Função Exponencial

Inequações Exponenciais

1° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Função Exponencial
Inequações Exponenciais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva as inequações abaixo.

a) $2^x > 16$.

b) $5^x \leq 125$.

c) $9^{2x-3} < 27^x$.

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-5} < \dfrac{8}{27}$.

e) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x+3} \geq 9$.

Exercício 2. Resolva a inequação $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-2} \leq \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-1}$.

Exercício 3. Assinale a afirmação correta.

a) $(0,57)^2 > (0,57)^3$.

b) $(0,57)^7 < (0,57)^8$.

c) $(0,57)^4 > (0,57)^3$.

d) $(0,57)^{0,57} > (0,57)^{0,50}$.

e) $(0,57)^{-2} < 1$.

Exercício 4. Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $(0,4)^{3x-1} > 1$.

Exercício 5. Para quais valores de x é válida a inequação

$$3^{x-1} \cdot 3^{x-2} \geq \frac{1}{81}?$$

Exercício 6. Qual é a condição necessária e suficiente que o número real k deve satisfazer para que a equação $2^x = 4 - 2k$ admita solução real?

Exercício 7. Seja uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3^{x^2-5x-3}$. Determine os valores de x tais que $f(x)$ seja menor que 27.

Exercício 8. Determine o maior conjunto dos valores reais de x para os quais as funções abaixo estejam definidas.

a) $y = \sqrt{3^x - 3^{1-x}}$.

b) $y = \sqrt{(0,3)^{x^2-5x} - (0,3)^{-4}}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Determine o maior conjunto possível, em $\mathbb{R}$, dos valores de x que definem as funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{2}}$.

b) $g(x) = \dfrac{5^{2x}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^x}}$.

Exercício 10. Resolva a inequação $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$.

Exercício 11. Resolva a inequação:

$$2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4}.$$

Exercício 12. Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada por $q(t) = q_o \cdot 2^{-0.,2t}$, sendo q_o a quantidade inicial de água no reservatório após t meses. Determine a quantidade de meses para que a água do reservatório seja inferior a 25% do que era no início.

Exercício 13. Dada a inequação $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\dfrac{3}{9}\right)^{x-3}$, o conjunto verdade V, considerando o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por:

a) $V = \{x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$.

b) $V = \{x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \text{ e } x \geq 2\}$.

c) $V = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 2$.

d) $V = \{x \in \mathbb{R}, x \leq -3$.

e) $V = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $M^{x^3-1} \leq M^{x^2-1}$, com M real e $M > 1$, é:

a) $]-\infty, 1]$.

b) $[1, +\infty[$.

c) $[0, 1]$.

d) $[-1, +\infty[$.

e) $[0, +\infty[$.

Exercício 15. Dê o conjunto verdade da inequação exponencial:

$$3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3^{x^2} < 0.$$

Exercício 16. O conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x-1} \geq 0, \text{ é:}$$

a) $[-2, -1]$.

b) $[0, 1]$.

c) $]-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty]$.

d) $[0, +\infty[$.

e) $[-2, -1] \cup [0, 1]$.

Exercício 17. O conjunto solução da inequação $x^{2x} \geq x^{x+3}$, em que $x > 0$ e $x \neq 1$, é:

a) $(0, 1) \cup [3, +\infty)$.

b) $\{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$.

c) $[3, +\infty)$.

d) $\mathbb{R}$.

e) $\varnothing$.

Exercício 18. Se $2^a \cdot x^2 + 4^{a+1} \cdot x + 8 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que:

a) $a \leq \dfrac{1}{3}$.

b) $a < \dfrac{1}{3}$.

c) $a \geq \dfrac{1}{3}$.

d) $a < 0$.

e) $a > 1$.

Exercício 19. Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x, tais que:

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1.$$

a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

c) $]0, 2[$.

d) $]-\infty, 0[$.

e) $]2, +\infty[$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a)

$$\begin{array}{rcl} 2^x & > & 16 \\ 2^x & > & 2^4 \\ x & > & 4. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} 5^x & \leq & 125 \\ 5^x & \leq & 5^3 \\ x & \leq & 3. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} 9^{2x-3} & < & 27^x \\ 3^{2(2x-3)} & < & 3^3 \\ 4x-6 & < & 3 \\ x & < & \dfrac{9}{4}. \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-5} & < & \dfrac{8}{27} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-5} & < & \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3} \\ 3x-5 & > & 3 \\ x & > & \dfrac{8}{3}. \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x+3} & \geq & 9 \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x+3} & \geq & \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \\ -x+3 & \geq & -2 \\ -x & \geq & -5 \\ x & \leq & 5. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-2} & \leq & \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-1} \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-2} & \leq & \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3(x-1)} \\ 4x-2 & \geq & 3x-3 \\ x & \geq & -1. \end{array}$$

3. (Extraído da FGV) A.

4.

$$\begin{array}{rcl} (0,4)^{3x-1} & > & 1 \\ (0,4)^{3x-1} & > & (0,4)^0 \\ 3x-1 & < & 0 \\ x & < & \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R}, x < \dfrac{1}{3}\right\}$.

5.

$$\begin{array}{rcl} 3^{x-1} \cdot 3^{x-2} & \geq & \dfrac{1}{81} \\ 3^{x-1+x-2} & \geq & 3^{-4} \\ 2x-3 & \geq & -4 \\ 2x & \geq & -1 \\ x & \geq & -\dfrac{1}{2}. \end{array}$$

6. (Extraído da Vídeo Aula) Sabemos que 2^x é sempre positivo qualquer que seja x real. Então $4-2k>0$, segue que $k<2$.

7. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{array}{rcl} 3^{x^2-5x-3} & < & 27 \\ 3^{x^2-5x-3} & < & 3^3 \\ x^2-5x-3 & < & 3 \\ x^2-5x-6 & < & 0. \end{array}$$

Assim, temos que $-1 < x < 6$.

8.

a)

$$\begin{array}{rcl} 3^x - 3^{1-x} & \geq & 0 \\ 3^x & \geq & 3^{1-x} \\ x & \geq & 1-x \\ 2x & \geq & 1 \\ x & \geq & \dfrac{1}{2}. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} (0,3)^{x^2-5x} - (0,3)^{-4} & \geq & 0 \\ (0,3)^{x^2-5x} & \geq & (0,3)^{-4} \\ x^2-5x & \leq & -4 \\ x^2-5x+4 & \leq & 0. \end{array}$$

Assim, temos $1 \leq x \leq 4$.

9. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Seja D este conjunto, então, como se trata de uma raiz quadrada, devemos ter $x^2 - \frac{1}{2} \geq 0$, segue que $x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $D = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

b) No numerador não há restrição, mas o denominador é uma raiz quadrada, então temos que:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x &> 0 \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^x &> -1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x &< 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x &< \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ x &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, se D é o maior conjunto dos valores de x, então $D = \mathbb{R}_+^*$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Seja $2^x = y$ e, por consequência, $4^x = y^2$, temos $y^2 - 10y + 16 < 0$, donde $2 < y < 8$. Assim, $2 < 2^x < 2^3$ e concluímos que $1 < x < 3$.

11.

$$\begin{aligned} 2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} &< \frac{3}{4} \\ 2^x - 2 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x + 16 \cdot 2^x &< \frac{3}{4} \\ 2^x(1 - 2 - 4 - 8 + 16) &< \frac{3}{4} \\ 2^x \cdot 3 &< \frac{3}{4} \\ 2^x &< \frac{1}{4} \\ 2^x &< 2^{-2} \\ x &< -2. \end{aligned}$$

12. (Extraído da Unifor-CE 2016 - adaptada)

$$\begin{aligned} 25\% \cdot q_o &> q_o \cdot 2^{-0,2t} \\ \frac{1}{4} &> 2^{-0,2t} \\ 2^{-2} &> 2^{-0,2t} \\ -2 &> -0,2t \\ t &> 10. \end{aligned}$$

Portanto, depois de 10 meses a quantidade de água no reservatório será inferior a 25% do que era no início.

13. (Extraído da Unesp)

$$\begin{aligned} \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} &\geq \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3} \\ 3^{\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}} &\geq 3^{-x+3} \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} &\geq -x + 3 \\ x^2 - x + 2x - 6 &\geq 0 \\ x^2 + x - 6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Temos, portanto, $x \leq -3$ ou $x \geq 2$. Resposta A.

14. (Extraído da Mackenzie - 2015) Como $M > 1$, temos:

$$\begin{aligned} M^{x^3-1} &\leq M^{x^2-1} \\ x^3 - 1 &\leq x^2 - 1 \\ x^3 - x^2 &\leq 0 \\ x^2(x-1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Como $x^2 \geq 0$, então $x - 1 \leq 0$, segue que $x \leq 1$. Resposta A.

15. (Extraído do ITA - adaptada)

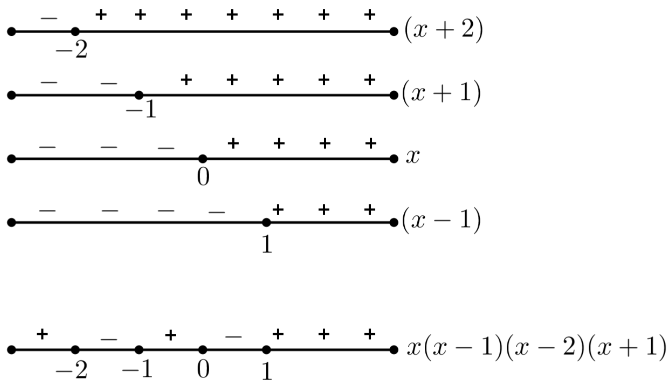
$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3^{x^2} &< 0 \\ 3 \cdot 5^{x^2} + 3 \cdot 3^{x^2} - 8 \cdot 3^{x^2} &< 0 \\ 3 \cdot 5^{x^2} - 5 \cdot 3^{x^2} &< 0 \\ 3 \cdot 5^{x^2} &< 5 \cdot 3^{x^2} \\ 5^{x^2-1} &< 3^{x^2-1} \end{aligned}$$

Para que seja válida a desigualdade acima, devemos ter $x^2 - 1 < 0$, segue que $-1 < x < 1$.

16. (Extraído da UDESC - 2016)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x-1} &\geq 0 \\ \left(\frac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} &\geq 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x-1} \\ 7^{-x^4+4x} &\geq 7 \cdot 7^{2x^3-x^2+2x-1} \\ 7^{-x^4+4x} &\geq 7^{2x^3-x^2+2x} \\ -x^4 + 4x &\geq 2x^3 - x^2 + 2x \\ x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x &\leq 0 \\ x(x^3 + 2x^2 - x - 2) &\leq 0 \\ x[x^2(x+2) - (x+2)] &\leq 0 \\ x(x+2)(x^2-1) &\leq 0 \\ x(x+2)(x-1)(x+1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Analisando os sinais de cada um dos fatores da inequação, temos:



Como queremos os valores negativos do produto, x pertence à união dos conjuntos $[-2, -1]$ e $[0, 1]$. Resposta E.

17. (Extraído da UNIRIO) Vamos dividir o problema em dois casos:

i. $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} x^{2x} &\geq x^{x+3} \\ 2x &\leq x+3 \\ x &\leq 3. \end{aligned}$$

Como o intervalo deste caso é $0 < x < 1$, qualquer valor de x deste intervalo vale para a solução.

ii. $x > 1$:

$$\begin{aligned} x^{2x} &\geq x^{x+3} \\ 2x &\geq x+3 \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

Como o intervalo deste caso é $x > 1$, então a solução é $x \geq 3$.

Sendo assim, a solução da inequação é a união dos conjuntos solução dos dois casos, ou seja, $(0, 1) \cup [3, +\infty)$. Resposta A.

18. (Extraído da UFV - MG) Seja a função $f(x) = 2^a \cdot x^2 + 4^{a+1} \cdot x + 8$. Se queremos $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então o gráfico de $f(x)$ não deve interceptar o eixo x, ou seja, $f(x)$ não deve ter raiz real e, além disso, sua concavidade deve estar voltada para cima, o que ocorre para qualquer $a \in \mathbb{R}$, já que $2^a > 0$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \left(4^{a+1}\right)^2 - 4 \cdot 2^a \cdot 8 &< 0 \\ 2^{4(a+1)} - 32 \cdot 2^a &< 0 \\ 16 \cdot 2^{4a} - 32 \cdot 2^a &< 0 \\ 2^{4a} - 2 \cdot 2^a &< 0 \\ 2^a(2^{3a} - 2) &< 0. \end{aligned}$$

Chegamos a um produto negativo. Se um dos fatores, 2^a, é positivo, então o outro, $2^{3a} - 2$, deve ser negativo. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} 2^{3a} - 2 &< 0 \\ 2^{3a} &< 2 \\ 3a &< 1 \\ a &< \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Resposta B.

19. (Extraído do ITA)

$$\begin{aligned} \alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} &< 1 \\ \alpha^{2x} \cdot \alpha^{-x^2} &< 1 \\ \alpha^{-x^2+2x} &< 1 \\ -x^2 + 2x &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos $0 < x < 2$. Resposta C.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com