Probabilidade – Miscelânea de Exercícios

Cálculo de probabilidades 2

2^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Probabilidade – Miscelânea de Exercícios
Cálculo de probabilidades 2

Exercício 1. Em uma urna há 72 bolas idênticas mas com cores diferentes. Há bolas brancas, vermelhas e pretas. Ao sortearmos uma bola da urna, a probabilidade de ela ser branca é $1/4$ e a probabilidade de ela ser vermelha é $1/3$. Qual a diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas na urna?

Exercício 2. Um dado não equilibrado tem probabilidade dos seus resultados 1, 2, 3, 4, 5 e 6 na proporção direta com razão $1:2:3:4:5:6$. Qual a probabilidade de, com dois lançamentos sucessivos, a soma encontrada ser igual a 7?

Exercício 3. Dois dados são jogados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma igual a 10 nas faces de cima?

Exercício 4. Em uma caixa, existem 10 bolas vermelhas numeradas de 1 a 10 e também 10 bolas verdes numeradas de 1 a 10.

a) Ivonete retira uma bola da caixa. Qual a probabilidade de que a bola retirada seja uma de número 3?

b) Marcos retira duas bolas da caixa. Qual a probabilidade de ele obter 2 bolas com o mesmo número?

c) Joana retira uma bola da caixa. Qual a probabilidade de que a bola retirada seja uma verde com um número par?

Exercício 5. Uma equipe de futebol joga sempre com três jogadores no meio de campo, sem posições e atribuições definidas. Como os sete meios-de-campo do elenco jogam com a mesma eficiência, o treinador escala esse setor do time através de sorteio. Nessas condições, qual é a probabilidade do meio-campista mais jovem do elenco jogar a final do campeonato?

Exercício 6. Numa urna são depositadas n etiquetas numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade dos números sorteados serem consecutivos?

Exercício 7. Calcule a probabilidade de que um número escolhido aleatoriamente, sendo este positivo e divisor de 10^{99}, seja um número inteiro múltiplo de 10^{88}.

Exercício 8. Existem dois tipos de anos bissextos: aqueles que são múltiplos de 4, mas não são de 100 e aqueles que são múltiplos de 400. Por exemplo, serão anos bissextos 2024, 2052 e 2400; não serão anos bissextos 2038, 2075 e 2100. Baseado na convenção acima, se escolhermos aleatoriamente um ano entre 2014 e 2413 (incluindo esses dois anos), qual a probabilidade do ano ser bissexto?

Exercício 9. Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

Exercício 10. Num dado não equilibrado com faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6 cujas faces opostas soma 7, a probabilidade de obter a face F é maior que $1/6$, a probabilidade de obter a respectiva face oposta é menor que $1/6$ e a probabilidade de obter as outras faces é $1/6$. Quando dois desses dados são rolados, a probabilidade de obtermos a soma sete é igual a $47/288$. Qual o valor de F?

Exercício 11. Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 9 rosas das quais 5 tem espinhos e o vaso B contém 8 rosas sendo que exatamente 6 não tem espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B. Qual a probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos?

Exercício 12. Uma urna contém cinco cartões, numerados de 1 a 5. Retira-se sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões da urna e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos. Qual é a probabilidade de esse número ser divisível por 4?

Exercício 13. Quatro dados não-viciados são jogados. Qual é a probabilidade que o produto dos números que aparecem nas faces superiores dos dados seja 36?

Exercício 14. Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma; quando sai coroa, ele avança duas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

Exercício 15. Um jogo é composto das seguintes regras:

I) Um dado não-viciado é jogados;

II) Se sair o número 3, então o jogador A ganha;

III) Se sair um dos números dentre 4, 5 ou 6, então o jogador B ganha; e

IV) Se sair um dos números dentre 1 ou 2, o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.

Qual a probabilidade do jogador 2 vencer?

Exercício 16. Se um método de fertilização in vitro tiver 30% de chance de sucesso a cada tentativa, pode-se estimar, usando $\log_{10} 7 = 0,85$, qual o número mínimo de tentativas para se ter uma probabilidade de sucesso superior a 90%?

Exercício 17. Jogando-se quatro vezes um dado comum de seis faces, não viciado, qual a probabilidade de obtermos um resultado maior ou igual a 5 apenas na quarta jogada?

Exercício 18. João faz parte de um grupo de 10 pessoas. Desse grupo, três pessoas são sorteadas em uma premiação. Qual é a probabilidade de João ter sido sorteado?

Exercício 19. Considere o conjunto A de todas as combinações simples de 10 elementos em grupos de 5. Duas combinações distintas são escolhidas ao acaso no conjunto A. Determine as probabilidades de que elas:

a) não tenham nenhum elemento em comum;

b) tenham exatamente 4 elementos em comum.

Exercício 20. A Loteca (antiga Loteria Esportiva) é ideal para você que entende de futebol e adora dar palpites sobre os resultados das partidas. Para apostar, basta marcar o seu palpite para cada um dos 14 jogos do concurso, assinalando uma das três colunas, duas delas (duplo) ou três (triplo). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal. A aposta mínima é de R$ 2,00 e dá direito a um duplo.

Fonte:
http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/loteca/

Visando motivar os apostadores, a Caixa Econômica aprovou a ampliação de 13 para 16 do número de jogos de cada teste da Loteria Esportiva (atual Loteca), a partir de março de 87, com prêmios para os que acertarem 15 ou 16 dos prognósticos. A reação de um amigo foi: Se já era difícil acertar 13, quanto mais 15 ou 16! Mostre, por meio do cálculo de probabilidades, que este amigo está certo quanto aos 16, mas não quanto aos 15.

Exercício 21. Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

Exercício 22. Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces equiprováveis numeradas de 1 a 6). Calcule a probabilidade de que a soma dos 10 resultados seja igual a 20.

Exercício 23. Joãozinho joga repetidamente uma moeda comum e honesta. Quando a moeda dá cara ele ganha 1 ponto, quando dá coroa ele ganha 2 pontos. Encontre a probabilidade (em função de n) de que Joãozinho em algum momento tenha exatamente n pontos.

Exercício 24. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo baralharam as 52 cartas de um baralho e distribuíram 13 cartas para cada um. Arnaldo ficou surpreso: "Que estranho, não tenho carta de espadas." Qual a probabilidade de Bernardo também não ter cartas de espadas?

Exercício 25. No programa de auditório Toto Bola, o apresentador Ciço Magallanes dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da platéia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. Qual a máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro?

Exercício 26. Uma caixa contém algumas bolas vermelhas e algumas bolas pretas. A probabilidade de escolher ao acaso duas bolas de mesma cor é $\frac{1}{2}$. Prove que a quantidade de bolas na caixa é um número quadrado perfeito.

Exercício 27. Duas pessoas marcam um encontro no Farol da Barra, combinando o seguinte:

- cada qual chega à praça num momento escolhido ao acaso entre meio-dia e à uma hora da tarde; e
- nenhum deles espera mais de 15 minutos pelo outro.

Qual a probabilidade que eles realmente se encontrem?

Exercício 28. Na loteria de Truchilândia, cada bilhete tem um número de três algarismos que usa somente os algarismos 1, 2, 3 (é permitido repetir os dígitos). Um bilhete é ganhador se coincide em pelo menos duas posições com o número sorteado.

a) Qual é a probabilidade de que um apostador, que comprou um único bilhete, ganhe o prêmio?

b) Você decide comprar 3 bilhetes. Que bilhetes você escolheria de modo a maximizar sua probabilidade de ganhar o prêmio?

c) Qual é o número mínimo de bilhetes que você precisa comprar para ter certeza que você ganhará o prêmio?

Exercício 29. Numa reserva ecológica há nove cangurus que são ou prateados ou dourados. Quando três desses cangurus se encontram ao acaso, a probabilidade de que nenhum deles seja prateado é igual a dois terços. Quantos deles são dourados?

Exercício 30. Amanda tem um dado comum, com os pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 em suas faces. Bruna tem um dado estranho, com os pontos 2, 2, 2, 5, 5 e 5 em suas faces. Elas combinam lançar os dois dados simultaneamente e quem tirar a maior pontuação é a vencedora. Caso os números sejam iguais, ninguém vence. Qual é a probabilidade de Bruna vencer?

Exercício 31. Em um bosque, um caçador prepara diariamente 10 armadilhas para capturar lebres. Contando com muitos anos de experiência o caçador sabe que a probabilidade diária de apanhar uma lebre em qualquer uma das armadilhas é de $0,4$, sendo que cada armadilha captura, no máximo,uma lebre por dia. Admitindo-se que o bosque seja suficientemente grande, de tal forma que uma armadilha não interfira na atuação da demais, calcule, em percentagem, a chance de o caçador capturar exatamente 5 lebres em um mesmo dia. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

Exercício 32. Marcos e Hugo lançam vários dados para decidir quem saltará primeiro na piscina com água gelada. Se não sair nenhum seis, Marcos saltará primeiro. Se sair somente um seis, então Hugo irá saltar primeiro e se houver mais de um seis, então ninguém irá nadar. Quantos dados eles devem jogar, de modo a garantir que a chance de saltar primeiro seja a mesma para os dois amigos?

Exercício 33. Dois jogadores se enfrentam em uma batalha de War, o Jogo da Estratégia. O atacante lança três dados e o defensor, dois. O atacante conquistará o território do defensor em apenas um lance de dados se, e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas:

i) o maior dado do atacante for maior do que o maior dado do defensor; e

ii) o segundo maior dado do atacante for maior do que o segundo maior dado do defensor (convencionamos que o "segundo maior dado" pode ser igual ao maior dado, caso dois ou mais dados empatem no maior valor).

Calcule a probabilidade de o atacante conquistar o território com o defensor tirando:

a) 2 cincos.

b) 1 cinco e 1 quatro.

Respostas e Soluções.

1. (FGV − 2014 [*modificado*])
O universo é igual a 72 bolas. Com as probabilidades dadas, podemos concluir que há $72 \cdot \frac{1}{4} = 18$ bolas brancas e a $72 \cdot \frac{1}{3} = 24$ bolas vermelhas. Sendo assim, há $72 - 18 - 24 = 30$ pretas e a diferença pedida é igual a $30 - 16 = 12$.

2. (Estados Unidos)
Seja x a probabilidade do resultado dar 1. Assim, as probabilidades dos outros resultados em ordem crescente são $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ e $6x$, respectivamente. A soma das probabilidades deve dar 1, então

$$\begin{aligned} x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x &= 1 \\ 21x &= 1 \\ x &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

O que gera $P(1) = \frac{1}{21}$, $P(2) = \frac{2}{21}$, $P(3) = \frac{3}{21}$, $P(4) = \frac{4}{21}$, $P(5) = \frac{5}{21}$ e $P(6) = \frac{6}{21}$. Agora, os possíveis resultados que geram soma sete são: $(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)$.
Por fim, somando todas as probabilidades temos:

$$P = \frac{1}{21} \cdot \frac{6}{21} + \frac{2}{21} \cdot \frac{5}{21} + \frac{3}{21} \cdot \frac{4}{21} + \frac{4}{21} \cdot \frac{3}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{1}{21}$$

que fica $P = \frac{8}{63}$.

3. (PUC(RS) − 2014 [*modificado*])
Observe a tabela abaixo na qual os primeiros números de cada coluna e linha indicam o resultado do lançamento dos dados e os resultados nas interseções são as somas desses números. Existem 36 resultados totais no lançamento de dois dados.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Como há 3 resultados favoráveis, então a probabilidade será de $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

4. (PUC(RJ) − 2013)
Observe que há 10 bolas de cada cor, totalizando 20.

a) como há duas bolas com número 3, ficaremos com a probabilidade igual a $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

b) não importa qual será o número na primeira bola retirada por Marcos, o problema está em repetir esse número na segunda tirada, que dá uma probabilidade igual a $\frac{1}{19}$.

c) São 5 bolas verdes com números pares, então a probabilidade será igual a $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

5. (UNCISAL(AL) − 2015 [*modificado*])
Encontraremos o valor desejado através da probabilidade complementar. A probabilidade do mais novo não jogar é igual a $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{7}$. Sendo assim, a probabilidade dele jogar é igual a $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

6. (Portal da Matemática da OBMEP)
Temos que o $|U| = C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$. Agora perceba que os consecutivos são as $n-2$ triplas ordenadas $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $\ldots$, $(n-2, n-1, n)$. A probabilidade procurada é

$$P = \frac{n-2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} = \frac{6}{n(n-1)}$$

7. (IMO Training)
A probabilidade pedida é $P = \frac{|\{multiplos(10^{88}) \cap \{divisores(10^{99})\}|}{|\{divisores(10^{99})\}|}$. Observe que $10^{99} = 2^{99} \cdot 5^{99}$, portanto o número de divisores dele é igual a

$$(99+1)(99+1) = 10^4.$$

Um múltiplo de 10^{88} é da forma $10^{88} \cdot d$. Para que ele seja um divisor de 10^{99}, devemos ter

$$\frac{10^{99}}{10^{88} \cdot d} = \frac{10^{11}}{d} \in \mathbb{Z}.$$

Agora, como $10^{11} = 5^{11} \times 2^{11}$, concluímos que existem $(11+1)(11+1) = 144$ valores possíveis para d. Por fim chegamos a

$$P = \frac{144}{10^4} = \frac{9}{625}.$$

8. (PROFMAT – 2015)
De 2014 a 2413 temos um total de 400 anos. Neste intervalo temos anos bissextos de 4 em 4 anos, exceto nos anos de 2100, 2200 e 2300. Logo temos 97 anos bissextos. Portanto a probabilidade de um ano ser bissexto, entre 2014 a 2413, é igual a $\dfrac{97}{400}$.

9. (OBM [*modificado*])
Inicialmente, observe que todos os alunos têm a mesma probabilidade de serem sorteados. Como o ocorrido temos duas situações, a saber:

i) a probabilidade do número de Pedro ter se perdido é igual a $\dfrac{1}{30}$ e caso isso tenha acontecido a probabilidade dele ganhar é igual a 0; e

ii) a probabilidade do número de Pedro NÃO ter se perdido é igual a $\dfrac{29}{30}$ e assim a probabilidade dele ganhar é igual a $\dfrac{1}{29}$.

Por fim, ficamos a probabilidade da união desses casos

$$\frac{1}{30}\cdot 0+\frac{29}{30}\cdot\frac{1}{29}=\frac{1}{30}.$$

10. (AIME [*modificado*])
As probabilidades das faces são $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{6}$,$\dfrac{1}{6}+x$ e $\dfrac{1}{6}-x$. Assim, a soma sete tem probabilidade

$$\begin{aligned} 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{6}+x\right)\left(\frac{1}{6}-x\right) &= \frac{47}{288}\\ 32-16\cdot(6x-1)(6x+1) &= 47\\ x &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Como $F>\dfrac{1}{6}$, então $F=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{5}{24}$.

11. (AFA – 2016)
Podemos ter duas situação, a saber:

i) retirar do vaso A um rosa sem espinho e colocá-la na B e em depois retirar uma rosa com espinho de B, a probabilidade para isso será igual a

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8+1}=\frac{8}{81};\text{ e}$$

ii) retirar do vaso A um rosa com espinho e colocá-la na B e em depois retirar uma rosa com espinho de B, a probabilidade para isso será igual a

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{2+1}{8+1}=\frac{15}{81}.$$

Por fim, a probabilidade pedida será $P=\dfrac{8}{81}+\dfrac{15}{81}=\dfrac{23}{81}$.

12. (PROFMAT – 2014)
O total de números distintos que podem ser formados é $5!=120$. Para que um número seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Assim, com os algarismos de 1 a 5, temos 12, 24, 32, 52 que são divisíveis por 4. Fixados os dois últimos algarismos, temos 3! números distintos. Assim, a probabilidade solicitada é $\dfrac{4\cdot 3!}{5!}=\dfrac{1}{5}$.

13. (Olimpíada Holandesa)
Quatro dados podem gerar 6^4 resultados dispostos. Os quatro fatores para o produto ser igual a 36 são:

i) $\{1,1,6,6\}$, obtido de $P^4_{2,2}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ formas;

ii) $\{1,2,3,6\}$, obtido de $P^4=4!=24$ formas;

iii) $\{1,3,3,4\}$, obtido de $P^4_{2,2}=\dfrac{4!}{2!}=12$ formas; e

iv) $\{2,2,3,3\}$, obtido de $P^4_{2,2}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ formas.

Por fim, a probabilidade pedida será igual a

$$\frac{6+24+12+6}{6^4}=\frac{1}{27}.$$

14. (OBMEP [*modificado*])
Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras, a saber:

i) (cara, cara, cara) cuja probabilidade será igual a $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$;

ii) (cara, cara, coroa) cuja probabilidade será igual a $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$;

iii) (cara, coroa) cuja probabilidade será igual a $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$;

iv) (coroa, cara) cuja probabilidade será igual a $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$; e

v) (coroa, coroa) cuja probabilidade será igual a $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

Apenas os itens ii, iii e v terminam em **coroa**. Como as alternativas são mutuamente exclusivas ("regra do ou"), devemos somá-las para obter a probabilidade desejada que é igual

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

15.
Seja $P_i(n)$ a probabilidade do jogador n, $n \in \{A, B\}$ vencer na rodada i, com i inteiro positivo, e $P_i(\overline{n})$ a probabilidade do jogador n não vencer na rodada i. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
P_1(B) &= \frac{3}{6}=\frac{1}{2},\\
P_2(B) &= P_1(\overline{B})\cdot P_2(B)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},\\
P_3(B) &= P_1(\overline{B})\cdot P_2(\overline{B})\cdot P_3(2)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\\
&\vdots\\
P_n(B) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por fim, a probabilidade do jogador 2 vencer será igual a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

16.
Se, em uma tentativa, a chance de sucesso é 30%, então o erro ocorre com 70%. Por tanto, a probabilidade de dar *totalmente* errado depois de n tentativas é $0,7^n$ e a chance de algum dar certo é igual a $1-(0,7)^n$. Assim, podemos construir a inequação com o que questão pede

$$\begin{aligned}
1-0,7^n &> 0,9\\
0,7^n &< 0,1\\
\log 0,7^n &< \log 0,1\\
n\cdot\log 0,7 &< \log 0,1\\
n &> \frac{\log 0,1}{\log 0,7}\\
n &> \frac{\log 0,1}{\log 7+\log 0,1}=\frac{-1}{0,85-1}=\frac{100}{15}\cong 6,66.
\end{aligned}$$

Logo, o menor número de tentativas deve ser 7.

17. (PROFMAT – 2015)
A probabilidade de obter um resultado maior ou igual a 5 é $\frac{2}{6}$, logo, a probabilidade de seu complementar é $\frac{4}{6}$ (a cada lançamento). A probabilidade de ocorrer o valor maior do que ou igual a 5 apenas na quarta jogada significa que nos três lançamentos anteriores, não ocorreu tal resultado. Assim, como cada arremesso de dados é independente dos demais, temos

$$P=\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{8}{81}.$$

18. (PROFMAT – 2014)
Seja $P(J_i)$ a probabilidade de João ser sorteado para a vaga i, $i \in \{1,2,3\}$ e considerando todo sorteio equiprovável, então a

i) $P(J_1)=\frac{1}{10}$ e $P(\overline{J_1})=\frac{9}{10}$;

ii) $P(J_2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$ e $P(\overline{J_2})=\frac{9}{10}$; e

iii) $P(J_3)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$.

Assim, unindo os possíveis eventos, temos que ele pode ter sido sorteado em qualquer uma das vagas para vencer. Daí, chegamos a

$$\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=3\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{10}.$$

19. (RPM 33)
Vamos observar inicialmente que o conjunto A tem $\binom{10}{5}=252$ elementos.

a) Sorteada a primeira combinação, existe apenas uma outra combinação com cinco elementos disjunta com a inicial, logo a probabilidade é $\frac{1}{251}$.

b) Após o primeiro sorteio, há $\binom{5}{4}=5$ quartetos possíveis usando os cinco elementos do conjunto encontrado e 5 elementos que não estão nesse grupo podem compor a última vaga. Assim, a probabilidade é $\frac{5\cdot 5}{251}=\frac{25}{251}$.

20. (RPM 9)
Vamos supor que cada uma das três colunas de cada jogo tenha a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, não há times favoritos, e efetuar os cálculos para a aposta mínima permitida, isto é, apenas um duplo. Vamos separar o problema em duas partes e começar fazendo a comparação de acertos completos de 16 em 16 e 13 em 13 jogos.

i) Parte I: acertar tudo.

- A probabilidade de acertar 16 "previsões" é igual a $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{15} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3^{16}}$.
- Com 13 jogos, a probabilidade de acertar todos (com um duplo) é $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{13} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3^{13}} = \dfrac{2 \cdot 3^3}{3^{13} \cdot 3^3} = \dfrac{54}{3^{16}}$.

Aqui concluímos que acertar 16 de 16 é mais difícil que acertar 13 de 13.

ii) Parte II: acertar 15 de 16. O que pode ser alcançado de duas formas:

- com um erro em jogo simples (como são 15 desse tipo, basta incluir esse fator na probabilidade), ficamos com $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{14} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 15 = \dfrac{60}{3^{16}}$.
- com um erro no jogo duplo, o que gera $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{15} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3^{16}}$.

Daí, o acerto de 15 dos 16 jogos tem probabilidade igual a $\dfrac{60}{3^{16}} + \dfrac{1}{3^{16}} = \dfrac{61}{3^{16}} > \dfrac{54}{3^{16}}$, e finalizamos que acertar 15 de 16 é mais provável que acertar 13 de 13.

21. (OBM)
A probabilidade de, com n dados, tirar exatamente um dois é

$$P_n = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Se acrescentarmos mais um dado, chegamos a

$$P_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{(n+1)-1}.$$

Queremos saber inicialmente quando $P_n > P_{n+1}$. Veja que

$$\begin{aligned}
P_n &> P_{n+1} \\
n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} &> (n+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{(n+1)-1} \\
6n &> 5(n+1) \\
n &> 5.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < P_5 = P_6 > P_7 > P_8 \dots$$

Consequentemente $P_5 = P_6$ produz o máximo e devem ser lançados 5 ou 6 dados.

22. O universo dos resultados é 6^{10}. As $10 - uplas$ que resolvem o problema são soluções inteiras da equação $A_1 + A_2 + \cdots + A_{10} = 20$, com $1 \le A_i \le 6$. Podemos ajustar essa equação fazendo $A_i = a_i + 1$, com $0 \le a_i \le 5$ e analisar a equação $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 10$, com $\dbinom{10+9}{9} = \dbinom{19}{9}$ soluções inteiras. Mas é possível ter $A_i \ge 7$, nesse caso apenas um deles pode passar desse limite pois caso contrário o resultado mínimo deveria ser

$$7 + 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 22 > 20.$$

Então, temos 10 possibilidades para o A_i que será maior que 6, destaquemos por exemplo o $A_1 \ge 7$ e façamos $A_1 = \alpha + 6$, assim a equação fica $\alpha + A_2 + \cdots + A_{10} = 14$ que, de modo análogo ao inicial, possui $\dbinom{4+9}{9} = \dbinom{13}{9}$ soluções inteiras. Por fim, a probabilidade será igual a $\dfrac{\binom{19}{9} - 10 \cdot \binom{13}{9}}{6^{10}}$.

23. Seja p_n a probabilidade em questão. De início, sabemos que $p_0 = 1$ e $p_1 = \dfrac{1}{2}$. É claro que, a probabilidade de ele nunca ter n pontos é $1 - p_n$. Além disso, para que ele nunca obtenha n pontos, ele deve tirar uma coroa (mais 2 pontos) na rodada com $n - 1$ pontos. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
1 - p_n &= p_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \\
\frac{2}{3} - p_n &= p_{n-1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
\frac{2}{3} - p_n &= \frac{1}{2}\left(p_{n-1} - \frac{2}{3}\right) \\
p_n - \frac{2}{3} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(p_{n-1} - \frac{2}{3}\right) \\
p_n - \frac{2}{3} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(p_0 - \frac{2}{3}\right) \\
p_n &= \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

24. (OBM)
O baralho tem 52 cartas, mas como 13 já foram verificadas, nosso universos se reduz para as outras 39. Os casos possíveis são em número de $\dbinom{39}{13}$. Os casos sem cartas de espada estão contidas nas 26 cartas dos outros naipes e a quantidade de escolhas é $\dbinom{26}{13}$. Por fim, a

probabilidade pedida é

$$\frac{\binom{26}{13}}{\binom{39}{13}} = \frac{\frac{26!}{13!\cdot 13!}}{\frac{39!}{26!\cdot 13!}} = \frac{26!\cdot 26!}{39!\cdot 13!}.$$

25. (OBM [*modificado*])
Seja $P(a,b)$ a probabilidade de o voluntário ganhar o carro no caso em que ele tenha colocado a bolas VERDES e b bolas VERMELHAS na caixa 1. Então, necessariamente haverá $(10–a)$ bolas VERDES e $(10–b)$ bolas VERMELHAS na caixa 2. Segue que

$$P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a-b}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a+b \le 10$, já que as caixas são idênticas. Suponha, ainda, que haja alguma bola VERMELHA na caixa 1. Vejamos o que acontece com essa probabilidade se transferirmos uma bola VERDE da caixa 2 para a caixa 1 e uma bola VERMELHA da caixa 1 para a caixa 2. Ficamos com

$$P(a+1,b-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9-a}{20-a-b}.$$

Dessa forma,

$$P(a+1,b-1) - P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{20-a-b}\right)$$

é não negativo pois $a+b \le 10$.
Assim, o voluntário sabe que, enquanto houver bola VERMELHA na caixa que contém menos bolas, a probabilidade pode ser aumentada, bastando, para isto, que ele troque uma das bolas VERMELHAS desta caixa com uma VERDE da outra. Por isso, para maximizarmos a probabilidade, basta considerarmos o caso em que a caixa 1 contém apenas bolas VERDES e a caixa 2 contém o restante das bolas. Teremos

$$P(a,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a}.$$

Daí, a probabilidade será máxima quando a for mínimo. Como em cada caixa deve haver pelo menos uma bola, devemos ter $a=1$. Neste caso, a probabilidade é:

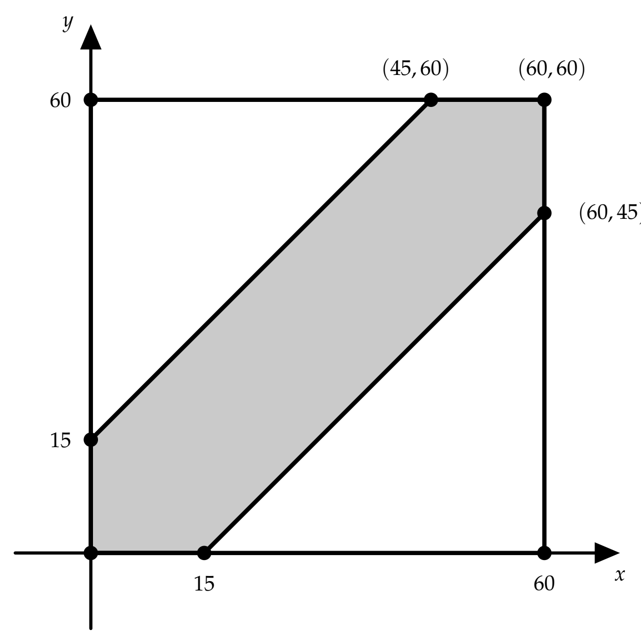
$$P(1,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-1}{20-1} = \frac{14}{19}.$$

26. (Canguru – 2011 [*modificado*])
Suponhamos que sejam v bolas vermelhas e p pretas, totalizando $v+p$. A quantidade de formas de escolhermos duas bolas na caixa é igual a $\dfrac{(v+p)(v+p-1)}{2}$. Podemos sacar duas bolas vermelhas de $\dfrac{v(v-1)}{2!}$ formas ou, no caso das pretas, de $\dfrac{p(p-1)}{2!}$ formas. Por fim, a probabilidade fica

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{v(v-1)}{2!} + \frac{p(p-1)}{2!}}{\frac{(v+p)(v+p-1)}{2}} &= \frac{1}{2}\\
\frac{v(v-1)+p(p-1)}{(v+p)(v+p-1)} &= \frac{1}{2}\\
v^2+vp-v+pv+p^2-p &= 2v^2-2v+2p^2-2p\\
v+p &= v^2-2vp+p^2\\
v+p &= (v-p)^2.
\end{aligned}$$

27. Perceba, no gráfico abaixo, que a área de encontro está na região cinza. O quadrado tem área $60\times 60 = 3600$. E a área interna ao quadrado, e externa ao hexágono cinza, é composta por dois triângulos retângulos isósceles de catetos medindo 45 (área $\dfrac{45\times 45}{2}$). Assim a área cinza mede $3600 - 2\times\dfrac{45\times 45}{2} = 1575$, e a probabilidade do encontro ocorrer é

$$P = \frac{1575}{3600} = 47,75\%.$$



28. (RPM 43)
Vamos observar inicialmente que, como os números podem ser repetidos, um sorteio dessa loteria admite $3\times 3\times 3 = 27$ resultados possíveis.

a) Um único jogo (por exemplo 121) garante a vitória do apostador em sete resultados. De fato, as duas primeiras posições (12) garantem a vitória se os resultados forem 121, 122, 123. A primeira e terceira posições (1_1) permitem que o apostador ganhe com os resultados 111, 121, 131. Finalmente, a segunda e terceira posições (21) darão a vitória com os resultados 121, 221, 321. Como o próprio jogo é repetido duas vezes, são sete os resultados distintos favoráveis ao jogador. Conclui-se, portanto, que a probabilidade de vitória de um apostador que comprou um único bilhete é igual a $\frac{7}{27}$.

b) Com três bilhetes, o máximo que se pode esperar é garantir a vitória em 21 jogos, o que nos daria uma probabilidade de vitória igual a $= \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$. Isso pode ser conseguido com jogos que não repitam nenhum número na mesma posição. Assim, por exemplo, os conjuntos de três jogos 111, 222, 333 e 123, 231, 312 dão ao jogador essa probabilidade máxima de vitória.

c) Como no total existem 27 resultados possíveis e cada jogo garante a vitória do apostador em apenas sete, conclui-se que três jogos não são suficientes para que tenhamos certeza da vitória. Mostraremos a seguir que quatro jogos também não são suficientes. Como são três algarismos e quatro jogos, existe um algarismo que aparece uma única vez na primeira posição. Vamos supor que o número 1 apareça em um único jogo na primeira posição. É fácil ver que esse jogo garante a vitória do apostador em cinco jogos distintos que começam com o número 1. Existem nove jogos que começam com o número 1 e a vitória nos outros quatro terá que ser garantida pelos algarismos que aparecem na segunda e terceira posições dos demais jogos. Como só existem três outros jogos, sobra um jogo que começa com 1, que se for sorteado não dará a vitória ao apostador. Existem vários conjuntos de cinco jogos que resolvem o problema, como o leitor pode verificar nos exemplos: 123, 211, 232, 312, 331; 121, 132, 213, 322, 331.

29. (Canguru $-$ 2013 **[*modificado*])**
Seja n o número de cangurus dourados. Como há nove cangurus, a probabilidade de três deles que se encontram por acaso serem dourados é

$$\begin{aligned} \frac{n}{9} \cdot \frac{n-1}{8} \cdot \frac{n}{7} &= \frac{2}{3} \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \\ n &= 8. \end{aligned}$$

Assim, há 8 cangurus dourados.

30. (Canguru $-$ 2015 **[*modificado*])**
Bruna pode vencer se:

a) tirar 2 e Amanda tirar 1, cuja probabilidade é $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$; ou

b) ou se ela tirar 5 e Amanda ficar com 1, 2, 3 ou 4, que tem probabilidade igual a $\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36}$.

Por fim, o resultado fica $\frac{3}{36} + \frac{12}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

31. (UNB)
Aplicaremos a probabilidade binomial na expressão $(c+n)^{10}$, buscando a parcela $\binom{10}{5} c^5 n^5$, na qual c é a probabilidade de capturar uma lebre e n a de não capturar. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \binom{10}{5} c^5 n^5 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0,4)^5 \cdot (0,6)^5 \\ &= 252 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^5 \\ &= 0,2006581248 \\ &\cong 20\%. \end{aligned}$$

32. (Canguru $-$ 2011 **[*modificado*])**
Seja n a quantidade de dados que eles devem lançar simultaneamente. A probabilidade de não sair nenhum seis nos n dados é $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ e a probabilidade de sair somente um seis nos n dados é $n \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Como essas duas probabilidades devem ser iguais temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right)^n &= n \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ n &= 5. \end{aligned}$$

33.
Consideremos que todos os dados são honestos com os resultados equiprováveis.

a) Para ganhar, precisamos tirar ao menos dois 6. A probabilidade será igual a tirar

- três seis: $P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$; e
- dois seis e outro qualquer: $P_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$.

Ficando com $\frac{1}{6^3} + \frac{15}{6^3} = \frac{16}{6^3}$.

b) Para ganhar, precisamos tirar ao menos um maior do que 5 e outro maior do que 4. A probabilidade será igual a tirar

- três seis: $P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$; e
- dois seis e outro qualquer (< 6): $P_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$;
- um seis e dois cincos: $P_2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{6^3}$;
- um seis, um cinco e outro qualquer (< 5): $P_2 = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{24}{6^3}$;

Portanto, ficamos com

$$\frac{1}{6^3} + \frac{15}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{24}{6^3} = \frac{43}{216}.$$

ELABORADO POR TIAGO MIRANDA E CLEBER ASSIS
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
contato@cursoarquimedes.com