Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Injetividade e Sobrejetividade

Tópicos Adicionais

Portal da Matemática
OBMEP

Injetividade e Sobrejetividade

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Sejam as funções

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=2x. \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x)=x+5. \end{array}$$

É fácil perceber que ambas são bijetivas. Determine:

a) $f(4)$.

b) $f(-2)$.

c) $f^{-1}(4)$.

d) $f\circ g(2)$.

e) $g\circ f(2)$.

f) $f\circ f(3)$.

g) $f^{-1}(x)$.

h) $g^{-1}(x)$.

i) $f\circ g(x)$.

j) $g\circ f(x)$.

k) $f\circ f(x)$.

l) $f\circ f^{-1}(x)$.

Exercício 2. Construa o gráfico das seguintes funções, determine o conjunto imagem e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a)

$$\begin{array}{rcl} f:\{1,2,3,4\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & f(x)=2x. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} f:\{1,2,3,4\} & \rightarrow & \{2,4,6,8\} \\ x & \rightarrow & f(x)=2x. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & f(x)=2x. \end{array}$$

Exercício 3. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a)

$$\begin{array}{rcl} f:\{1,2,3,4\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=3x-4. \end{array}$$

b)

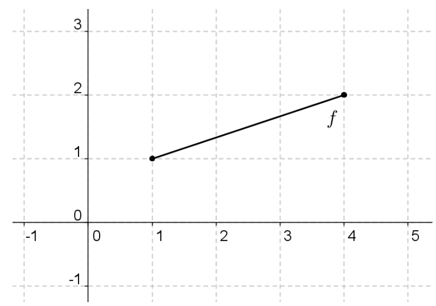
$$\begin{array}{rcl} f:\{1,2,3,4\} & \rightarrow & \{-1,2,5,8\} \\ x & \longmapsto & f(x)=3x-4. \end{array}$$

c)

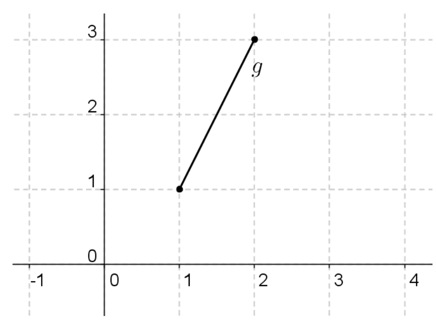
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=3x-4. \end{array}$$

Exercício 4. Analise as funções abaixo e classifique-as em injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

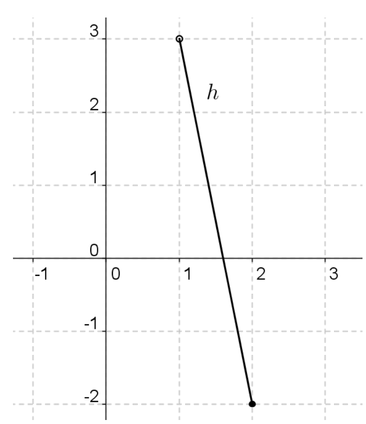
a) $f:[1,1]\rightarrow[4,2]$.



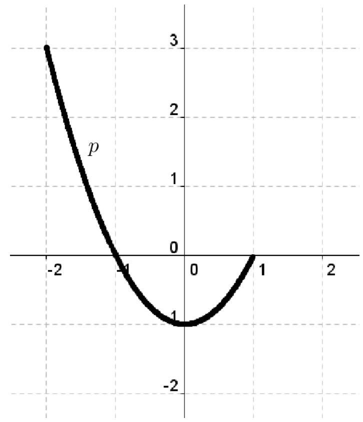
b) $g:[1,2]\rightarrow\mathbb{R}$.



c) $h:(1,2]\rightarrow[-2,3]$.



d) $p:[-2,1]\rightarrow[-1,4]$.



Exercício 5. Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes. Se a população inicial $(t = 0)$ é 1024 e após 10 anos seja a metade da inicial, determine:

a) os valores de a e b.

b) o tempo mínimo para que a população se reduza a $1/8$ da população inicial.

c) se essa função é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

Exercício 6. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a)

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4\} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4\} &\to \{1, 4, 9, 16\} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $g(x) = 3x - 2$ e $f \circ g(x) = 6x + 1$. Determine

a) $f(4)$.

b) $f(x)$.

Exercício 8. Seja f um função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, bijetiva tal que $f(x + 3) = 2x - 1$. Determine $f^{-1}(x)$.

Exercício 9. Seja f um função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, bijetiva tal que $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$. Determine $f^{-1}(1)$.

Exercício 10. Considere o trinômio de segundo grau $p(x) = x^2 - x + 1$.

(a) Determine o número de soluções reais distintas da equação $p(x^2) = x^2$.

(b) Determine o número de soluções reais distintas da equação $p \circ p(x) = p(x)$.

Exercício 11.

Exercício 12. Uma função real de variável real f é tal que $f(1/2) = \sqrt{a}$, sendo a um número real positivo, e $f(x + 1) = x \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine $f(7/2)$.

Exercício 13. Seja a função $f(x) = \dfrac{x - 2}{1 + x}$, de A em B, bijetora. Determine sua inversa.

Exercício 14. Seja uma função f, de A e B, sendo A e B conjuntos que possibilitem a composição de f com ela mesma. Se $f(x) = \dfrac{x + 3}{1 - x}$, determine $f(f(x))$.

Exercício 15. Seja $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$. Determine o valor de $f^{36}(9)$ onde f^k indica a composição sucessiva de k funções f. Por exemplo $f^3(x) = f \circ f \circ f(x)$.

Exercício 16. Seja $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{5x + 1}{x - 3}$. Determine o valor de k de modo que sua inversa seja dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{3y + 1}{y - k}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Sejam A e B subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$ e $f : A \to B$, $g : B \to A$ duas funções tais que $f \circ g = Id_B$, onde Id_B é a função identidade em B. Então podemos afirmar que:

a) f é sobrejetora.

b) f é injetora.

c) f é bijetora.

d) g é injetora e par.

e) g é bijetora e ímpar.

Exercício 18. Seja a função $f : \mathbb{R} - 2 \to \mathbb{R} - 3$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2} + 1$ Sobre a sua inversa podemos garantir que:

a) não está definida pois f não é injetora.

b) não está definida pois f não é sobrejetora.

c) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{y-3}$, $y \neq 3$.

d) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y+5}{y-3} - 1$, $y \neq 3$.

e) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{2y-5}{y-3}$, $y \neq 3$.

Exercício 19. Seja n um inteiro positivo ímpar e sejam $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ números reais distintos. Encontre todas as funções bijetivas

$$f : \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \to \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

tais que

$$|f(x_1) - x_1| = |f(x_2) - x_2| = \dots = |f(x_n) - x_n|.$$

Exercício 20. Suponha que existem funções injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Mostre que existe uma bijeção entre A e B.

Exercício 21. Sejam m e n inteiros maiores que 1. Seja S um conjunto com n elementos, e sejam $A_1, A_2, \dots, A_m$ suconjuntos de S. Assuma que para quaisquer dois elementos x e y em S, existe um conjunto A_i tal que ou x está em A_i e y não está em A_i ou x não está em A_i e y está em A_i. Prove que $n \leq 2^m$.

Exercício 22. Sejam n e k inteiros positivos tais que $n^k > (k+1)!$. Considere o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) | x_i \in \{1, 2, \dots, n\}, i = 1, 2, \dots, k\}$$

Suponha que A é um subconjunto de M com $(k+1)! + 1$ elementos. Prove que existem $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ em A tais que $(k+1)!$ divide $(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)\dots(\alpha_n - \beta_n)$.

Respostas e Soluções.

1.

a) $f(4) = 2 \cdot 4 = 8$.

b) $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

c) $f^{-1}(4) = 2$, pois, fazendo $f(x) = 4$, temos $x = 2$.

d) $f \circ g(2) = 14$, pois $g(2) = 7$, daí $f(g(2)) = f(7) = 14$.

e) $g \circ f(2) = 9$, pois $f(2) = 4$, então $g(f(2)) = g(4) = 9$.

f) $f \circ f(3) = 12$, pois $f(3) = 6$, daí $f(f(3)) = f(6) = 12$.

g) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$, pois $x = \dfrac{f(x)}{2}$.

h) $g^{-1}(x) = x - 5$, pois $x = g(x) - 5$.

i) $f \circ g(x) = 2g(x) = 2(x+5) = 2x + 10$.

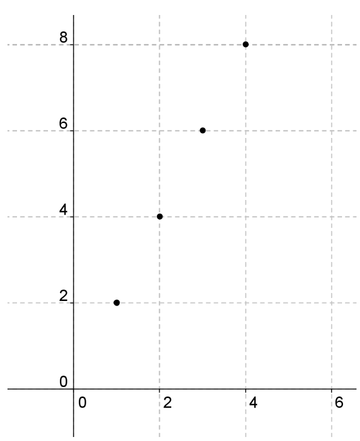
j) $g \circ f(x) = f(x) + 5 = 2x + 5$.

k) $f \circ f(x) = 2f(x) = 2 \cdot 2x = 4x$.

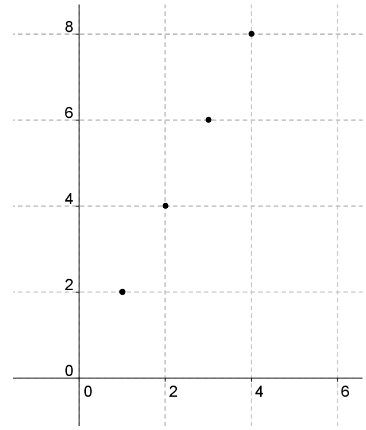
l) $f \circ f^{-1}(x) = 2 \cdot \dfrac{x}{2} = x$.

2.

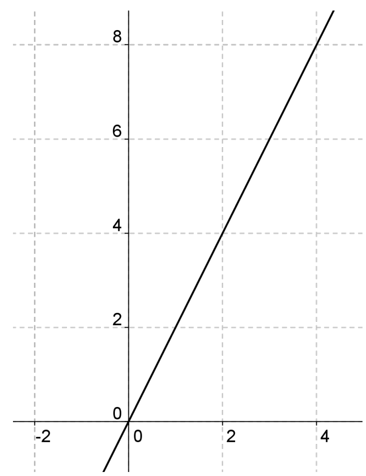
a) $Im = \{2, 4, 6, 8\}$. Função injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, mas não sobrejetiva pois o contradomínio $\mathbb{R}$ é diferente da $Im = \{2, 4, 6, 8\}$.



b) $Im = \{2, 4, 6, 8\}$. Função injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Função sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.

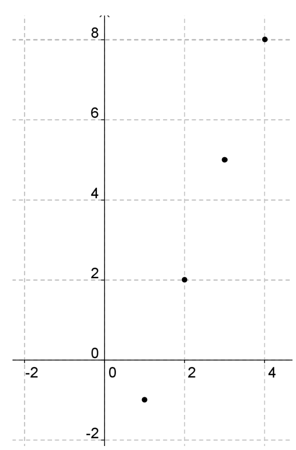


c) Função injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Função sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.

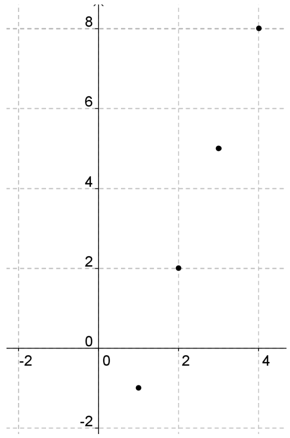


3.

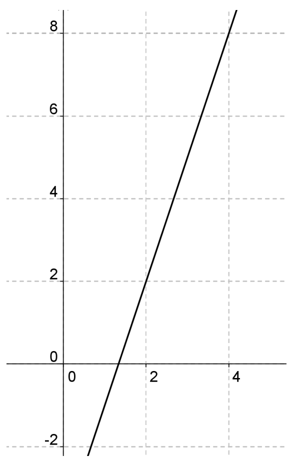
a) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



b) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.



c) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.



4.

a) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.

b) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

c) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

d) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, p é bijetiva.

5.

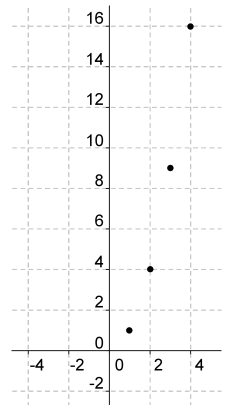
a) $a \cdot 2^{-b \cdot 0} = 1024$, donde temos $a = 1024$. Depois de 10 anos, ficamos com $1024 \cdot 2^{-10b} = 512$, que simplificando, chegamos a $b = 1/10$.

b) $1024 \cdot 2^{-t} = 128$, donde temos $t = 7$ anos.

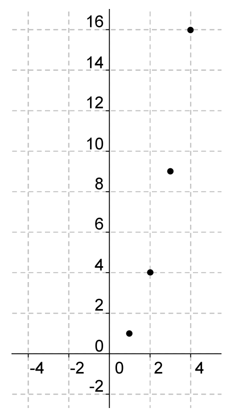
c) Como a população é decrescente, mas nunca negativa, iniciando em 1024, a função não pode ser sobrejetiva, pois $CD \neq Im$. Agora, se tomarmos $f(t_1) = f(t_2)$, temos que $1024 \cdot 2^{-t_1/10} = 1024 \cdot 2^{-t_2/10}$, o que implica em $t_1 = t_2$, ou seja, a função f é injetiva.

6.

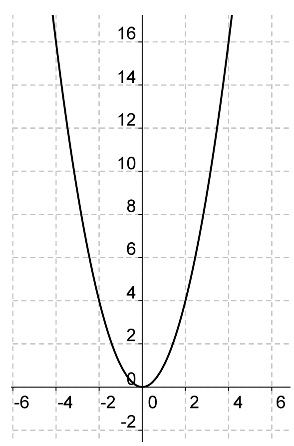
a) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



b) Injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Sobrejetiva, pois $Im = CD$. Assim, f é bijetiva.



c) Nem sobrejetiva, nem injetiva.



7.

a) Se queremos $f(4)$, devemos ter $g(x) = 4$, sendo que isso ocorre para $x = 2$. Portanto, temos $f(4) = f(g(2)) = 6 \cdot 2 + 1 = 13$.

b) Se $f(g(x)) = f(3x-2) = 6x+1$, então fazendo $x = \dfrac{k+2}{3}$,temos $f(k) = 6 \cdot \dfrac{k+2}{3} + 1 = 2k+5$, ou seja, $f(x) = 2x+5$.

8. Substituindo x por $k-3$, temos $f(k-3+3) = 2(k-3) - 1$, ou seja, $f(k) = 2k-7$. Temos então que $f(x) = 2x-7$. Como queremos a inversa, basta isolar x, ou seja, $x = \dfrac{f(x)+7}{2}$. Concluímos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{2}$.

9. A inversa de $f-1(x) = (x-2)^3$. Assim,

$$f-1(1) = (1-2)^3 = -1.$$

10. (Extraído da OBM − 2014)

(a)

$$\begin{aligned} p(x^2) &= x^2 \\ (x^2)^2 - (x^2) + 1 &= x^2 \\ (x^2-1)^2 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1. \end{aligned}$$

Teremos então que o número de soluções reais distintas é 2.

(b) Seja $p(x) = y$. Queremos determinar as raízes de $p(y) = y$, ou seja, $y^2 - y + 1 = y \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0$. Devemos ter $y = 1$ e consequentemente $x^2 - x + 1 = 1$, que implica em raízes 0 e 1, ou seja, duas soluções reais distintas.

12. Inicialmente, fazendo $x = 1/2$, temos

$$f\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Agora, com $x = 3/2$, ficamos com

$$f\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{a}}{4}.$$

Por fim, seguindo para $x = 5/2$, chegaremos a

$$f\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{a}}{8},$$

ou seja, $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{15\sqrt{a}}{8}$.

13.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-2}{1+x} \\ y + yx &= x - 2 \\ yx - x &= -y - 2 \\ x(y-1) &= -y-2 \\ x &= \frac{y+2}{1-y}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$.

14.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{f(x)+3}{1-f(x)} \\ &= \frac{x+3}{1-x} \\ &= \frac{\frac{x+3}{1-x}+3}{1-\frac{x+3}{1-x}} \\ &= \frac{\frac{-2x+6}{1-x}}{\frac{-2x-2}{1-x}} \\ &= \frac{-2(x-3)}{-2(x+1)} \\ &= \frac{(x-3)}{(x+1)}. \end{aligned}$$

15. Temos $f \circ f(x) = -\dfrac{1-x}{x}$ e $f \circ f \circ f(x) = f(-\dfrac{1-x}{x}) = x$. Portanto a cada três interados a função retoma o seu valor incial e assim $f^{36}(9) = 9$.

16. Temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{5x+1}{x-3} \\ xy - 3y &= 5x + 1 \\ x &= \frac{3y+1}{y-5}. \end{aligned}$$

Portanto, $k = 5$.

17. (Extraído do Vestibular do ITA) A resposta correta é a letra A. Para ver que f é sobrejetora, considere qualquer $b \in B$. Então

$$b = Id_B(b) = f(g(b)).$$

Portanto, b é um elemento da imagem de f e, assim, podemos concluir que a imagem de f é o conjunto B. Para ver que os demais itens são falsos, considere as seguintes funções: $f : \{-1,1\} \to \{1\}$, $g : \{1\} \to \{-1,1\}$ com $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1$.

18. (Extraído do Vestibular do ITA) Suponha que $f(x) = y$. Como $y \neq 3$, temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-3}{x-2} + 1 \\ y - 3 &= \frac{1}{x-2} \\ x - 2 &= \frac{1}{y-3} \\ x &= \frac{2y-5}{y-3}. \end{aligned}$$

Então a inversa está definida e seu valor é $f^{-1}(y) = \dfrac{2y-5}{y-3}$, para $y \neq 3$. Resposta correta na letra E.

19. Seja $c = |f(x_i) - x_i|$. Como $f(x_i) = x_\pm c$, somando todas essas equações obtemos

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \pm c \pm c + \ldots \pm c.$$

Sendo f uma bijeção, podemos concluir que

$$\pm c \pm c + \ldots \pm c = 0$$

Dado que n é ímpar, isso só é possível se $c = 0$, ou seja, $f(x_i) = x_i$ e a função é a identidade.

20. (Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder) Dado $x \in B$, podemos construir uma sequência $(x_i)_{i \geq 0}$ de pré-imagens associadas às duas funções da seguinte forma:

1) Para i ímpar, $x_{i+1} = f^{-1}(x_i)$ se $x_i \in f(A)$

2) Para i par, $x_{i+1} = g^{-1}(x_i)$ se $x_i \in g(B)$

Tal sequência pode ser infinita, parar em um elemento de B ou parar em um elemento de A, para cada um desses casos, coloquemos x nos conjuntos C_∞, C_B e C_A, respectivamente. Isso define uma partição do conjunto B. Analogamente podemos definir uma partição de $A = D_\infty \bigcup D_A \bigcup D_B$. Defina a função $h : A \to B$, por:

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) &\text{ se } x \in D_\infty \bigcup D_A \\ h(x) = g^{-1}(x) &\text{ se } x \in D_B. \end{aligned}$$

Essa é a bijeção procurada.

21. Vamos associar a cada elemento de S uma m-upla de 0's e 1'1 do seguinte modo:

$$i \to (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

com $a_j = 1$ se $i \in A_j$ e 0 caso contrário. O conjunto de todas as m-uplas de 0's e 1's tem 2^m elementos. Pelo enunciado a aplicação acima é injetiva, logo, $n \leq 2^m$.

22. Considere a função

$$f : A \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$$

que associa para cada k-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ a k-upla de restos $(x_1 \pmod 2, x_2 \pmod 3, \ldots, x_k \pmod{k+1})$. Como A possui mais que $(k+1)!$ elementos, f não é injetiva e portanto existem α e β com mesma imagem. Eles satisfazem o desejado pelo enunciado.

ELABORADO POR TIAGO MIRANDA E CLEBER ASSIS
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
contato@cursoarquimedes.com