Cônicas

Parábolas

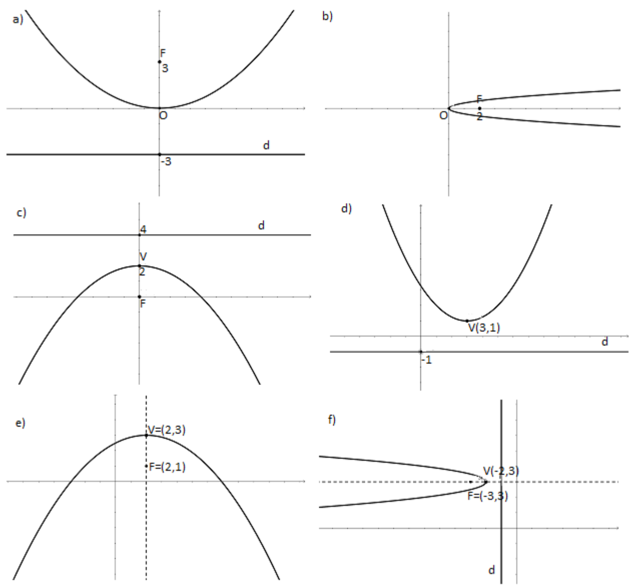
3° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Cônicas
Parábolas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine as equações das parábolas a seguir.



Exercício 2. Determine as coordenadas do foco F, do vértice V e a equação da diretriz d da parábola $(y+1)^2 = 2(x-1)$.

Exercício 3. Determine as coordenadas do foco F, do vértice V e a equação da diretriz d da parábola $y - 2 = 4(x+1)^2$.

Exercício 4. Determine a equação da parábola com vértice $V = (-2, -1)$ e diretriz $d : y - 2 = 0$.

Exercício 5. Ache a equação da parábola com foco $F = (-3, -1)$ e vértice $V = (-1, -1)$.

Exercício 6. Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes da reta $r : y - 4 = 0$ e do ponto $F = (1, 2)$.

Exercício 7. Determine o vértice da parábola de equação $x + y^2 - 2y + 4 = 0$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Uma parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, cujo eixo de simetria é o eixo Oy, passa pelo ponto $(4, -2)$. Determine sua equação, o foco F e a equação de sua diretriz d.

Exercício 9. Determine a equação da parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Ox e passa pelos pontos $(3/2, -1)$, $(0, 5)$ e $(-6, 7)$.

Exercício 10. Determine a equação da reta tangente à parábola $\mathcal{P} : x^2 = y + 1$, paralela à reta $r : 2x - y = 0$, e o ponto de tangência.

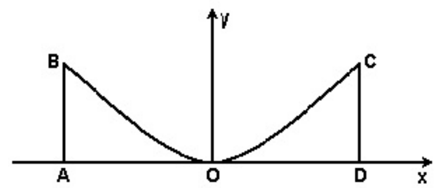
Exercício 11. Determine as equações das retas que passam por $P = (5, 0)$ e são tangentes à parábola $\mathcal{P} : x = -y^2$.

Exercício 12. Um círculo C com centro no ponto $P = (4, -1)$ passa pelo foco F da parábola $\mathcal{P} : x^2 = -16y$. Mostre que C é tangente à diretriz d de $\mathcal{P}$.

Exercício 13. Verifique que a equação do segundo grau $10y^2 + 8x - 30y - 9 = 0$ é uma parábola. Determine o vértice, o foco e a equação da diretriz.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. (PUC) A figura abaixo representa o corte plano de uma pista de skate, cuja equação é $y = ax^2$. Considerando-se $AO = OD = 5m$ e $AB = DC = 4m$, pode-se afirmar que o valor do parâmetro a é



(a)$0,12$
(b)$0,16$
(c)$0,20$
(d)$0,24$

Exercício 15. (UFRN) O conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que estão a uma mesma distância do ponto $F = (0, 2)$ e do eixo Ox no plano cartesiano xy é

(a)$y = x^2 + 4$
(b)$y = x^2 + 1$
(c)$y = 4x^2 + 1$
(d)$y = 2x^2 + 1$

Exercício 16. Todo ponto na parábola $y = \sqrt{2x - 1}$ é equidistante do eixo Oy e de qual dos seguintes pontos?

(a)$(1/2, 0)$
(b)$(1, 0)$
(c)$(3/2, 0)$
(d)$(2, 0)$
(e)$(5/2, 0)$

Exercício 17. (UFRJ) Considere os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (2, 6)$.

a) Determine a equação da parábola que passa por P_1, P_2 e P_3 e tem eixo de simetria paralelo ao eixo Oy das ordenadas.

b) Determine outra parábola que passe por P_1, P_2 e P_3.

Exercício 18. (ITA) Pelo ponto $C = (4, -4)$ são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x-4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C às retas determinadas por A e B é

(a)$6\sqrt{12}$
(b)$\sqrt{12}$
(c)12
(d)8
(e)6

Exercício 19. Determine as equações que descrevem o lugar geométrico dos pontos equidistantes a circunferência $C: x^2 + y^2 = 1$ e ao eixo Ox.

Respostas e Soluções.

1. a) Como a parábola tem diretriz paralela ao eixo Ox e concavidade voltada para cima, então tem equação do tipo $y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$. Temos que o vértice é $V = (x_0, y_0) = (0,0)$ e o parâmetro $p = d(V, F) = 3$, logo a equação da parábola é $y = \frac{x^2}{12}$.

b) Como a parábola tem diretriz paralela ao eixo Oy e concavidade voltada para direita, então tem equação do tipo $x - x_0 = 4p(y - y_0)^2$. Temos que o vértice é $V = (0,0)$ e o parâmetro $p = 2$, logo a equação da parábola é $x = 8y^2$.

c) Como a parábola tem diretriz paralela ao eixo Ox e concavidade voltada para baixo, então tem equação do tipo $y - y_0 = -\frac{1}{4p}(x - x_0)^2$. Temos que o vértice é $V = (0,2)$ e o parâmetro $p = 2$, logo a equação da parábola é $y - 2 = \frac{-1}{8}x^2$.

d) Como a parábola tem diretriz paralela ao eixo Ox e concavidade voltada para cima, então tem equação do tipo $y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$. Temos que o vértice é $V = (3,1)$ e o parâmetro $p = d(V, d) = 2$, logo a equação da parábola é $y - 1 = \frac{1}{8}(x - 3)^2$.

e) Como a parábola tem eixo de simetria paralelo ao eixo Oy e concavidade voltada para baixo, então tem equação do tipo $y - y_0 = -\frac{1}{4p}(x - x_0)^2$. Temos que o vértice é $V = (2,3)$ e o parâmetro $p = 2$, logo a equação da parábola é $y - 3 = \frac{-1}{8}(x - 2)^2$.

f) Como a parábola tem diretriz paralela ao eixo Oy e concavidade voltada para esquerda, então tem equação do tipo $x - x_0 = -4p(y - y_0)^2$. Temos que o vértice é $V = (-2,3)$ e o parâmetro $p = d(V, d) = 1$, logo a equação da parábola é $x + 2 = -4(y - 3)^2$.

2. A parábola tem equação do tipo $x - x_0 = \frac{1}{4p}(y - y_0)^2$, com $V = (x_0, y_0) = (1, -1)$ e $p = 1/2$. Como a diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade é voltada para direita, o foco é $F = (x_0 + p, y_0) = (3/2, -1)$ e a diretriz $d : x = x_0 - p = 1/2$.

3. A parábola tem equação do tipo $y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$, com $V = (x_0, y_0) = (-1, 2)$ e $p = 1/16$. Como a diretriz é paralela ao eixo Ox e a concavidade é voltada para cima, o foco é $F = (x_0, y_0 + p) = (-1, 33/16)$ e a diretriz $d : y = y_0 - p = 31/16$.

4. Como a diretriz é paralela ao eixo Ox e o vértice está abaixo da diretriz, a concavidade da parábola é voltada para baixo. A equação é do tipo $y - y_0 = -\frac{1}{4p}(x - x_0)^2$. O parâmetro $p = d(V, d) = 3$ e o vértice $V = (x_0, y_0) = (-2, -1)$, assim $y + 1 = \frac{-1}{12}(x + 2)^2$.

5. Como F e V estão sobre a mesma reta horizontal, que é o eixo de simetria da parábola, e a abscissa do foco é menor que a do vértice, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda. Assim, tem equação $x - x_0 = -\frac{1}{4p}(y - y_0)^2$. O parâmetro $p = d(F, V) = 2$ e $V = (x_0, y_0) = (-1, -1)$. Logo a equação é $x + 1 = -\frac{1}{8}(y + 1)^2$.

6. Seja $P = (x, y)$ um ponto do lugar geométrico. A equação $d(r, P) = |PF|$ equivale a $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = |y - 4|$. Elevando ambos os lados ao quadrado e isolando y chegamos a equação da parábola

$$y = \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}.$$

7. Completando quadrados temos

$$x + [(y-1)^2 - 1] + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = -(y-1)^2.$$

Comparando com a forma geral $x - x_0 = \pm\frac{1}{4p}(y - y_0)^2$, temos que o vértice $V = (x_0, y_0)$ é $(-3, 1)$.

8. A parábola $\mathcal{P}$ tem equação $\mathcal{P} : y = \pm\frac{1}{4p}x^2$. Como $(4, -2) \in \mathcal{P}$, devemos ter $\mathcal{P} : y = -\frac{x^2}{4p}$. Substituindo as coordenadas $(4, -2)$ na equação de $\mathcal{P}$, temos que $p = 2$. Assim, $\mathcal{P} : y = -\frac{x^2}{8}$. Essa parábola tem foco $F = (0, -2)$ e diretriz $d : y = 2$.

9. Como o eixo de simetria de $\mathcal{P}$ é paralelo a Ox, sua equação deve ser da forma $(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$, que se escreve como $\mathcal{P} : y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Substituindo as coordenadas dos pontos dados nessa equação, temos o sistema

$$\begin{cases} (3/2)D - E + F = & -1 \\ 5E + F = & -25 \\ -6D - 7E + F = & -49 \end{cases},$$

que tem solução $D = 8$, $E = -2$ e $F = -15$. Assim,

$$\mathcal{P} : y^2 + 8x - 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} : (y-1)^2 = -8(x - 2).$$

10. Uma reta paralela a reta r é da forma $r_b = 2x - y = b$. Como a reta tangencia a parábola, a interseção entre as duas curvas deve ser um único ponto. Assim o sistema

$$\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ 2x - y = b \end{cases}$$

tem uma única solução. Substituindo $y = 2x - b$ em $x^2 = y + 1$, temos a equação do segundo grau $x^2 - 2x + b - 1 = 0$. Impondo que o discriminante é igual a zero, temos $b = 2$. Logo, a reta tangente é $y = 2x - 2$ e o ponto de tangência é a solução do sistema, $(1, 0)$.

11. Uma reta pode ser escrita como $y - y_0 = a(x - x_0)$. Substituindo as coordenadas de P, as retas que passam por esse ponto são, portanto, $y = a(x - 5)$. Se uma dessas retas é tangente a $\mathcal{P}$, o sistema

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ y = a(x - 5) \end{cases}$$

deve ter uma única solução. Substituindo $y = a(x - 5)$ em $x = -y^2$, temos a equação do segundo grau $ay^2 + y + 5a = 0$, a qual deve ter discriminante $\Delta = 0$. Temos que

$$\Delta = 1 - 20a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{5}/10.$$

Assim, as retas são $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{10}(x - 5)$ e $y = \dfrac{\sqrt{5}}{10}(x - 5)$.

12. A parábola tem foco $F = (0, -4)$ e diretriz $d : y = 4$. A equação do círculo é $C : (x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2$. Como $F \in C$, temos $r = 5$. Assim, $C : (x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$. A interseção de C com d acontece em um único ponto. De fato, substituindo $y = 4$ na equação de C, chegamos a $x = 4$. Logo, a interseção acontece apenas no ponto $(4, 4)$. Segue que d tangencia C e $(4, 4)$ é o ponto de tangência.

13. Comparando quadrados

$$\begin{aligned} &10y^2 + 8x - 30y - 9 = 0 \\ &10(y^2 - 3y) + 8x - 9 = 0 \\ &10[(y - 3/2)^2 - 9/4] + 8x - 9 = 0 \\ &10(y - 3/2)^2 + 8x - 63/2 = 0 \\ &8x - 63/2 = -10(y - 3/2)^2 \\ &x - 63/16 = -5/4.(y - 3/2)^2. \end{aligned}$$

É a equação de uma parábola com diretriz paralela ao eixo Oy e concavidade voltada para a esquerda. O vértice é $V = (x_0, y_0) = (63/16, 3/2)$, o parâmetro $p = 1/5$, o foco é $F = (x_0 - p, y_0) = (299/80, 3/2)$ e a equação da diretriz $d : x = x_0 + p = 331/80$.

14. Os pontos B e C pertencem a parábola. Das medidas dos segmentos temos $B = (-5, 4)$ e $C = (5, 4)$. Substituindo as coordenadas dos pontos na equação temos

$$a = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16.$$

15. A equação $d(P, F) = d(P, Ox)$ equivale a $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y|$. Elevando ambos os lados da última igualdade ao quadrado, $x^2 + (y-2)^2 = y^2$, que simplificando fica $y = x^2/4 + 1$. Letra (b).

16. Por definição, os pontos da parábola são equidistantes do foco e da diretriz. A parábola está definida para $x \geq 1/2$. Para esses valores de x, elevando os dois lados da igualdade $y = \sqrt{2x - 1}$ ao quadrado temos $y^2 = 2x - 1$, que pode ser reescrito como

$$x - 1/2 = \frac{1}{2}y^2.$$

Essa parábola tem como diretriz o eixo Oy e tem concavidade voltada para direita. O foco é o ponto $(1, 0)$. Logo, a resposta é a letra (b).

17. a) A parábola tem forma geral $\pm 4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$, que pode ser escrita como $Ax^2 + Dx + y + F = 0$. Substituindo os pontos P_1, P_2 e P_3 temos o sistema

$$\begin{cases} F = & 0 \\ A + D + F = & -1 \\ 4A + 2D + F = & -6 \end{cases},$$

que tem solução $A = -2$, $D = 1$ e $F = 0$. Assim, a equação da parábola é $-2x^2 + x + y = 0$, isto é, $y = 2x^2 - x$.

b) Para encontrar outra parábola vamos considerar que o eixo de simetria é paralelo ao eixo das abscissas. Nesse caso a parábola tem equação $x - x_0 = \pm\frac{1}{4p}(y-y_0)^2$, que pode ser escrita como $Cy^2 + x + Ey + F = 0$. Substituindo os pontos temos como solução $C = 2/15$, $E = -17/15$ e $F = 0$. Assim, a parábola tem equação $x = \frac{-2}{15}y^2 + \frac{17}{15}y$.

18. As retas que tangenciam a parábola contém o ponto C, então têm equação $r_a : y + 4 = a(x-4)$. Como r_a tangencia a parábola, o sistema

$$\begin{cases} y = (x-4)^2 + 2 \\ y + 4 = a(x-4) \end{cases}$$

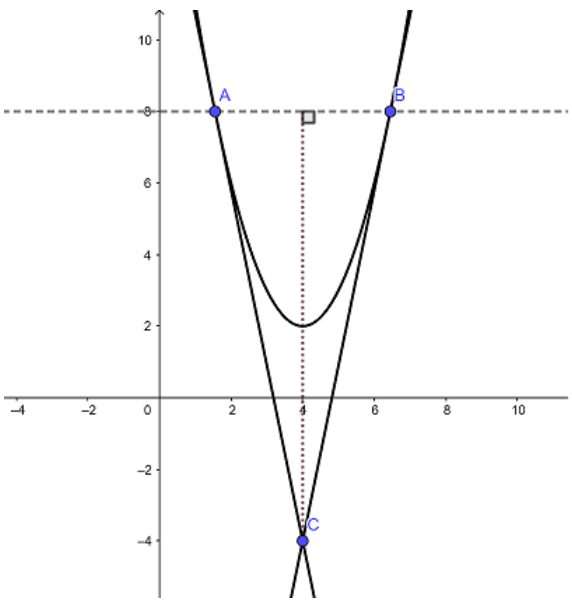
deve ter um único ponto como solução, que é o ponto de tangência. Temos

$$a(x-4) - 4 = (x-4)^2 + 2 \Rightarrow x^2 - (8+a)x + 4a + 22 = 0.$$

Como a solução do sistema é única, o discriminante da equação do segundo grau deve ser nulo.

$$\Delta = (8+a)^2 - 4(4a+22) = 0 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{6}.$$

As retas tangentes são $y = 2\sqrt{6}(x-4) - 4 = 2\sqrt{6}x - 8\sqrt{6} - 4$ e $y = -2\sqrt{6}(x-4) - 4 = -2\sqrt{6}x + 8\sqrt{6} - 4$.
As coordenadas x dos pontos de tangência são $x = (8+a)/2 = 4 \pm \sqrt{6}$. A ordenada é $y = (x-4)^2 + 2 = 8$. Assim os pontos de tangência são $(4-\sqrt{6}, 8)$ e $(4+\sqrt{6}, 8)$.
A reta determinada por A e B é a reta $r : y = 8$. A distância de C a r é $8 + 4 = 12$. Letra (c).



19. Seja $P = (x, y)$ um ponto do lugar geométrico. Note que se P pertence ao interior da circunferência $d(P,C) = 1 - |P| = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$. Se P não pertence ao interior, $d(P,C) = |P| - 1 = \sqrt{x^2+y^2} - 1$. Assim,

$$d(P,C) = d(P,Ox) \Leftrightarrow |1 - \sqrt{x^2+y^2}| = |y|.$$

Se $P \in int(C)$, isto é, se $x^2 + y^2 < 1$,

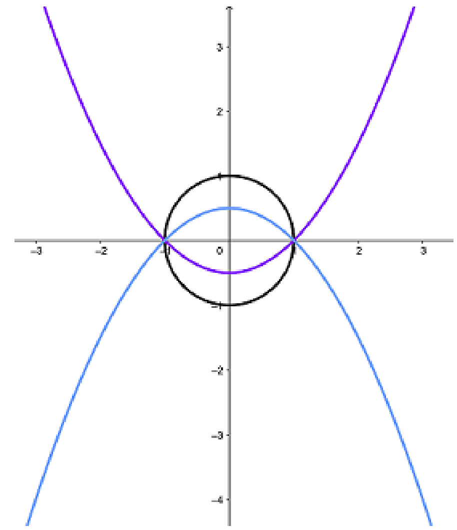
$$1 - \sqrt{x^2+y^2} = |y| \Rightarrow 1 - |y| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |y| = -x^2/2 + 1/2.$$

Se $P \notin int(C)$, isto é, se $x^2 + y^2 \geq 1$,

$$\sqrt{x^2+y^2} - 1 = |y| \Rightarrow 1 + |y| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |y| = x^2/2 - 1/2.$$

Assim, se ($y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \geq 1$) ou se ($y < 0$ e $x^2 + y^2 < 1$), então $y = x^2/2 - 1/2$. Se ($y \geq 0$ e $x^2 + y^2 < 1$) ou se ($y < 0$ e $x^2 + y^2 \geq 1$), então $y = -x^2/2 + 1/2$.

Em resumo, os pontos das parábolas $y = -x^2/2 + 1/2$ e $y = x^2/2 - 1/2$ são o lugar geométrico procurado.



Material elaborado por Lorena Bulhosa