Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Definições Básicas de Funções Polinomiais Complexas

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos
Definições Básicas de Funções Polinomiais Complexas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o grau de cada polinômio abaixo.

a) $P(x) = 3x^5 - 6x^4 + 2x + 3$.

b) $Q(x) = 7 + 2x - 4x^3$.

c) $R(x) = (2x^2 - 1)^5$.

d) $S(x) = 2ix^2 + 4ix - 2i$.

Exercício 2. Qual o valor de $m \in \mathbb{R}$, de modo que o polinômio $P(x) = (m+1)x^3 + 3x^2 - 2x = 8$ tenha grau 2?

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Exercício 3. Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4$. Determine:.

a) $P(0)$.

b) $P(1)$.

c) $P(i)$.

Exercício 4. Verifique quais dos números 1, 3, i e $1 + i$ são raízes de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Exercício 5. Determine a e b reais em $T(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 6$, sabendo que 2 é raiz de $T(x)$ e que $T(1) = -4$.

Exercício 6. Para que valores de k, pertencente ao conjunto dos números complexos, o polinômio $P(x) = (2k^2 + 50)x^3 - 2x^2 + x + 9$ tem grau 2?

Exercício 7. Qual o grau do polinômio $Q(x) = (x^4 - 2x^3 + 5x - 1)(x^3 + 7x - 2)$?

a) 3.

b) 4.

c) 7.

d) 12.

e) 15.

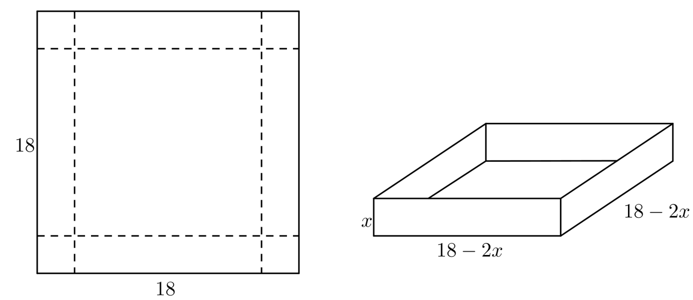
2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18 cm de lado e dobrando-se conforme a figura, obtém-se uma caixa retangular sem tampa. Supondo que a medida dos lados dos quadrados recortados seja x, determine:

a) O volume V da caixa em função do lado x dos quadrados recortados.

b) Os possíveis valores de x.

c) O volume da caixa para $x = 3cm$.



Exercício 9. Seja a função polinomial $P(x) = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 + 2x - 4$. Para que valores reais de m, a função tem grau:

a) 3.

b) 2.

c) 1.

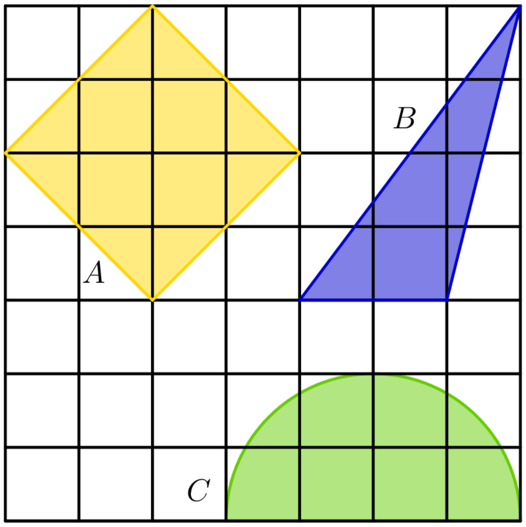
Exercício 10. O lucro de uma loja é dado por $L(x) = -100x^2 + 1400x - 4000$, na venda diária de x peças.

a) Se a loja vendeu 8 peças em um determinado dia, qual foi o lucro obtido?

b) Quantas peças devem ser vendidas para que não haja lucro nem prejuízo em determinado dia?

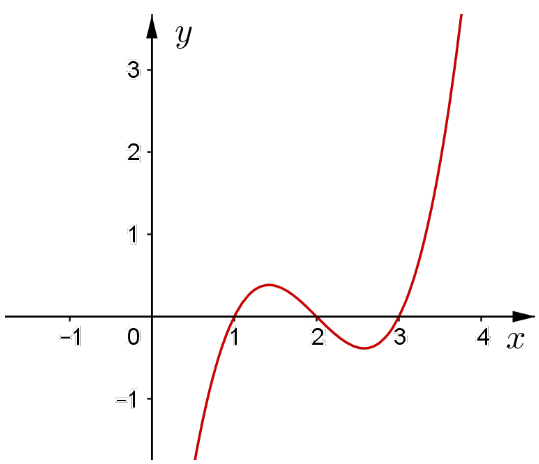
Exercício 11. Obtenha o polinômio do 2^o grau que tem $2i$ como uma de suas raízes e cuja soma dos coeficientes é igual a 5.

Exercício 12. No quadriculado abaixo, os lados dos quadradinhos medem x. Determine, em função de x, a área de cada figura geométrica.



Exercício 13. Determine o polinômio $P(x)$ de grau 3, tal que 1 seja raiz, $P(2) = 11$ e $P(3) = 35$, sendo 1 o valor do coeficiente de x^3.

Exercício 14. O gráfico abaixo corresponde ao polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 6$. Determine os valores de a, b e c.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Os polinômios $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ e $h(x)$, no conjunto dos complexos, nessa ordem, estão com seus graus em progressão geométrica. Os graus de $p(x)$ e $h(x)$ são, respectivamente, 16 e 2. A soma do número de raízes de $q(x)$ com o número de raízes de $f(x)$ é:

a) 24.

b) 16.

c) 12.

d) 8.

e) 4.

Exercício 16. A soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (x^4 + x^2 - x + 1)^n$ é 512. Determine o valor de n

Exercício 17. Sendo f, g e h polinômios de grau 4, 6 e 3, respectivamente, o grau de $(f + g) \cdot h$ será:

a) 9.

b) 10.

c) 12.

d) 18.

e) 30.

Exercício 18. Seja o polinômio $P(x) = 2x^4 - x^3 + 1$. O valor de $P(i^5)$ é:

a) $i + 3$.

b) $i - 3$.

c) $i - 2$.

d) i.

e) $2i$.

Exercício 19. Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a uma tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções:

$$V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3000 \text{ e } V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3000.$$

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo t igual a:

a) $1,3h$.

b) $1,69h$.

c) $10h$.

d) $13h$.

e) $16,9h$.

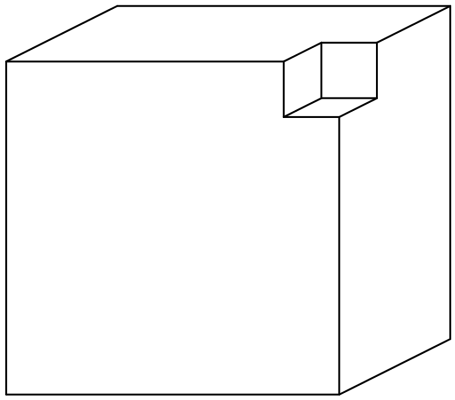
Exercício 20. Na figura, temos um cubo do qual foi extraído um cubo menor de um dos seus vértices. Retirando cubos iguais, de aresta x, com x em centímetros, de todos os vértices de um cubo cujas arestas medem 20 cm, determine:

a) O polinômio que representa o volume V do sólido após a retirada dos cubos dos vértices.

b) O volume para $x = 2$ cm.

c) O polinômio que representa a área A da superfície do sólido final.

d) O polinômio que representa o comprimento C das arestas do sólido final.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a) $G(P) = 5$.

b) $G(Q) = 3$.

c) $G(R) = 10$.

d) $G(S) = 2$.

2. Para $G(P) = 2$, o maior expoente de x deve ser 2. Assim, $m + 1 = 0$, segue que $m = -1$. Resposta B.

3.

a) $P(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 4 = 4$.

b) $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$.

c) $P(i) = i^3 - 2 \cdot i + 4 = -i - 2i + 4 = 4 - 3i$.

4. $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$.
$P(3) = 3^3 - 3^2 + 3 - 1 = 20$.
$P(i) = i^3 - i^2 + i - 1 = -i + 1 + i - 1 = 0$.
$P(1+i) = (1+i)^3 - (1+i)^2 + (1+i) - 1 = 1 + 3i - 3 - i - 1 - 2i + 1 + 1 + i - 1 = -2 + i$.
Portanto, apenas 1 e i são raízes de $P(x)$.

5. Como 2 é raiz e $T(1) = -4$, então:

$$\begin{cases} a \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 6 &= 0 \\ a \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 6 &= -4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a - 8 + 2b - 6 &= 0 \\ a - 2 + b - 6 &= -4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 2b &= 14 \\ a + b &= 4. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (-2) e somando à primeira, temos $a = 1$ e, consequentemente, $b = 3$.

6. Se $P(x)$ tem grau 2, então $2k^2 + 50 = 0$, segue que $k = -5i$ ou $k = 5i$.

7. C.

8. (Extraído da Vídeo Aula)

a) As dimensões da caixa são $(18 - 2x)$, $(18 - 2x)$ e x. Sendo assim, seu volume é:

$$\begin{aligned} V(x) &= (18 - 2x) \cdot (18 - 2x) \cdot x \\ &= (324 - 72x + 4x^2) \cdot x \\ &= 4x^3 - 72x^2 + 324x. \end{aligned}$$

b) As dimensões da caixa devem ser valores positivos, ou seja:

$$\begin{cases} 18 - 2x &> 0 \\ x &> 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &< 9 \\ x &> 0. \end{cases}$$

Fazendo a interseção das inequações, chegamos a $0 < x < 9$, podendo ser qualquer número real neste intervalo.

c) $V(3) = (18 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 12^2 \cdot 3 = 144 \cdot 3 = 432\ cm^3$.

9.

a) Para grau 3, devemos ter $m^2 - 1 \neq 0$, segue que $m \neq -1$ e $m \neq 1$. Fazendo $m = -1$ e $m = 1$, ajuda-nos a responder os próximos itens.

b) $m = -1$.

c) $m = 1$.

10. (Extraído da Vídeo Aula)

a) $L(8) = -100 \cdot 8^2 + 1400 \cdot 8 - 4000 = -6400 + 11200 - 4000 = 800$ reais.

b) Neste caso o lucro deve ser igual a zero, então $-100x^2 + 1400x - 4000 = x^2 - 14x + 40 = 0$, segue que $x_1 = 4$ e $x_2 = 10$. Então, para estes dois valores não haveria lucro ou prejuízo.

11. Podemos escrever um polinômio de grau 2 como $P(x) = ax^2 + bx + c$. Temos que:

$$\begin{aligned} P(2i) &= 0 \\ a(2i)^2 + b(2i) + c &= 0 \\ -4a + 2bi + c &= 0 \\ (-4a + c) + 2bi &= 0. \end{aligned}$$

Como chegamos a um número complexo nulo, então $-4a + c = 0$ (sua parte real) e $2b = 0$ (sua parte imaginária), segue que $b = 0$. Além disso, a soma dos coeficientes é 5. Temos então:

$$\begin{cases} -4a + c &= 0 \\ a + c &= 5. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $a = 1$ e $c = 4$. Portanto, o referido polinômio é $P(x) = x^2 + 4$.

12.

a) Olhando para a figura A como um losango, pois também é quadrado, retângulo e paralelogramo, temos $A_A = \dfrac{4x \cdot 4x}{2} = 8x^2$.

b) $A_B = \dfrac{2x \cdot 4x}{2} = 4x^2$.

c) $A_C = \dfrac{\pi(2x)^2}{2} = 2\pi x^2$.

13. Podemos escrever o polinômio como $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Como $P(1) = 0$, $P(2) = 11$ e $P(3) = 36$, então:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ 8 + 4a + 2b + c = 11 \\ 27 + 9a + 3b + c = 36. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 9. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação das outras duas, obtemos:

$$\begin{cases} 3a + b = 4 \\ 8a + 2b = 10. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2 e somando o resultado à segunda, chegamos $2a = 2$, segue que $a = 1$ e, consequentemente, $b = 1$ e $c = -3$. Portanto, $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

14. Como as raízes são 1, 2 e 3, temos:

$$\begin{cases} a + b + c - 6 = 0 \\ 8a + 4b + 2c - 6 = 0 \\ 27a + 9b + 3c - 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 8a + 4b + 2c = 6 \\ 27a + 9b + 3c = 6. \end{cases}$$

Usando a primeira equação para eliminar c nas outras duas, ficamos com:

$$\begin{cases} 6a + 2b = -6 \\ 24a + 6b = -12. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $6a = 6$, segue que $a = 1$ e, consequentemente, $b = -6$ e $c = 11$.

15. (Extraído da PUC - RJ - 2017) Vamos calcular o valor de a e b na progressão geométrica $(16, a, b, 2)$, que são, respectivamente, os graus dos polinômios $q(x)$ e $f(x)$. Como se trata de uma PG, temos $2 = 16 \cdot q^3$, segue que $q = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $a = 8$ e $b = 4$. O número de raízes de um polinômio é igual ao seu grau, assim $G(q) + G(f) = 8 + 4 = 12$. Resposta C.

16. Fazendo $x = 1$, cada termo de um polinômio tem o mesmo valor de seu coeficiente. Assim, a soma dos coeficientes de $P(x)$ é igual a $(1^4 + 1^2 - 1 + 1)^n = 512$, segue que $n = 9$.

17. (Extraído da UEL - PR) Na soma de polinômios, o grau resultante é igual ao maior grau dos polinômios, enquanto que no produto de polinômios, o grau resultante é a soma dos graus. Temos então $G((f + g) \cdot h) = 6 + 3 = 9$. Resposta A.

18. (Extraído da Mackenzie - SP) Temos:

$$\begin{aligned} P(i^5) &= 2(i^5)^4 - (i^5)^3 + 1 \\ &= 2 \cdot i^{20} - i^{15} + 1 \\ &= 2 \cdot i^0 - i^3 + 1 \\ &= 2 - (-i) + 1 \\ &= 3 + i. \end{aligned}$$

Resposta A.

19. (Extraído do ENEM) Se o volume é o mesmo, temos:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= V_2(t) \\ 250t^3 - 100t + 3000 &= 150t^3 + 69t + 3000 \\ 100t^3 - 169t &= 0 \\ t(100t^2 - 169) &= 0 \\ t_1 &= 0 \\ t_2 &= \frac{13}{10} \\ t_3 &= -\frac{13}{10}. \end{aligned}$$

Portanto, além de $t = 0$ para volumes iguais, temos também $t = 1,3$. Resposta A.

20.

a) O cubo inicial tem volume igual a $20^3 = 8000\ cm^3$. O volume de cada cubo retirado (8 ao todo) é x^3. Portanto, temos $V(x) = 8000 - 8x^3$, para $x \in \mathbb{R}$, tal que $0 < x < 10$.

b) $V(2) = 8000 - 8 \cdot 8 = 7936\ cm^3$.

c) Observe que a área de cada face retirada é igual a área de cada face gerada. Portanto, a área final é igual à área inicial, ou seja, $A(x) = 6 \cdot 20^2 = 2400\ cm^2$.

d) Ocorre com o comprimento das arestas o mesmo que ocorre com as áreas, ou seja, não se altera após a retirada dos cubos. Assim $C(x) = 12 \cdot 20 = 240\ cm$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com