo, não é possível realizar o mesmo do item anterior.

8. Para que o número seja múltiplo de 15, ele deve ser múltiplo de 3 e 5. Para ser múltiplo de 5, deve terminar em 0 ou 5. Se terminar em 0, a soma dos dígitos é $a + 8$. Os valores de a que tornam essa soma múltiplo de 3 são 1, 4 e 7. Se terminar em 5, a soma dos dígitos é $a + 13$. Os valores de a que tornam essa soma múltiplo de 3 são 2, 5 e 8. Portanto, os números são $1170, 1470, 1770, 1275, 1575$ e 1875.

9. Um múltiplo de 12 aumentado de 5 deixa o mesmo resto que 5 na divisão por 3, isto é, deixa resto 2. Um múltiplo de 15 aumentado de 4 deixa o mesmo resto que 4 na divisão por 3, isto é, deixa resto 1. Um número não pode deixar dois restos distintos na divisão por 3 e esse absurdo mostra que não existe tal número.

10. Podemos descobrir as teclas que foram apertadas anaolisando as operações de trás para frente. A tecla A sempre gera um número maior que 1 e a tecla B sem gera um número menor que 1. Essas duas informações permitem determinar de modo único as teclas apertadas. Como $\dfrac{19}{94} < 1$, o último movimento foi com a tecla B:

$$\frac{19}{94} \leftarrow \frac{75}{19}.$$

Como $\dfrac{75}{19} > 1$, os movimentos anteriores foram com a tecla A:

$$\frac{75}{19} \leftarrow \frac{56}{19} \leftarrow \frac{37}{19} \leftarrow \frac{18}{19}.$$

Uma vez que $\dfrac{18}{19} < 1$, sabemos que as duas operações anteriores foram B:

$$\frac{18}{19} \leftarrow \frac{1}{18} \leftarrow 17.$$

Todos os movimentos anteriores foram com a tecla A.

$$17 \leftarrow 16 \leftarrow 15 \ldots 2 \leftarrow 1.$$

Portanto, foram usadas 19 vezes a tecla A e 3 vezes a tecla B.

11. Basta que Teddy realize as seguintes operações:

$$123 \rightarrow 225 \rightarrow 327 \rightarrow \mathbf{429} \rightarrow 531 \rightarrow 135 \rightarrow 237 \rightarrow 327 \rightarrow \mathbf{429} \rightarrow \ldots$$

Uma vez que é possível passar pelo número 429 e voltar para ele, é possível realizar as operações e criar um movimento periódico sempre mantendo os números com 3 dígitos.

12. Do paralelismo segue que $\angle JFH = \angle CHG = x$ e $\angle KFE = \angle FEA = y$. Portanto, $180^\circ = x + y + z = 150^\circ + z$. Daí, $z = 30^\circ$.

13. Veja que $2 \times 78 - 31 \times 5 = 1$ e consequentemente $14 \times 78 - 217 \times 5 = 7$. Basta darmos 14 notas de de \$ 78 para recebermos 217 notas de \$ 5 como troco na compra de nossa mercadoria. Usando as notas de \$3 e \$78 não é possível pois o dinheiro pago e recebido como troco por algo sempre é múltiplo de 3 e 7 não é múltiplo de 3.

14. Não. Suponha, por absurdo, que $m < n$ sejam dois desses números, com m dividindo n. Claramente m divide $n - m$ e, pelo critério de divisibilidade por 9, 9 divide $n - m$, pois n e m possuem a mesma soma dos dígitos. Por outro lado, sabemos a soma dos dígitos de m: $1 + 2 + \cdots + 7 = 3 \cdot 9 + 1$. Daí, m não possui fator 9 e podemos garantir que $9m \mid n - m$. Mas então $9m \leq n - m$ e assim $10m \leq n \Rightarrow n$ tem pelo menos oito dígitos, uma contradição.

15. (Extraído da AIME) Para achar explicitamente o quociente de $n^3 + 100$ por $n + 10$ podemos fazer uso de alguma fatoração. Utilizaremos a soma dos cubos $n^3 + 10^3 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100)$. Como,

$$n^3 + 100 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900,$$

podemos concluir que o número 900 deve ser múltiplo de $n + 10$. O maior inteiro n para o qual $n + 10$ divide 900 é 890. Veja que se $n = 890$, o quociente da divisão de $n^3 + 100$ por $n + 10$ é $n^2 - 10n + 100 - 1 = 890^2 - 10 \cdot 890 + 99$.

16. A soma de seus dígitos é 300 e, consequentemente, é um múltiplo de 3. Por outro lado, não é um múltiplo de 9, pois 300 não é divisível por ele. Assim, X não pode ser um quadrado perfeito, por não possuir mais de um fator 3 em sua fatoração.

17. (Extraído do Torneio das Cidades) Para cada bloco de 1000 números consecutivos, contemos sua quantidade de números primos. Por exemplo, no bloco $1, 2, 3, \ldots, 1000$, temos 168 números primos (mas só usaremos o fato de que existem mais de dois primos nesse bloco). Comparando os blocos consecutivos $k + 1, k + 2, \ldots, k + 1000$ e $k + 2, k + 3, \ldots, k + 1001$, ou o número de números primos aumenta em uma unidade, ou fica constante ou diminui em uma unidade. Analisando todos os blocos consecutivos desde $1, 2, \ldots, 1000$ até $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$. Este último bloco não contém números primos, pois i divide $1001! + i$ para $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 1001\}$. Para ver que em algum deles o número de primos será 1, usaremos um argumento de continuidade discreta: Começando com o número 168 e realizando alterações de no máximo uma unidade na quantidade de primos em cada bloco, para chegarmos no número 0, necessariamente deveremos passar pelo número 1 em algum momento.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com