Módulo de Função Afim

Noções Básicas.

9º ano E.F.

Portal da Matemática
OBMEP

Função Afim
Noções Básicas.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em certa cidade, uma corrida de táxi custa R\$ $4,80$ a bandeirada, mais R\$ 0,40 por quilômetro rodado. Quanto custa uma corrida de 50 quilômetros?

Exercício 2. O grau Fahrenheit (símbolo: $°F$) é uma escala de temperatura proposta por Daniel Gabriel Fahrenheit em 1724. Nesta escala, o ponto de fusão da água ($0°C$) é de $32°F$ e o ponto de ebulição da água ($100°C$) é de de $212°F$. Sabendo que a temperatura na escala Fahrenheit é dada por uma função afim da escala Celsius, determine em qual temperatura na escala Celsius ambas assinalam o mesmo valor numérico?

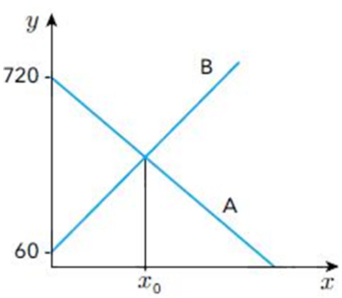
Exercício 3. O custo total, por mês, de um serviço de fotocópias, com cópias do tipo $A4$, consiste de um custo fixo acrescido de um custo variável. O custo variável depende, de forma diretamente proporcional, da quantidade de páginas reproduzidas. Em um mês em que esse serviço fez 50000 cópias, seu custo total foi de R\$ $21000,00$; enquanto que em um mês em que fez 20000 cópias, seu custo total foi de R\$ $19200,00$. Supondo que o custo por página seja o mesmo nos meses mencionados, determine-o.

Exercício 4. Um experimento de Agronomia mostra que a temperatura média da superfície do solo $t(x)$, em $°C$, é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela seguinte.

$x[g/m^2]$	10	20	30	40	50	60	70
$t(x)[°C]$	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Qual a lei de formação da função $t(x)$?

Exercício 5. O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.



2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. "Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra." (Revista Exame. 21 abr. 2010.)
A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é:

a) $f(x) = 3x$.
b) $f(x) = 24$.
c) $f(x) = 27$.
d) $f(x) = 3x + 24$.
e) $f(x) = 24x + 3$.

Exercício 7. Em uma corrida de táxi é cobrado um valor inicial chamado de a bandeirada, mais uma quantia proporcional por quilômetro rodado. Se por uma corrida de 8 km paga-se R\$ $28,50$ e por uma corrida de 5 km paga-se R\$ $19,50$. Qual o valor da bandeirada?

Exercício 8. Duas pessoas combinaram de se encontrar entre 13 h e 14 h, no exato instante em que a posição do ponteiro dos minutos do relógio coincidisse com a posição do ponteiro das horas. Dessa forma, qual o horário que o encontro foi marcado?

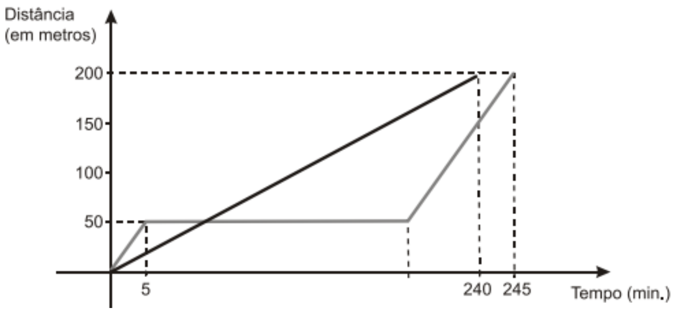
Exercício 9. Cláudio, gerente capacitado de uma empresa que produz e vende instrumentos musicais, contratou uma consultoria para analisar o sistema de produção. Os consultores, após um detalhado estudo, concluíram que o custo total de produção de x flautas de determinado tipo pode ser expresso pela função $C(x) = 2400 + 36x$, sendo R\$ $2400,00$ o custo fixo. Atualmente a empresa vende 60 flautas daquele tipo por mês, ao preço de R\$ $120,00$ por unidade. O trabalho da empresa de consultoria demonstrou, também, que um gasto extra de R\$ $1200,00$ em publicidade provocaria um aumento de 15% no volume atual de vendas das flautas. Na sua opinião, Cláudio deveria autorizar o gasto extra em publicidade?

Exercício 10. Considere três pontos distintos A, B e C no plano cartesiano. Mostre que se suas coordenadas satisfazem a equação $y = ax + b$, então esses pontos estão alinhados e, em seguida, conclua que o gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

Exercício 11. Uma função f definida de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$, crescente, satisfaz a equação $f(5x) = 5f(x)$ para todo x real não-negativo. Se $f(25) = 125$, então qual o valor de $f(1)$?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. A fábula da lebre e da tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



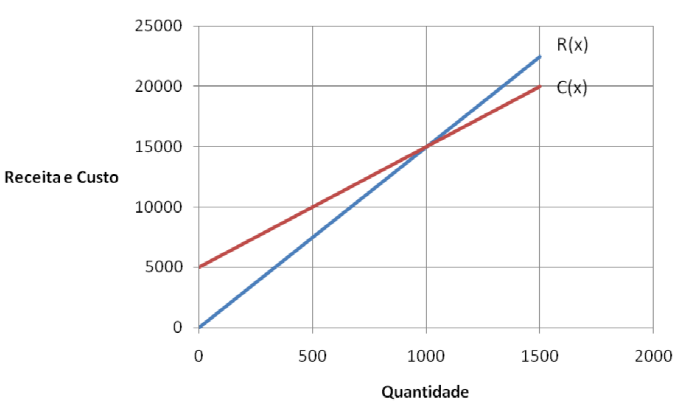
Suponha que na fábula lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. A tartaruga anda sempre com velocidade constante. A lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo. Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga. Considerando essas informações,

a) determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.

b) determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.

c) determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.

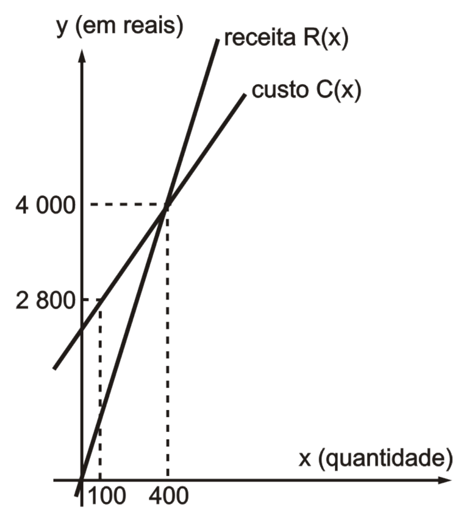
Exercício 13. Os gráficos abaixo representam as funções receita mensal $R(x)$ e custo mensal $C(x)$ de um produto fabricado por uma empresa, em que x é a quantidade produzida e vendida. Qual o lucro obtido ao se produzir e vender 1350 unidades por mês?



Exercício 14. Os preços dos ingressos de um teatro nos setores 1, 2 e 3 seguem uma função polinomial do primeiro grau crescente com a numeração dos setores. Se o preço do ingresso no setor 1 é de R $ 120,00 e no setor 3 é de R$ 400,00, então qual o preço do ingresso no setor 2?

Exercício 15. Considerando um intervalo de tempo de 10 anos a partir de hoje, o valor de uma máquina deprecia linearmente com o tempo, isto é, o valor da máquina y em função do tempo x é dado por uma função polinomial do primeiro grau $y = ax + b$. Se o valor da máquina daqui a dois anos for R$ 6400,00, e seu valor daqui a cinco anos e meio for R$ 4300,00, qual será o seu valor daqui a sete anos?

Exercício 16. Paulo é um fabricante de brinquedos que produz determinado tipo de carrinho. A figura a seguir mostra os gráficos das funções custo total e receita, considerando a produção e venda de x carrinhos fabricados na empresa de Paulo.



a) Existem custos tais como: aluguel, folha de pagamento dos empregados e outros, cuja soma denominamos custo fixo, que não dependem da quantidade produzida, enquanto a parcela do custo que depende da quantidade produzida, chamamos de custo variável. A função custo total é a soma do custo fixo com o custo variável. Na empresa de Paulo, qual o custo fixo de produção de carrinhos?

b) A função lucro é definida como sendo a diferença entre a função receita total e a função custo total. Quantos carrinhos Paulo tem que vender para obter um lucro de R$ 2.700,00?

c) A diferença entre o preço pelo qual a empresa vende cada carrinho e o custo variável por unidade é chamada de margem de contribuição por unidade. Portanto, no que diz respeito aos carrinhos produzidos na fábrica de Paulo, qual a margem de contribuição por unidade?

Exercício 17. Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y,$$

para quaisquer x e y reais, mostre que f é uma função afim.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)
Observe que o preço da corrida "P" pode ser dado em função da quantidade "x" de quilômetros rodados pela fórmula

$$P(x) = 0,4x + 4,8.$$

Como foram rodados 50 quilômetros, basta substituir o x por esse valor obtendo

$$\begin{aligned} P(x) &= 0,4x + 4,8 \\ P(50) &= 0,4 \cdot 50 + 4,8 \\ &= 20 + 4,8 \\ &= 24,8 \text{ reais.} \end{aligned}$$

2. Se "$f(x)$" é o grau Fahrenheit associado ao grau Celsius "x", podemos concluir que $f(0) = 32$ e $f(100) = 212$. Substituindo esses valores em $f(x) = ax + b$ teremos

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ \\ 212 = a \cdot 100 + b, \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $b = 32$ e $a = 1,8$. Assim $f(x) = 1,8x + 32$. Se $f(x) = x$ temos

$$\begin{aligned} f(x) &= 1,8x + 32 \\ x &= 1,8x + 32 \\ 0,8x &= -32 \\ x &= -40^\circ \text{ C.} \end{aligned}$$

Ou seja, $-40^\circ\ C = -40^\circ\ F$.

3. (Extraído da Vídeo Aula)
Sendo $f(x) = ax + b$ o preço pago por x cópias e transformando as relações suprimindo as casas dos milhares, obteremos as seguintes relações $f(50) = 21$ e $f(20) = 19,2$ e o seguinte sistema

$$\begin{cases} 21 = a \cdot 50 + b \\ \\ 19,2 = a \cdot 20 + b, \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = \dfrac{3}{50} = 0,06$ e $b = 18$. Por fim, cada cópia custa 6 centavos.

4. (Adaptado da vídeo aula)
Observe na tabela que a cada $\Delta x = 10$ unidades há um $\Delta t = 0,06$. Então, essa é uma função afim com $a = \dfrac{0,06}{10}$. Agora para o b basta calcularmos o valor de $t(0)$, completado a tabela com mais uma variação, só que no sentido oposto.

$x[g/m^2]$	0	10	20
$t(x)[^\circ C]$	$7,24 - 0,06$	$7,24$	$7,30$

Logo, $b = 7,18$ e $t(x) = 0,06x + 7,18$.

5. (Extraído da UERJ $-$ 2014)
Na figura, x_0 é o momento que os dois reservatório estão com o mesmo volume "V". Como A toca no eixo y em 720, então $b_A = 720$ e da interpretação do enunciado $a_A = -10$ então $V_A(x) = -10x + 720$. Analogamente, $b_B = 60$ e $a_B = 12$, então $V_B(x) = 12x + 60$. Queremos o x_0 tal que $V_A(x_0) = V_B(x_0)$. Temos então

$$\begin{aligned} V_A(x_0) &= V_B(x_0) \\ -10x_0 + 720 &= 12x_0 + 60 \\ 22x_0 &= 660 \\ x_0 &= 30 \text{ horas.} \end{aligned}$$

6. (Extraído do ENEM)
Temos um valor fixo inicial $b = 24$ e, quando de utilizam x horas, adicionamos o valor $3x$, pois cada hora extra custa $a = 3$ dólares. Logo, a função será $f(x) = 3x + 24$ e a resposta está na **letra D**.

7. (Extraído da Vídeo Aula)
Podemos criar as seguintes relações $f(8) = 28,50$ e $f(5) = 19,5$. Se $f(x) = ax + b$, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} 28,5 = a \cdot 8 + b \\ \\ 19,5 = a \cdot 5 + b, \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos $a = 3$ e $b = 4,5$. Então, a bandeirada custa R\$ $4,50$.

8. (Adaptado do vestibular da FGV $-$ 2012)
O ponteiro dos minutos se desloca 360° em uma hora, isto é, $\dfrac{360}{60} = 6^\circ$ por minuto. Sendo M o deslocamento do ponteiro grande do relógio em x minutos, teremos $M(x) = 6x$. Para o ponteiro das horas teremos um deslocamento de $\dfrac{360}{12} = 30^\circ$ por hora, ou seja, $\dfrac{30}{60} = 0,5^\circ$ por minuto, mas já se passou uma hora, então o ponteiro das horas já andou 30°. Denominando H o deslocamento do ponteiro pequeno em x minutos, chegamos a $H(x) = 0,5x + 30$. Queremos saber quando os ponteiros estarão sobrepostos, isso acontece quando $M(x) = H(x)$, desenvolvendo essa

última chegaremos a

$$\begin{aligned} M(x) &= H(x) \\ 6x &= 0,5x + 30 \\ 5,5x &= 30 \\ x &= \frac{30}{5,5} \\ x &= \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \text{ min.} \end{aligned}$$

Ou seja, eles se encontrarão às 13 h e $5\frac{5}{11}$ min.

9. (Extraído do vestibular da FGV)
Inicialmente, para vender 60 flautas temos o custo de $2400 + 36 \cdot 60 = 4560$ e após a venda de todas ficamos com uma receita de $60 \cdot 120 = 7200$. O lucro ficou em $7200 - 4560 = 2640$. Se houver gastos com publicidade, o número de flautas vendidas subirá 15% (fator de crescimento $1,15$) e chegaremos a $1,15 \cdot 60 = 69$ flautas, com custo total de $1200 + 2400 + 36 \cdot 69 = 6084$ reais e nova receita de $69 \cdot 120 = 8280$. Assim, o lucro será de $8280 - 6084 = 2196$ reais. Cláudio não deve autorizar o gasto com publicidade visto que o lucro no primeiro caso foi maior.

10. A distância entre dois pontos pode ser calculada pela fórmula $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Se (x_A, a_A), (x_B, a_B) e (x_C, a_C) representam as coordenadas dos três pontos, temos

$$\begin{aligned} d_{A,B} &= (x_B - x_A)\sqrt{1+a^2} \\ d_{B,C} &= (x_C - x_B)\sqrt{1+a^2} \\ d_{A,C} &= (x_C - x_A)\sqrt{1+a^2}. \end{aligned}$$

Somando as duas primeiras equações, teremos que

$$\begin{aligned} d_{A,B} + d_{B,C} &= (x_B - x_A)\sqrt{1+a^2} + (x_C - x_B)\sqrt{1+a^2} \\ &= (x_C - x_A)\sqrt{1+a^2} \\ &= d_{A,C}. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade Triangular, segue que A, B e C estão alinhados. Como isso vale para quaisquer três pontos do gráfico de uma Função Afim, podemos concluir que seu gráfico é uma reta. ∎

11. (Extraído da Vídeo Aula)
Como $f(5x) = 5f(x)$, segue que

$$\begin{aligned} 125 &= f(25) \\ &= 5f(5) \\ &= 25f(1). \end{aligned}$$

Portanto $f(1) = 5$.

12. (Extraído da UFMG − 2013)

a) Observe que a tartaruga completou os 200 metros em 240 minutos, ou seja, em 4 horas. Portanto, sua velocidade média foi de $\frac{200}{4} = 50$ metros por hora.

b) A lebre correu 50 metros e parou para dormir. A função f que determina a quantidade de metros percorridos pela tartaruga em função do tempo t em minutos é $f(t) = \frac{200}{240}t$. Como queremos saber em quanto tempo a tartaruga percorreu 50 metros, temos

$$\begin{aligned} \frac{200}{240}t &= 50 \\ t &= 60 \text{ min} = 1 \text{ h}. \end{aligned}$$

c) A lebre percorreu 50 m em 10 min, logo sua velocidade média foi de 10 metros por minuto. Para percorrer 200, ela deveria gastar 20 min, como gastou 245, então ela dormiu $245 - 20 = 225$ min.

13. (Extraído do vestibular da FGV − 2012)
Interpretando os gráficos, teremos que a função $R(x) = a_R \cdot x + b_R$ tem $b_R = 0$ e, como $R(1000) = 15000$, teremos $a_R = 15$. Portanto, obtemos $R(x) = 15x$. Agora, se $C(x) = a_C \cdot x + b_C$, teremos $b_C = 5000$ e $a_c = \frac{15000 - 5000}{1000 - 0} = 10$, ou seja, $C(x) = 10x + 5000$. Para calcularmos o lucro basta fazermos

$$\begin{aligned} R(1350) - C(1350) &= 15 \cdot 1350 - (10 \cdot 1350 + 5000) \\ &= 20250 - 13500 - 5000 \\ &= 1750 \text{ reais.} \end{aligned}$$

14. (Adaptado da Vídeo Aula)
Podemos estabelecer uma relação do preço P em função do setor x, então $P(1) = 120$, $P(3) = 400$ e busca-se o valor de $P(2)$. Teremos

$$\frac{P(2) - P(1)}{2 - 1} = a = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{400 - 120}{2} = 140.$$

Logo, ficamos com $P(2) = 120 + 140 = 260$ reais.

15. (Adaptado do vestibular da FGV − 2014)
Usando os dados do enunciado, podemos concluir que a taxa de variação do valor será $a = \frac{4300 - 6400}{5,5 - 2} = -600$ reais por ano. Entre cinco anos e meio e sete anos, haverá uma variação de $1,5 \times (-600) = -900$ reais e o preço ficará $4300 - 900 = 3400$ reais.

16. (Adaptado do vestibular da FGV)
Definindo $C(x) = a_C \cdot x + b_C$ e observando o gráfico da função custo, temos que $a_C = \dfrac{4000 - 2800}{400 - 100} = \dfrac{1200}{300} = 4$. Sendo assim, para um $\Delta x = 100$, essa função terá um $\Delta C = 400$, logo teremos que $b_C = 2400$. Seja $R(x) = a_R \cdot x + b_R$ a função receita, pelo gráfico teremos $b_R = 0$ e $a_R = \dfrac{4000}{400} = 10$.

a) Sendo assim, o custo fixo será de 2400 reais.

b) A função lucro será

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 10x - (4x + 2400) \\ &= 6x - 2400. \end{aligned}$$

Para um lucro de 2700 deveremos ter

$$\begin{aligned} 6x - 2400 &= 2700 \\ 6x &= 5100 \\ x &= 850 \text{ carrinhos.} \end{aligned}$$

c) O preço de venda é de 10 reais e o preço de custo de 4 reais, portanto a margem de contribuição é de 6 reais.

17. (Adaptado da Olimpíada da Eslovênia) Substituindo $x = 0$ e $y = 1$, temos $f(-f(1)) = 0$. Para $y = -f(1)$, teremos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - 0) \\ &= f(x - f(-f(1))) \\ &= 1 - x - (-f(1)) \\ &= -x + (f(1) + 1). \end{aligned}$$

Portando, f é uma função afim com coeficiente angular $a = -1$ e termo independente $b = f(1) + 1$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com