Módulo de Números Naturais.

Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclideana.

8° **ano E.F.**

Portal da Matemática
OBMEP

Módulo de Números Naturais.
Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclideana.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Mostre que 21 divide $5^8 - 2^8$.

Exercício 2. Mostre que 10 divide $11^6 - 1$.

Exercício 3. Sejam a e $b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Determine os valores possíveis de $(a-b)^2$ para que $23a1992b$ seja divisível por 45.

Exercício 4. Mostre que $2^{48} - 1$ é múltiplo de 65 e de 63.

Exercício 5. Mostre que $10x + y$ é divisível por 7 se e só se $x - 2y$ também for.

Exercício 6. Calcule os números naturais que quando divididos por 8 deixam resto igual ao dobro do quociente.

Exercício 7. Calcule o número natural que quando dividido por 7 resulta no quociente 4 e o resto é o maior possível.

Exercício 8. Mostre que $10x + y$ é divisível por 13 se e só se $x + 4y$ também for.

Exercício 9. Determine o menor inteiro positivo que dividido por 9 gera resto 3 e dividido por 11 gera resto 4.

Exercício 10. Um número inteiro positivo k deixa resto 4 quando dividido por 7.

a) Determine o resto da divisão de $k^2 + k + 1$ por 7.

b) Qual é o menor múltiplo positivo de k que devemos somar a k^2 para obter um múltiplo de 7.

Exercício 11. Um número inteiro n deixa restos respectivamente iguais a 4 e 6 quando dividido por 7 e 8. Determine o resto da divisão de n por 56.

Exercício 12. Quais os inteiros $n = 2^a \cdot 3^b$, como a e b inteiros não-negativos, possuem 15 divisores positivos?

Exercício 13. Qual é o valor de n para o qual o número $12345n789$ é divisível por 91?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 14. Quais os possíveis restos de um número quadrado perfeito na divisão por 4?

Exercício 15. Dados três números naturais a, b e c tais que $a + b + c$ é divisível por 6, prove que $a^3 + b^3 + c^3$ também é divisível por 6.

Exercício 16. Seja x o maior número natural com três algarismos que ao ser dividido por 2, por 3, por 5 e por 7 deixa resto 1. Qual a soma dos algarismos de x?

Exercício 17. Quantos números naturais menores que 400 são divisíveis por 17 ou 23 ?

Exercício 18. Qual o maior inteiro que divide todos os possíveis números da forma $m^2 - n^2$ onde m e n são números ímpares quaisquer e $n < m$.?

Exercício 19. Quantos números podem ser formados com 4 algarismos, de modo que esses números sejam divisíveis por 2, 3, 5 e 9 e que o algarismo dos milhares seja 8?

Exercício 20. A multiplicação decrescente de inteiros não-negativos em sequência até o 1 é denominada de fatorial e é simbolizada por $n!$. Exemplos:

i) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; e

ii) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; e

iii) $2! = 2 \times 1$.

Definimos $1! = 1$ e $0! = 1$. Sendo assim, calcule o maior inteiro positivo x tal que 23^x divide $2000!$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 21. Em um número natural N de 9 algarismos, tem-se que:

- os algarismos das unidades simples, unidades de milhar e unidades de milhão iguais a X;
- os algarismos das dezenas simples, dezenas de milhar e dezenas de milhão iguais a Y; e
- os algarismos das centenas simples, centenas de milhar e centenas de milhão iguais a Z.

Pode-se afirmar que N sempre será divisível por:

a) 333664.
b) 333665.
c) 333666.
d) 333667.
e) 333668.

Exercício 22. Dados três números naturais x, y e z tais que $x^2 + y^2 = z^2$, mostre que x e y não são ambos ímpares.

Exercício 23. Qual o resto da divisão por 9 do número

$$\sqrt{1111111111 - 22222}?$$

Exercício 24. Se a e b são números naturais e $2a + b$ é divisível por 13, então qual das alternativas contém um múltiplo de 13?

a) $91a + b$.
b) $92a + b$.
c) $93a + b$.
d) $94a + b$.
e) $95a + b$.

Exercício 25. Sabendo-se que o resultado de

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 14$$

é divisível por 13. Qual o resto da divisão do número

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

por 169?

Exercício 26. Qual é o resto da divisão de

$$10111213141516..........979899$$

por 9?

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)
Podemos escrever $5^8 - 2^8$ como

$$\begin{aligned} 5^8 - 2^8 &= \left(5^4 + 2^4\right)\left(5^4 - 2^4\right) \\ &= \left(5^4 + 2^4\right)\left(5^2 + 2^2\right)\left(5^2 - 2^2\right) \\ &= \left(5^4 + 2^4\right)\left(5^2 + 2^2\right) \cdot 21. \end{aligned}$$

Portanto, $21 \mid 5^8 - 2^8$. ■

2. (Extraído da Vídeo Aula)
Podemos escrever $11^6 - 1$ como

$$\begin{aligned} 11^6 - 1 &= 11^6 - 1^6 \\ &= \left(11^3 + 1^3\right)\left(11^3 - 1^3\right) \\ &= \left(11^3 + 1^3\right)\left(11^2 + 11 + 1\right)(11 - 1) \\ &= \left(11^3 + 1^3\right)\left(11^2 + 11 + 1\right) \cdot 10. \end{aligned}$$

Portanto, $10 \mid 11^6 - 1$. ■

2. (**Outra solução.**)
Podemos perceber que 11^6 termina em 1 (tem como algarismo das unidades o 1). E observando só as unidades, ele será subtraído de 1, logo $11^6 - 1$ termina em zero. Sendo assim, ele é divisível por 10. ■

3. Um número que é divisível por 45 é, ao mesmo tempo, divisível por 5 e por 9. Para ser divisível por 5 deve ter o algarismo das unidades igual a 0 ou 5, esses são os possíveis valores de b. Para ser divisível por 9, a soma dos seus algarismos deve ser um múltiplo de 9, ou seja, 9 deve dividir $2 + 3 + a + 1 + 9 + 9 + 2 + b = 26 + a + b$.

i) Para $b = 0$, temos que $26 + a$ deve ser múltiplo de 9, daí $a = 1$ é a única solução no conjunto indicado.

ii) Para $b = 5$, temos que $31 + a$ deve ser múltiplo de 9, daí $a = 5$ é a única solução no conjunto indicado.

Por fim, para $a = 1$ e $b = 0$ temos $(1 - 0)^2 = 1$ e, para $a = 5$ e $b = 5$, temos $(5 - 5)^2 = 0$. Os possíveis valores de $(a - b)^2$ são 0 e 1.

4. (Adaptado da Vídeo Aula)
Podemos observar que $2^{48} - 1$ é igual a

$$\begin{aligned} 2^{48} - 1 &= \left(2^{24}\right)^2 - 1^2 \\ &= \left(2^{24} + 1\right)\left(2^{24} - 1\right) \\ &= \left(2^{24} + 1\right)\left(2^{12} + 1\right)\left(2^{12} - 1\right) \\ &= \left(2^{24} + 1\right)\left(2^{12} + 1\right)\left(2^6 + 1\right)\left(2^6 - 1\right) \\ &= \left(2^{24} + 1\right)\left(2^{12} + 1\right) \cdot 65 \cdot 63. \end{aligned}$$

Portanto, $65 \mid 2^{48} - 1$ e $63 \mid 2^{48} - 1$. ■

5. Se $10x + y$ é divisível por 7, então $10x + y - 7x - 7y$ também o é. Agora, temos que

$$10x + y - 7x - 7y = 3x - 6y,$$

logo $3x - 6y$ é divisível por 7. Fatorando o 3, temos

$$3x - 6y = 3 \cdot (x - 2y).$$

Como 7 não divide 3, então 7 divide $x - 2y$. Para provar a volta, basta tomarmos as operações inversas em cada passagem anterior de trás para frente.

Observação: Vejamos agora alguns exemplos da aplicação do que foi demonstrado no exercício 5.

a) Para demonstrar que o número 294 é divisível por 7, basta tomarmos $x = 29$ e $y = 4$:

$$29 - 2 \cdot 4 = 21.$$

Como 7 divide 21, então 7 divide 294.

b) Para verificar se 7 divide o número 248738, o método vai ser aplicado várias vezes, observe.

$$\begin{aligned} 24873 - 2 \cdot 8 &= 24857 \\ 2485 - 2 \cdot 7 &= 2471 \\ 247 - 2 \cdot 1 &= 245 \\ 24 - 2 \cdot 5 &= 14. \end{aligned}$$

Como 7 divide 14, então 7 divide 248738.

c) Usando o método para o número 7557, obtemos:

$$\begin{aligned} 755 - 2 \cdot 7 &= 741 \\ 74 - 2 \cdot 1 &= 72 \\ 7 - 2 \cdot 2 &= 3. \end{aligned}$$

Assim, como 7 **não** divide 3, 7 não divide 7557.

6. (Extraído da Vídeo Aula)
Sabendo que os possíveis restos numa divisão por 8 são $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e como o resto é o dobro do quociente, então só trabalharemos com os valores pares, ficando com os possíveis restos: 0,2,4 e 6. Seja n o valor procurado. Simbolicamente teremos:

$$\begin{array}{r|l} n & 8 \\ \cline{2-2} 2q & q \end{array}$$

com $0 \leq 2q < 8$. Portanto, $0 \leq q < 4$. Além disso, como

$$n = 8 \cdot q + 2q = 10q,$$

basta considerarmos os seguintes casos para o valor do resto:

i) se o resto for zero, o quociente será 0 e $n = 0$;

ii) se o resto for dois, o quociente será 1 e $n = 8 \cdot 1 + 2 = 10$;

iii) se o resto for quatro, o quociente será 2 e $n = 8 \cdot 2 + 4 = 20$; e

iv) se o resto for seis, o quociente será 3 e $n = 8 \cdot 3 + 6 = 30$.

Portanto, os números são 0, 10, 20 e 30.

7. (Extraído da Vídeo Aula)
Os possíveis restos numa divisão por 7 são os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O maior resto possível é o 6 e assim queremos descobrir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{r|l} n & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 4 \end{array}$$

A partir do diagrama anterior, $n = 7 \cdot 4 + 6 = 34$.

8. Se $10x + y$ é divisível por 13, então $10x + y - 13x - 13y$ também o é. Agora, temos que

$$10x + y - 13x - 13y = -3x - 12y = -3(x + 4y),$$

e como 13 não divide -3, então 13 divide $x + 4y$. Para provar o caminho de volta, basta tomarmos as operações inversas em cada passagem anterior de trás para frente. ■

Observação: Vejamos alguns exemplos da aplicação do que foi demonstrado no exercício 8.

a) O número 1001 é divisível por 13, para provar isso tome $x = 100$ e $y = 1$ e aplique o exercício anterior:

$$1001 \to 100 + 4 \cdot 1 = 104.$$

Agora, faça $x' = 10$ e $y' = 4$, obtendo

$$104 \to 10 + 4 \cdot 4 = 26.$$

Como 13 divide 26, então 13 divide 1001.

b) Façamos o mesmo para verificar se 13 divide 2464085:

$$\begin{aligned} 246408 + 4 \cdot 5 &= 246428 \\ 24642 + 4 \cdot 8 &= 24674 \\ 2467 + 4 \cdot 4 &= 2483 \\ 248 + 4 \cdot 3 &= 260 \\ 26 + 4 \cdot 0 &= 26. \end{aligned}$$

Como 13 divide 26, então 13 divide 2464085.

9. Seja n esse número, logo existem a e b inteiros tais que $n = 9a + 3$ e $n = 11b + 4$. Ou seja,

$$\begin{aligned} 9a + 3 &= 11b + 4 \\ 9a &= 11b + 4 - 3 \\ 9a &= 11b + 1. \end{aligned}$$

Daí, 9 divide $11b + 1$. Substituindo os valores de b do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$, podemos concluir que o menor b natural que satisfaz essa afirmação é $b = 4$. Portanto, $a = 5$ e $n = 48$.

10. Podemos escrever $k = 7q + 4$ para algum q inteiro.

a) Sendo assim,

$$\begin{aligned} k^2 + k + 1 &= (7q + 4)^2 + (7q + 4) + 1 \\ &= 49q^2 + 56q + 16 + 7q + 4 + 1 \\ &= 49q^2 + 63q + 21 \\ &= 7(7q^2 + 9q + 3). \end{aligned}$$

Portanto, $k^2 + k + 1$ é múltiplo de 7, ou seja, deixa resto 0 em sua divisão por 7.

b) Seja nk um múltiplo de k que, somado a k^2 produz um múltiplo de 7, assim temos

$$\begin{aligned} k^2 + nk &= (7q + 4)^2 + n(7q + 4) \\ &= 49q^2 + 56q + 16 + 7nq + 4n \\ &= 49q^2 + 56q + 7nq + 14 + 4n + 2 \\ &= 7(7q^2 + 8q + nq + 2) + 4n + 2. \end{aligned}$$

Agora, precisamos encontrar o menor inteiro n tal que $4n + 2$ seja múltiplo de 7. Substituindo os valores de n do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots 6\}$, o menor valor será $n = 3$ e daí teremos $4n + 2 = 14$. O menor múltiplo será $3k$.

11. Observe que

$$\begin{aligned} n &= 7a + 4 \text{ e} \\ n &= 8b + 6, \end{aligned}$$

para a e b inteiros. Multiplicando a primeira por 8 e a segunda por 7, obteremos

$$\begin{aligned} 8n &= 56a + 32 \text{ e} \\ 7n &= 56b + 42. \end{aligned}$$

Subtraindo-as, chegamos a

$$\begin{aligned} 8n - 7n &= 56(a - b) - 10 \\ n &= 56(a - b) - 10 \\ &= 56(a - b) - 10 + 56 - 56 \\ &= 56(a - b) - 56 + 46 \\ &= 56(a - b - 1) + 46 \end{aligned}$$

Ou seja, n deixa resto 46 quando dividido por 56.

12. Sendo $n = 2^a \cdot 3^b$, sua quantidade de divisores será $(a+1)(b+1) = 15$. Daí teremos quatro situações, a saber:

i) $a+1 = 1$ e $b+1 = 15$, resultando em $n = 3^{14}$;

ii) $a+1 = 3$ e $b+1 = 5$, resultando em $n = 2^2 \cdot 3^4 = 324$;

iii) $a+1 = 5$ e $b+1 = 3$, resultando em $n = 2^4 \cdot 3^2 = 144$; ou

iv) $a+1 = 15$ e $b+1 = 1$, resultando em $n = 2^{14}$.

13. Para um número ser divisível por 91, ele deve ser divisível ao mesmo tempo por 13 e 7. Um método prático para a divisão por 7 foi demonstrado no exercício 5. Vamos aplicá-lo agora:

$$\begin{aligned} 12345n78 - 2 \cdot 9 &= 12345n60 \\ 12345n6 - 2 \cdot 0 &= 12345n6 \\ 12345n - 2 \cdot 6 &= 123450 + n - 12 \\ &= 123438 + n. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo método para descobrir qual o resto da divisão de 123438 por 7.

$$\begin{aligned} 12343 - 2 \cdot 8 &= 12327 \\ 1232 - 2 \cdot 7 &= 1218 \\ 121 - 2 \cdot 8 &= 105 \\ 10 - 2 \cdot 5 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, 123438 é divisível por 7 e n pode ser 0 ou 7. Agora, vamos para o método do 13 (visto no exercício 8) utilizando $n = 0$ e depois $n = 7$. Para $n = 0$, teremos

$$\begin{aligned} 12345078 + 4 \cdot 9 &= 12345114 \\ 1234511 + 4 \cdot 4 &= 1234527 \\ 123452 + 4 \cdot 7 &= 123480 \\ 12348 + 4 \cdot 0 &= 12348 \\ 1234 + 4 \cdot 8 &= 1266 \\ 126 + 4 \cdot 6 &= 150 \\ 15 + 4 \cdot 0 &= 15. \end{aligned}$$

Como 13 não divide 15, ele não dividirá 123450789. Agora, para $n = 7$, ficaremos com o número 123457789 e obteremos

$$\begin{aligned} 12345778 + 4 \cdot 9 &= 12345814 \\ 1234581 + 4 \cdot 4 &= 1234597 \\ 123459 + 4 \cdot 7 &= 123487 \\ 12348 + 4 \cdot 7 &= 12376 \\ 1237 + 4 \cdot 6 &= 1261 \\ 126 + 4 \cdot 1 &= 130, \end{aligned}$$

Como 13 divide 130, ele dividirá 123457789. Finalmente, ficamos com $n = 7$.

14. Para analisar os restos de x^2 por 4, podemos analisar os possíveis restos de x por 4.

i) Se $x = 4k$, então $x^2 = 4(4k^2)$, ou seja, x^2 deixa resto 0 na divisão por quatro;

ii) se $x = 4k+1$, então $x^2 = 4(4k^2+2k)+1$, ou seja, x^2 deixa resto 1 na divisão por quatro;

iii) se $x = 4k+2$, então $x^2 = 4(4k^2+4k+1)$, ou seja, x^2 deixa resto 0 na divisão por quatro; e

iv) se $x = 4k+3$, então $x^2 = 4(4k^2+6k+2)+1$, ou seja, x^2 deixa resto 1 na divisão por quatro.

Apenas os restos 0 e 1 são possíveis.

Outra solução: Se x é ímpar, $x = 2k+1$ e temos que $x^2 = 4k(k+1)+1$ deixa resto 1 na divisão por 4. Se x é par, $x = 2k$ e temos que $x^2 = 4k^2$ deixa resto 0 na divisão por. 4

15. (Extraído da Vídeo Aula)
Se 6 divide $a+b+c$, então existe um inteiro k tal que $a+b+c = 6k$. Logo $a+b = 6k-c$ e, elevando ambos os membros ao cubo, chegamos a

$$\begin{aligned} a+b &= 6k-c \\ (a+b)^3 &= (6k-c)^3 \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 &= 216k^3-108k^2c+6kc^2-c^3. \end{aligned}$$

Observe que $216k^3-108k^2c+6kc^2$ é múltiplo de 6, então para algum m inteiro teremos $216k^3-108k^2c+6kc^2 = 6m$. Voltando à equação encontrada e substituindo o valor acima por $6m$ obtemos

$$a^3+b^3+c^3 = 6m-3ab(a+b).$$

Observe agora que se a ou b forem pares, $3ab$ é divisível por 6 e que se ambos forem ímpares então $(a+b)$ é par e $3ab(a+b)$ é divisível por 6. Logo, em qualquer caso, 6 divide $a^3+b^3+c^3$. ■

16. Como x deixa resto 1 nas divisões por 2, 3, 5 e 7, então $x-1$ é divisível por esses números e, portanto, é um múltiplo comum deles. Sendo assim, existe algum k inteiro tal que $x-1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k$, ou seja,

$$x = 210k+1.$$

Como x tem três algarismos, temos

$$\begin{aligned} 100 \leq &\quad x \quad \leq 999 \\ 100 \leq &\, 210k+1 \leq 999 \\ \frac{99}{210} \leq &\quad k \quad \leq \frac{998}{210}. \end{aligned}$$

Portanto o maior k é 4 e, para tal valor, $x = 841$. A soma dos algarismos procurada é $8+4+1 = 13$.

17. Seja M_{17} o conjunto dos múltiplos de 17 menores que 400, daí

$$M_{17} = \{17, 34, 51, \cdots, 374, 391\}.$$

Como $17 = 1 \cdot 17$ e $391 = 23 \cdot 17$, então

$$|M_{17}| = 23.$$

Seja M_{23} o conjunto dos múltiplos de 23 menores que 400, daí

$$M_{23} = \{23, 46, \cdots, 368, 391\}.$$

Como $23 = 1 \cdot 23$ e $391 = 17 \cdot 23$, então

$$|M_{23}| = 17.$$

Os dois conjuntos anteriores possuem um elemento em comum, a saber, $M_{17} \cap M_{23} = \{391\}$. Por fim, há

$$23 + 17 - 1 = 39$$

múltiplos de 17 ou 23 e menores que 400.

18. Para $m = 3$ e $n = 1$, $m^2 - n^2 = 8$. Portanto, o maior inteiro procurado é menor ou igual à 8. Sendo m e n ímpares, existem x e y inteiros tais que $m = 2x + 1$ e $n = 2y + 1$. Substituindo e desenvolvendo a expressão dada, encontraremos que

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= (2x+1)^2 - (2y+1)^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - 4y^2 - 4y - 1 \\ &= 4(x(x+1) - y(y+1)). \end{aligned}$$

Concluindo assim que $m^2 - n^2$ é múltiplo de 4. Agora, como $x(x+1)$ e $y(y+1)$ são números pares, teremos que sua subtração será par, ou seja, existe t inteiro tal que

$$x(x+1) - y(y+1) = 2t$$

e que $m^2 - n^2 = 4 \cdot 2t = 8t$. Isso nos permite concluir que o maior inteiro que divide $m^2 - n^2$, quaisquer que sejam m e n inteiros ímpares é o 8.

19. Se esse número é divisível por 2 e 5, ele é divisível por 10. Assim, o algarismo das unidades como 0. Como ele é divisível por 9, a soma dos seus dígitos é um múltiplo de 9. Então, o número será do tipo

M	C	D	U
8	x	y	0

com $8 + x + y$ divisível por 9. Daí teremos dois casos:

i) o primeiro será quando $x + y = 1$, com duas opções, $(1, 0)$ e $(0, 1)$; e

ii) o segundo será quando $x + y = 10$, com nove opções, $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$, $(7, 3)$, $(8, 2)$ e $(9, 1)$.

Não é possível que $x + y$ seja 19, pois como x e y são dígitos, eles valem no máximo 9. Por fim, ficamos com 11 números.

20. (Adaptado da Olimpíada de Matemática do Canadá) Observe inicialmente que 23 é primo. Agora, cada vez que o 23 ou um dos seus múltiplos aparece na expansão de 2000!, a potência de 23 que o divide aumenta em uma unidade, no caso dos múltiplos de 23^2, essa potência aumenta uma unidade adicional. Não devemos considerar na análise o 23^3, pois $23^3 > 2000$. Por fim, no primeiro caso existem 86 múltiplos de 23 menores que 2000 e no segundo apenas 3. Logo, 23^{86+3} divide 2000! e $x = 89$.

21. (Extraído exame de acesso do Colégio Naval.)
O número em questão será

$$N = ZYXZYXZYX,$$

com $0 \leq X, Y, Z \leq 9$ e $Z \neq 0$. Logo, podemos escrever N como

$$Z \cdot 10^8 + Y \cdot 10^7 + X \cdot 10^6 + Z \cdot 10^5 + Y \cdot 10^4 + X \cdot 10^3 + Z \cdot 10^2 + Y \cdot 10^1 + X.$$

E agrupando os termos semelhantes teremos

$$Z \cdot 10^2 \cdot (10^6 + 10^3 + 1) + Y \cdot 10 \cdot (10^6 + 10^3 + 1) + X \cdot (10^6 + 10^3 + 1).$$

O que nos permite conluir que $10^6 + 10^3 + 1 = 1001001$ divide N. Além disso, $1001001 = 3 \cdot 333667$ e, portanto, 333667 divide N. Esse número está na letra **d**.

22. (Extraído da Vídeo Aula.)
Suponha, por absurdo, que x e y são ímpares. Portanto, existem a e b inteiros tais que $x = 2a + 1$ e $y = 2b + 1$. Daí, substituindo na equação dada, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ (2a+1)^2 + (2b+1)^2 &= z^2 \\ 4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 &= z^2 \\ 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2 &= z^2. \end{aligned}$$

Chegamos a um quadrado perfeito que deixa resto 2 numa divisão por quatro. Isso contradiz o exercício 14. Logo x e y não podem ser ambos ímpares. ■

23. Podemos chamar $11111 = n$ e substituir na expressão do enunciado ficando com

$$\begin{aligned} \sqrt{1111111111 - 22222} &= \sqrt{1111100000 + 11111 - 2 \cdot 11111} \\ &= \sqrt{n \cdot 10^5 + n - 2n} \\ &= \sqrt{n(10^5 - 1)} \\ &= \sqrt{n(99999)} \\ &= \sqrt{n \cdot 9 \cdot 11111} \\ &= \sqrt{n \cdot 9 \cdot n} \\ &= \sqrt{9n^2} \\ &= 3n \\ &= 33333. \end{aligned}$$

Esse número, quando dividido por 9, deixa resto 6.

24. (Extraído exame de acesso do Colégio Naval.) Se $2a + b$ é divisível por 13, então podemos escrever, para algum k inteiro, que $2a + b = 13k$. Agora, se somarmos qualquer múltiplo de 13, o resultado continuará dessa forma. Somando $13 \cdot 7a = 91a$ obteremos

$$2a + b + 91a = 93a + b$$

como outro múltiplo de 13, o que está na letra **c**.

25. (Extraído exame de acesso do Colégio Naval.) Observe que para algum $k \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\begin{aligned}
12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 14 &= 13k \\
12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 13k - 14 \\
13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 13 \cdot (13k - 14) \\
13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 169k - 182 \\
&= 169k - 169 - 13 \\
&= 169(k-1) - 13 \\
&= 169(k-1) - 13 + 169 - 169 \\
&= 169(k-2) + 156.
\end{aligned}$$

Logo, o resto da divisão de $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ por 169 é 156.

26. Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus dígitos é um múltiplo de nove. Agora, como $10111213141516\ldots979899$ é composto de

- 10 algarismos uns nas "dezenas" e 9 uns nas "unidades".
- 10 algarismos dois nas "dezenas" e 9 dois nas "unidades".
- $\vdots$
- 10 algarismos noves nas "dezenas" e 9 noves nas "unidades".

A soma dos dígitos será

$$19 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + \cdots + 19 \cdot 9 = 19 \cdot \left(\frac{(1+9) \cdot 9}{2} \right) = 19 \cdot 45.$$

Portanto, esse número é múltiplo de 9 e sua divisão então resto 0.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com