Estudo de Triângulos - Teorema de Menelaus e Relação de Stewart

Relação de Stewart

9° ano E.F.

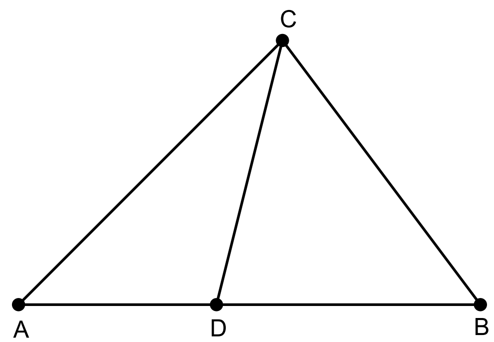
Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Estudo de Triângulos - Teorema de Menelaus e Relação de Stewart
Relação de Stewart

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Na figura, a medida do segmento CD, sendo $AD = 4$, $BD = 6$, $BC = 7$ e $AC = 8$, é:



a) $\sqrt{31}$.

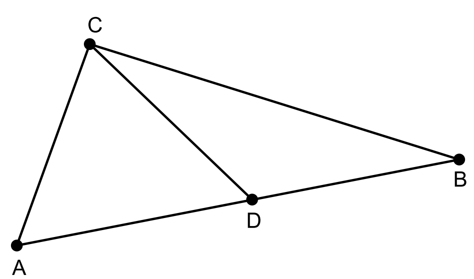
b) $\sqrt{34}$.

c) $\sqrt{37}$.

d) $\sqrt{41}$.

e) $\sqrt{43}$.

Exercício 2. Na figura, o triângulo ACD é equilátero e o triângulo CBD é isósceles de base $BC = 12$. A medida AC é:



a) $2\sqrt{3}$.

b) $3\sqrt{3}$.

c) $4\sqrt{3}$.

d) $5\sqrt{3}$.

e) $6\sqrt{3}$.

Exercício 3. Seja o triângulo retângulo em A, com $AB = 6$ e $AC = 8$, a medida da mediana BD, com D sobre o lado AC, é:

a) $\sqrt{13}$.

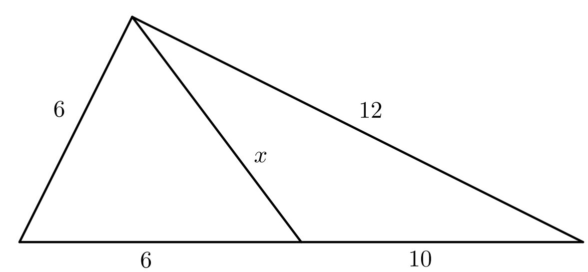
b) $2\sqrt{13}$.

c) $3\sqrt{13}$.

d) $4\sqrt{13}$.

e) $5\sqrt{13}$.

Exercício 4. Determine o valor de x, que é a medida da ceviana no triângulo abaixo.



Exercício 5. Determine a medida da ceviana AD de um triângulo equilátero ABC, cuja medida do lado é 6 cm, sendo D um ponto do lado BC, tal que $BD = 2$ cm.

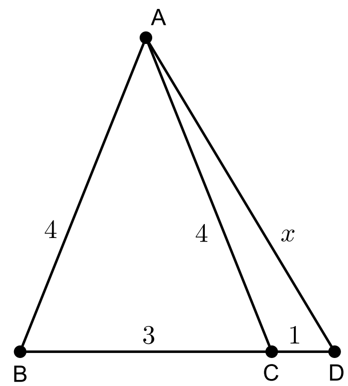
Exercício 6. Utilize a relação de Stewart para calcular a mediana de um triângulo equilátero cujo lado mede ℓ.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. No triângulo ABC, sendo $AB = 6$, $AC = 7$ e $BC = 8$, determine a medida do segmento AD, cuja reta suporte é a bissetriz interna relativa ao ângulo $\angle BAC$ e o ponto D é pertencente ao lado BC.

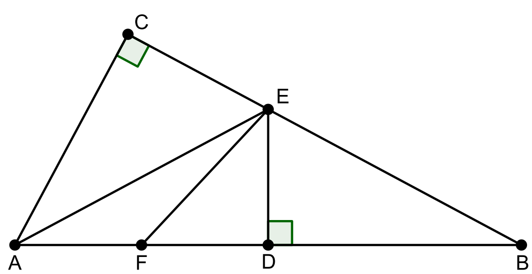
Exercício 8. No triângulo ABC, retângulo em A, traça-se o segmento BD, sendo D o ponto médio da mediana AM. Se $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm e $BC = 10$ cm, determine a medida de BD.

Exercício 9. Determine o valor de x na figura abaixo.



Exercício 10. Seja o triângulo ABC, no qual $AB = AC = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $M \in AC$ tal que $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{1}{2}$. Determine BM.

Exercício 11. No triângulo ABC, retângulo em A, com $AC = 6$, $AB = 10$ e $BC = 8$, D é ponto médio de AB e F é ponto médio de AD. Determine EF.

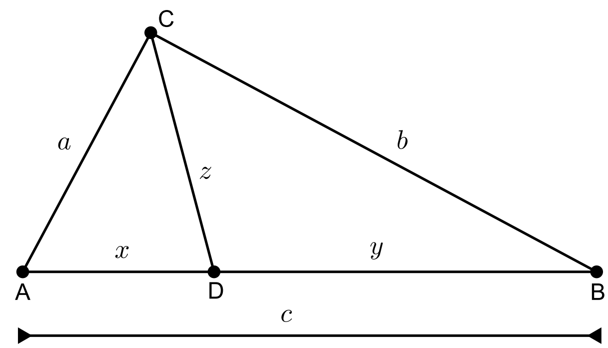


Exercício 12. Seja um triângulo equilátero ABC de lado medindo 8 cm. Prolongando-se o lado AB até o ponto D, de forma que $BD = 6$ cm. Determine CD.

Exercício 13. No quadrado $ABCD$, de medida do lado igual a 6 cm, marca-se o ponto E sobre a diagonal AC, tal que $AE = 2CE$. Determine BE.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Utilize o triângulo abaixo para mostrar a relação de Stewart.



Exercício 15. Utilize a relação de Stewart para mostrar que a mediana, relativa à hipotenusa, de um triângulo retângulo mede a metade da medida da hipotenusa.

Exercício 16. No hexágono regular $ABCDEF$ de lado ℓ, marca-se o ponto médio G do lado BC. Determine a medida do segmento FG.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. Aplicando relação de Stewart no triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} AC^2 \cdot BD + BC^2 \cdot AD &= CD^2 \cdot AB + AD \cdot BD \cdot AB \\ 8^2 \cdot 6 + 7^2 \cdot 4 &= CD^2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 \cdot 10 \\ 384 + 196 &= 10CD^2 + 240 \\ 10CD^2 &= 340 \\ CD &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Resposta B.

2. Fazendo $AC = AD = CD = BD = x > 0$, temos, pela relação de Stewart:

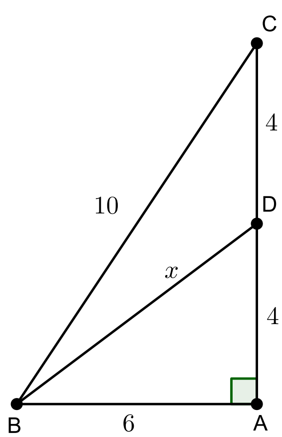
$$\begin{aligned} AC^2 \cdot BD + BC^2 \cdot AD &= CD^2 \cdot AB + AD \cdot BD \cdot AB \\ x^2 \cdot x + 12^2 \cdot x &= x^2 \cdot 2x + x \cdot x \cdot 2x \\ x^3 + 144x &= 2x^3 + 2x^3 \\ 3x^3 &= 144x \\ x^2 &= 48 \\ x &= 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Resposta C.

3. Pelo teorema de Pitágoras, $BC = 10$. Aplicando a relação de Stewart, com $BD = x$, temos:

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot CD + BC^2 \cdot AD &= BD^2 \cdot AC + AD \cdot CD \cdot AC \\ 6^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 4 &= x^2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 8 \\ 144 + 400 &= 8x^2 + 128 \\ 8x^2 &= 416 \\ x^2 &= 52 \\ x &= 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Resposta B.

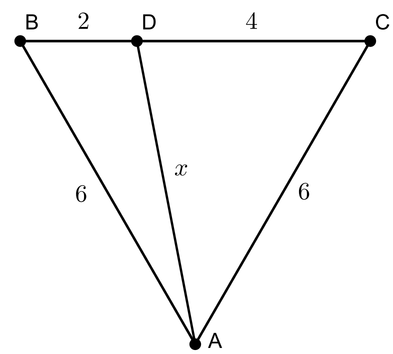


4. (Extraído da Vídeo Aula) Aplicando a relação de Stewart, temos:

$$\begin{aligned} 6^2 \cdot 10 + 12^2 \cdot 6 &= x^2 \cdot 16 + 6 \cdot 10 \cdot 16 \\ 360 + 864 &= 16x^2 + 960 \\ 16x^2 &= 264 \\ x^2 &= \frac{33}{2} \\ x &= \frac{\sqrt{66}}{2}. \end{aligned}$$

5. Aplicando a relação de Stewart, com $AD = x$, em centímetros, chegamos a:

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD &= AD^2 \cdot BC + CD \cdot BD \cdot BC \\ 6^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 2 &= x^2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 6 \\ 144 + 72 &= 6x^2 + 48 \\ 6x^2 &= 168 \\ x^2 &= 28 \\ x &= 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

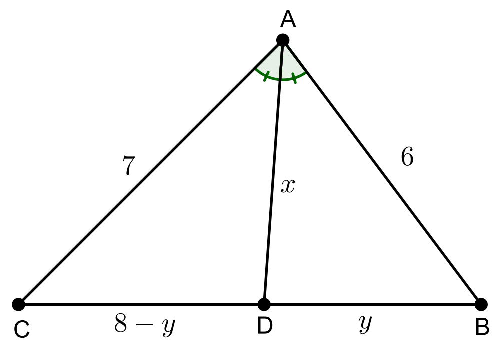


6. Seja m a medida da mediana, temos:

$$\begin{aligned} \ell^2 \cdot \frac{\ell}{2} + \ell^2 \cdot \frac{\ell}{2} &= m^2 \cdot \ell + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \ell \\ \ell^3 &= \ell m^2 + \frac{\ell^3}{4} \\ m^2 &= \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \\ m^2 &= \frac{3\ell^2}{4} \\ m &= \frac{\ell\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

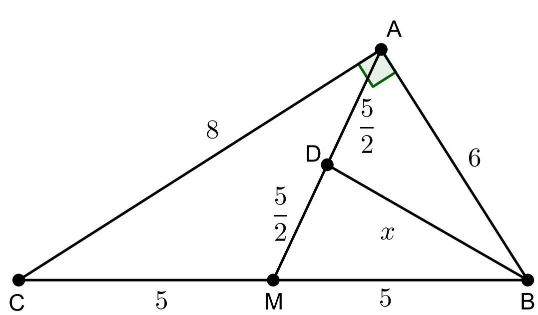
7. Fazendo $BD = y$ e, consequentemente, $CD = 8 - y$, temos, pelo teorema da bissetriz interna, $\dfrac{8-y}{7} = \dfrac{y}{6}$, donde $y = \dfrac{48}{13}$. Agora, aplicando a relação de Stewart, temos:

$$
\begin{aligned}
AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD &= AD^2 \cdot BC + CD \cdot BD \cdot BC \\
6^2 \cdot \frac{56}{13} + 7^2 \cdot \frac{48}{13} &= x^2 \cdot 8 + \frac{56}{13} \cdot \frac{48}{13} \cdot 8 \\
26.208 + 30.576 &= 1.352x^2 + 21.504 \\
1.352x^2 &= 35.280 \\
x^2 &= \frac{4.410}{169} \\
x &= \frac{21\sqrt{10}}{13}.
\end{aligned}
$$



8. Como a mediana, relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, mede a metade da medida da hipotenusa, então $AM = 5$. Além disso, $AD = DM = \frac{5}{2}$, pois D é ponto médio de AM. Aplicando, agora, a relação de Stewart no triângulo ABM, com $BD = x$, temos:

$$
\begin{aligned}
AB^2 \cdot DM + BM^2 \cdot AD &= BD^2 \cdot AM + AD \cdot DM \cdot AM \\
6^2 \cdot \frac{5}{2} + 5^2 \cdot \frac{5}{2} &= x^2 \cdot 5 + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 \\
360 + 250 &= 20x^2 + 125 \\
20x^2 &= 485 \\
x^2 &= \frac{97}{4} \\
x &= \frac{\sqrt{97}}{2}.
\end{aligned}
$$

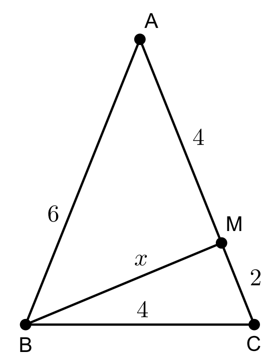


9. (Extraído da Vídeo Aula) Temos, pela relação de Stewart:

$$
\begin{aligned}
AB^2 \cdot CD + AD^2 \cdot BC &= AC^2 \cdot BD + BC \cdot CD \cdot BD \\
4^2 \cdot 1 + x^2 \cdot 3 &= 4^2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 4 \\
3x^2 &= 60 \\
x^2 &= 20 \\
x &= 2\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

10. (Extraído da Vídeo Aula) Como $\frac{MC}{MA} = \frac{1}{2}$ e $AC = 6\ cm$, então $CM = 2\ cm$ e $AM = 4\ cm$. Aplicando agora a relação de Stewart, com $BM = x$, temos:

$$
\begin{aligned}
AB^2 \cdot CM + BC^2 \cdot AM &= BM^2 \cdot AC + CM \cdot AM \cdot AC \\
6^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 4 &= x^2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \\
6x^2 &= 88 \\
x^2 &= \frac{44}{3} \\
x &= \frac{2\sqrt{33}}{3} cm.
\end{aligned}
$$

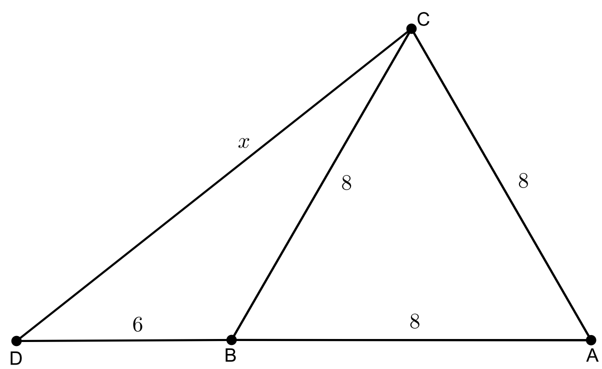


11. Como os triângulo BDE e BCA são semelhantes (caso AA), temos $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{AC}$, donde $DE = \frac{15}{4}$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ADE, chegamos a $AE = \frac{25}{4}$. Vamos agora calcular EF, mediana do triângulo ADE, aplicando a relação de Stewart neste triângulo.

$$
\begin{aligned}
AE^2 \cdot FD + DE^2 \cdot AF &= EF^2 \cdot AD + AF \cdot DF \cdot AD \\
\left(\frac{25}{4}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{15}{4}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} &= EF^2 \cdot 5 + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 \\
EF^2 &= \frac{650}{32} \\
EF^2 &= \frac{325}{16} \\
EF &= \frac{5\sqrt{13}}{4}.
\end{aligned}
$$

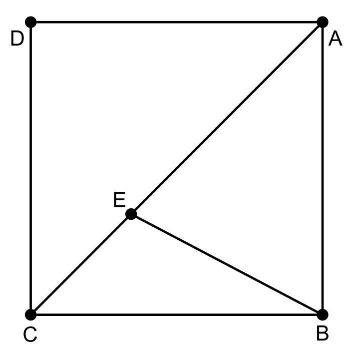
12. Aplicando a relação de Stewart, com $CD = x$, temos:

$$\begin{aligned} CD^2 \cdot AB + AC^2 \cdot BD &= BC^2 \cdot AD + BD \cdot AB \cdot AD \\ x^2 \cdot 8 + 8^2 \cdot 6 &= 8^2 \cdot 14 + 6 \cdot 8 \cdot 14 \\ x^2 &= 148 \\ x &= 2\sqrt{37}cm. \end{aligned}$$



13. Como a medida do lado do quadrado é 6 cm, então sua diagonal mede $6\sqrt{2}$ cm e, consequentemente, $AE = 4\sqrt{2}$ cm e $CE = 2\sqrt{2}$ cm. Aplicando agora a relação de Stewart, no triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} BC^2 \cdot AE + AB^2 \cdot CE &= BE^2 \cdot AC + AE \cdot CE \cdot AC \\ 6^2 \cdot 6\sqrt{2} + 4^2 \cdot 2\sqrt{2} &= BE^2 \cdot 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \\ 6BE^2 &= 120 \\ BE &= 2\sqrt{5}cm. \end{aligned}$$



14. Fazendo $\angle BAC = \alpha$, temos, pela lei dos cossenos nos triângulos ABC e ACD:

$$\begin{cases} b^2 = c^2 + a^2 - 2a\cos\alpha \\ z^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos\alpha \end{cases}$$

Isolando $\cos\alpha$ em ambas, obtemos:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos\alpha = \dfrac{a^2 + x^2 - z^2}{2ax} \end{cases}$$

Igualando as equações, temos:

$$\begin{aligned} a^2c + x^2c - z^2c &= a^2x + c^2x - b^2x \\ a^2(c - x) + b^2x &= z^2c + c^2x - x^2c \\ a^2y + b^2x &= z^2c + cx(c - x) \\ a^2y + b^2x &= z^2c + cxy. \end{aligned}$$

15. Tomando o triângulo retângulo de catetos medindo b e c, hipotenusa medindo a e mediana relativa à hipotenusa medindo m, temos, aplicando a relação de Stewart:

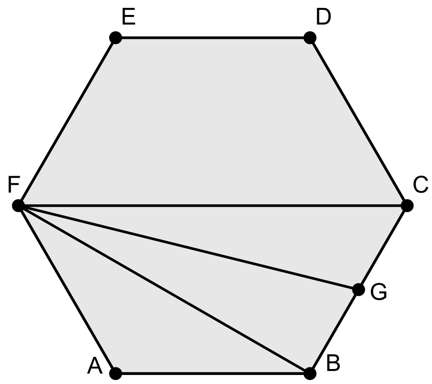
$$\begin{aligned} b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} &= m^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \\ \frac{a}{2}\left(b^2 + c^2\right) &= am^2 + \frac{a^3}{4} \\ \frac{a}{2} \cdot a^2 &= am^2 + \frac{a^3}{4} \\ am^2 &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{4} \\ m^2 &= \frac{a^2}{4} \\ m &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

16. A diagonal CF mede o equivalente a duas alturas de um triângulo equilátero de lado ℓ, ou seja, $CF = \ell\sqrt{3}$. O hexágono é regular e por isso é inscritível. Com isso, vamos aplicar o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABCF$, sendo $AC = BF = y$:

$$\begin{aligned} AC \cdot BF &= AB \cdot CF + BC \cdot AF \\ y \cdot y &= \ell \cdot \ell\sqrt{3} + \ell \cdot \ell \\ y^2 &= \ell^2\left(\sqrt{3} + 1\right) \\ y &= \ell\sqrt{\sqrt{3} + 1}. \end{aligned}$$

Aplicando agora a relação de Stewart ao triângulo BCF, temos:

$$\begin{aligned} \left(\ell\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} + \left(\ell\sqrt{\sqrt{3} + 1}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} &= FG^2 \cdot \ell + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \ell \\ 6\ell^3 + 2\ell^3\left(\sqrt{3} + 1\right) &= 4FG^2 \cdot \ell + \ell^3 \\ 4FG^2 &= 5\ell^2 + 2\ell^2\left(\sqrt{3} + 1\right) \\ 4FG^2 &= \ell^2\left(2\sqrt{3} + 7\right) \\ FG &= \frac{\ell\sqrt{2\sqrt{3} + 7}}{2}. \end{aligned}$$



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com