Equações Algébricas - Propriedades das Raízes

Raízes e Multiplicidade

3° ano E.M.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Equações Algébricas - Propriedades das Raízes
Raízes e Multiplicidade

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determinar o resto da divisão de x^2+x+1 por $x+1$.

Exercício 2. Um polinômio $P(x)$ quando dividido por $(x+2)$ dá resto 5 e, quando dividido por $(x-2)$, dá resto 13. Dividindo-se $P(x)$ por (x^2-4) obtém-se um resto $R(x)$. Calcular $R(1)$.

Exercício 3. Se o polinômio $P(x)$ dividido por $(x-2)$ deixa resto 6, divido por $(x+1)$ deixa resto 2 e dividido por $(x-1)$ deixa resto 4, determinar o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-1)(x+1)$.

Exercício 4. Determine p e q em termos de m, sabendo-se que o polinômio x^3+px+q é divisível pelo polinômio x^2+mx-1.

Exercício 5. Qual é o maximo divisor comum de x^m-1 e x^n-1?

Exercício 6. Determine quais das expressões abaixo possuem raízes repetidas. Em caso afirmativo, fatore a expressão.

a) $x^2-6x+9=0$.

b) $y^2+14y+25=0$.

c) $z^2-8z-16=0$.

d) $x^2+x+1/4=0$.

e) $16z^2-24z+9=0$.

Exercício 7. Encontre o valor de $\sqrt{2020\cdot 2018\cdot 2016\cdot 2014+16}$ sem usar calculadora.

Exercício 8. Fatores as expressões

(a) t^2-49.

(b) $36-9x^2$.

(c) $121a^2b^4-c^2$.

(d) $800x^4-72x^2y^2$.

Exercício 9. Resolva a equação $\sqrt{x-1}=x-3$.

Exercício 10. Determine m para que a equação $(m+1)x^2-2mx+(m+5)=0$ possua raízes reais e desiguais.

Exercício 11. Determine m para que a função quadrática $y=mx^2-(1+m)x+1$ só admita uma única raiz real.

Exercício 12. O conjunto dos valores inteiros e positivos de m para os quais a equação $x^2-5mx+2m=0$ tem ambas as raízes reais e distintas é

(a) $\{0,1,2,\ldots\}$

(b) $\{4,5,6,\ldots\}$

(c) $\{1,2,3\}$

(d) $\{1,2,3,\ldots\}$

(e) NRA

2 Exercícios de Fixação

Exercício 13. Se r é raiz de multiplicidade m da equação polinomial $f(x)=0$, mostre que r é raiz de multiplicidade $m-1$ da equação $f'(x)=0$.

Exercício 14. Prove que $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ é divisível por $(x-1)^2$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. (AIME 2001) Encontre a soma das raízes, reais e não reais, da equação $x^{2001}+\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2001}$.

Exercício 16. Se $n>1$, mostre que $(x+1)^n-x^n-1=0$ possui raiz múltipla se, e somente se, $n-1$ é um múltiplo de 6

Exercício 17. Se $b<0$, então as raízes x_1 e x_2 da euqação $2x^2+6x+b=0$, satisfazem a condição $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<k$, em que k é igual a (A) -3 (B) -5 (C) -6 (D) -2

Exercício 18. Se $x^3-108x+432$ tem uma raiz com multiplicidade 2, encontre todas as suas raízes.

Exercício 19. Encontre todos os valores de y tais que

$$(y^2+y-6)(y^2-6y+9)-2(y^2-9)=0.$$

Respostas e Soluções.

1. Aplicando o Algoritmo da divisão, temos

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & \quad x \\ \cline{1-1} & \\ 1 & \end{array}$$

Portanto, o resto é 1. Como $x = -1$ é a raiz de $x+1$, o resto também poderia ser obtido substituindo esse valor no polinômio dado: $(-1)^2 + (-1) + 1 = 1$.

2. Como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ tem grau 2, podemos escrever $R(x) = ax + b$ como o resto de $P(x)$ por $x^2 - 4$, com $a, b \in \mathbb{R}$. As duas informações iniciais podem ser traduzidas como $R(-2) = 5$ e $R(2) = 13$. Portanto,

$$\begin{aligned} -2a + b &= 5 \\ 2a + b &= 13. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $b = 9$ e $a = 2$. Logo, $R(x) = 2x + 9$ e $R(1) = 11$.

3. Como $(x-2)(x-1)(x+1)$ tem grau 3, podemos escrever $R(x) = ax^2 + bx + c$ como o resto de $P(x)$ por $(x-2)(x-1)(x+1)$. As informações do enunciado podem ser traduzidas como $R(2) = 6$, $R(-1) = 2$ e $R(1) = 4$. Ou seja,

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 6 \\ a - b + c &= 2 \\ a + b + c &= 4. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = 1/3$, $c = 8/3$, $b = 1$. Assim $R(x) = x^2/3 + x + 8/3$.

4. Pelo Algoritmo da Divisão, temos

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= (x^2 + mx - 1)(x - m) + \\ &+ (x(m^2+1) + p) - m + q) \end{aligned}$$

Para que a divisão seja exata, devemos ter $p = -m^2 - 1$ e $q = m$.

5. Se $m > n$, temos

$$x^m - 1 = x^{m-n}(x^n - 1) + (x^{m-n} - 1)$$

Daí, $mdc(x^m - 1, x^n - 1) = mdc(x^n - 1, x^{m-n} - 1)$. Ou seja, começando com o par de expoentes (m, n), o máximo divisor correspondente é o mesmo obtido com o par $(m - n, n)$. Realizando sucessivamente a operação de subtrair o menor elemento do par do maior, podemos trocar o par de expoentes (m, n) por pares (m', n') com $m' + n' < m + n$. Essa troca sucessiva para quando obtemos um par (d, d) com números iguais. Ao longo desse processo, como o divisores comuns de (m, n) e $(m - n, n)$ são os mesmos, podemos concluir que $d = mdc(m, n)$. Portanto $mdc(x^n - 1, x^m - 1) = x^{mdc(m,n)} - 1$.

6. Se α é raiz dupla de $ax^2 + bx + c = 0$, então $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

(a) Sim, pois $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

(b) Não, pois $\Delta = 196 - 100 \neq 0$.

(c) Sim, pois $z^2 - 8z - 16 = (z-4)^2$.

(d) Sim, pois $x^2 + x + 1/4 = (x + 1/2)^2$.

(e) Sim, pois $16z^2 - 24z + 9 = (4z - 3)^2$.

7. Note que

$$\begin{aligned} (x+3)(x+1)(x-1)(x-3) + 16 &= \\ (x^2 - 9)(x^2 - 1) + 16 &= \\ (x^2 - 5 - 4)(x^2 - 5 + 4) + 16 &= \\ (x^2 - 5)^2 - 16 + 16 &= \\ (x^2 - 5)^2 & \end{aligned}$$

Na expressão dada, basta fazer $x = 2017$. Assim,

$$\sqrt{2020 \cdot 2018 \cdot 2016 \cdot 2014 + 16} = 2017^2 - 5$$

8.

(a) $t^2 - 49 = (t-7)(t+7)$.

(b) $36 - 9x^2 = (6 - 3x)(6 + 3x)$.

(c) $121a^2b^4 - c^2 = (11ab^2 - c^2)(11ab^2 + c^2)$.

(d)

$$\begin{aligned} 8x^2(100 - 9y^2) &= \\ 8x^2(10 - 3y)(10 - 3y). & \end{aligned}$$

9. Elevando ambos os membros ao quadrado, as raízes da equação dada também são raízes de $x - 1 = x^2 - 6x + 9$, ou seja, $x^2 - 7x + 9 = 0$. As raízes dessa equação são $x = 5$ e $x = 2$. Como essa última raiz não satisfaz a equação dada, a única solução é $x = 5$.

10. Para que as raízes sejam desiguais, devemos ter $\Delta = 4m^2 - 4(m+5)(m+1) > 0$, ou seja, $m < -5/6$.

11. Para que exista uma única raiz, devemos ter $\Delta = (1+m)^2 - 4m = 0$, ou seja, $(m-1)^2 = 0$. Portanto $m = 1$.

12. Para que as raízes sejam distintas, devemos ter $\Delta = 25m^2 - 8m > 0$, ou seja, $m(25m - 8) > 0$. Como devemos ter $m > 0$, segue que $25m - 8 > 0$, ou seja, $m > 8/25$. Resposta item D.

13. Se r é raiz de multiplicidade m, podemos escrever $f(x) = (x-r)^m q(x)$. Daí

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-r)^{m-1}q(x) + (x-r)^m q'(x) \\ &= (x-r)^{m-1}(mq(x) + (x-r)q'(x)). \end{aligned}$$

Como $x - r$ não divide $mq(x)$, a multiplicidade de r em $f'(x)$ é $m - 1$.

14. Primeira solução: Para cada $k \geq 1$, sabemos que 1 é raiz de $x^k - 1$, pois $1^k - 1 = 0$. Daí, podemos escrever

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) \\ &= (x-1) \times \\ &\times \ ((x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \ldots + (x-1) + n) \\ &= (x-1)(q(x)(x-1) + n) \\ &= (x-1)^2 q(x) + n(x-1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 &= \\ (nx - (n+1))(x^n - 1) + n(x-1) &= \\ (x-1)^2 q(x)(nx - (n+1)) + n^2(x-1)^2 &= \\ (x-1)^2(q(x)(nx-(n+1)) + n^2). \end{aligned}$$

Segunda Solução: Pelo Algoritmo da Divisão, podemos escrever $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = r(x)(x-1)^2 + (ax+b)$. Como 1 é raíz do membro esquerdo, temos $a + b = 0$. Derivando a função polinomial, obtemos $n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} = r'(x)(x-1)^2 + 2r(x)(x-1) + a$. Usando que $x = 1$ é raiz do lado esquerdo, obtemos $a = 0$. Daí, $ax + b = 0$ e o polinômio dado é divisível por $(x-1)^2$.

15. Trata-se de um polinômio de grau 2000. Se r é raiz, então $\dfrac{1}{2} - r$ também é raiz. Portanto, ao parearmos as raízes que somam $1/2$, obtemos soma $1000 \cdot 1/2 = 500$.

16. Seja $f_n(x) = (x+1)^n - x^n - 1$. Se r é uma raiz dupla, então $f_n'(r) = 0$. Temos $f_n'(x) = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}$ e assim as raízes de $f_n'(x)$ são os valores r tais que $(r+1)^{n-1} = r^{n-1}$. Como r é uma raiz de $f_n(x)$, então

$$\begin{aligned} (r+1)^n - r^n - 1 &= 0 \\ (r+1)(r+1)^{n-1} - r \cdot r^{n-1} - 1 &= 0 \\ (r+1)^{n-1} &= 1. \end{aligned}$$

De modo que $r+1$ é uma raiz $n-1$-ésima da unidade. Como $(r+1)^{n-1} = r^{n-1}$, tomando o módulo de ambos os lados, $|r^{n-1}| = 1$, e então $|r| = 1$. Sabendo que $|r+1| = |r| = 1$, segue que 0, r e $r+1$ são vértices de um triângulo equilátero no plano complexo e daí r é uma raiz primitiva cúbica da unidade. Assim, $r+1$ é uma raiz primitiva 6-ésima da unidade. Entretanto, $r+1$ é também uma raiz $n-1$-ésima da unidade. Logo, $6|(n-1)$. Como essas implicações são reversíveis, vale a volta da afirmação.

17. A resposta é a letra D. Como $x_1 + x_2 = -3$ e $x_1 x_2 = b/2$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} &= \\ \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} &= \\ \frac{18}{b} - 2. \end{aligned}$$

Como $b < 0$, segue que $18/b < 0$ e daí $\dfrac{18}{b} - 2 < -2$.

18. Seja r a raiz de $P(x) = x^3 - 108x + 432$ com multiplicidade 2. Então $P'(x)$ também tem raiz r. De $P'(x) = 3x^2 - 108$ e $P'(r) = 0$, segue que $r = 6$ ou $r = -6$. Substituindo esses valores de r em $P(x)$, temos $P(6) = 0$. Portanto, a raiz com multiplicidade 2 é 6. Como a soma das raízes de $P(x)$ é igual a 0, segue que a terceira raíz é -12. Assim,as raízes são 6, 6 e -12.

19. A equação dada pode ser fatorada como

$$[(y-2)(y-3) - 2](y-3)(y+3) = 0.$$

As raízes de $(y-2)(y-3) - 2 = 0$ são 1 e 4. Portanto, os valores procurados de y são 1, 4, 3 e -3.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com