Sistemas Lineares e Geometria Analítica

Sistemas de Três Variáveis
Parte 1

3° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Escreva a equação do plano que corta os eixos Ox, Oy e Oz nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ respectivamente, dado que $abc \neq 0$.

Exercício 2. Determine o plano que passa pelo ponto $P = (0, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $\alpha : 3x - 5y + z = 1$.

Exercício 3. Determine o plano π que contém o ponto $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (0, 1, 0)$.

Exercício 4. Determine a equação do plano π que
a) é paralelo ao plano xz e contém o ponto $(1, 3, -2)$
b) contém o eixo Oz e o ponto $(2, 1, -1)$

Exercício 5. Dados os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$, $\pi_2 : 6x + 2y + 2z = 3$, $\pi_3 : 4x + 6y + 8z = 2$ e $\pi_4 : 4x + 6y + 8z = 10$, determine a interseção entre

a) π_1 e π_2

b) π_1 e π_3

c) π_1 e π_4

Exercício 6. Resolva os sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 5x - 3y + 6z = 10 \\ \dfrac{10}{3}x - 2y + 4z - 9 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3y + 6z = 9 \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{z}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Achar a equação do plano π_1 que passa pelo ponto $P = (3, 2, -4)$ e é perpendicular aos planos $\pi_2 : x - 3y + 2z + 5 = 0$ e $\pi_3 : 2x + y - z + 7 = 0$.

Exercício 8. Determine os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que os planos $\alpha : x + 2y + z = b$ e $\beta : 2x + 4y + az = 8$ tenham em comum:

a) infinitos pontos.

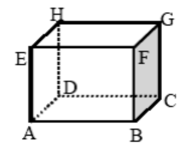
b) nenhum ponto.

Exercício 9. Mostre que a reta dada pela interseção dos planos $\pi_1 : 2x - y - z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 5x - 3y + 2z - 5 = 0$ está contida no plano $\alpha : 9x - 5y = 7$.

Exercício 10. Mostre que os planos de equações $x + y - 2z - 1 + k(x - 2y + z) = 0$, $k \in \mathbb{R}$, passam por uma mesma reta.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Do cubo dado a seguir sabe-se que:
i. O plano $ABC : x - y + z + 4 = 0$ e os pontos da reta DG podem ser escritos como $(t, 2t, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.
ii. O plano ABF é perpendicular ao plano ABC e $F = (0, 1, 0)$.
Determine a equações dos planos ABF e EFG.



Exercício 12. Qual é a equação do plano tangente, no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, à esfera de centro na origem e raio r?

Exercício 13. Entre os pontos da reta r, dada pela interseção dos planos $x - y - z = 0$ e $x + y + 2z = 1$, qual está mais próximo da origem?

Exercício 14. Resolva o sistema linear $ax + by + cz = 0$ e $a'x + b'y + c'z = 0$, sendo $abc \neq 0$ e $a'b'c' \neq 0$.

Respostas e Soluções.

1. Denote $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$. Os pontos A, B e C pertencem ao plano, assim os vetores $\vec{AB} = (-a, b, 0)$ e $\vec{AC} = (-a, 0, c)$ são paralelos ao plano. O vetor $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ é normal ao plano. Calculando o produto vetorial temos

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & c & 0 \end{vmatrix} = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k}$$

Como $\vec{n} = (bc, ac, ab)$, a equação do plano é

$$(bc)x + (ac)y + (ab)z = d.$$

Substituindo as coordenadas de um dos pontos do plano, por exemplo $A = (a, 0, 0)$, encontramos o valor de d:

$$(bc)a + (ac)0 + (ab)0 = d \Rightarrow d = abc.$$

Assim, o plano tem equação

$$bcx + acy + abz = abc.$$

2. Se o plano é paralelo a α, então o vetor normal a α, $(3, -5, 1)$, é também normal ao plano. Assim, a equação do plano é

$$3x - 5y + z = d,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Para saber o valor de d, substituímos P na equação:

$$3.0 - 5.1 + 2 = d \Rightarrow d = -3.$$

Portanto, a equação do plano é

$$3x - 5y + z + 3 = 0.$$

3. Um vetor normal ao plano, $\vec{n}$, pode ser obtido como

$$\vec{n} = u \times v = (-1, 0, 1).$$

Assim, a equação do plano é

$$-x + z = d,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Para saber o valor de d, substituímos A na equação:

$$-9 + 0 = d \Rightarrow d = -9.$$

Portanto, a equação do plano é

$$-x + z + 9 = 0.$$

4. a) Note que a equação do plano xz é $y = 0$. Logo, um plano paralelo ao plano xz tem equação $y = d$, para algum $d \in \mathbb{R}$. Como $(1, 3, -2)$ pertence a π, substituindo suas coordenadas na equação, temos $d = 3$. Portanto, a equação do plano π é $y - 3 = 0$.

b) O eixo Oz é a interseção dos planos yz e xz, logo

$$Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Escolhendo dois pontos quaisquer em Oz, por exemplo $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, eles não são colineares com $(2, 1, -1)$. Denotando esses pontos A, B e C, respectivamente, os vetores AB e AC são paralelos ao plano π e, o vetor $\vec{n} = AB \times AC$ é normal ao plano π. Temos

$$\vec{n} = AB \times AC = (0, 0, -2) \times (2, 1, -2) = (2, -4, 0).$$

Assim, $\pi : 2x - 4y = d$. Substituindo as coordenadas de um dos pontos pertencentes ao plano, por exemplo $= (0, 0, 1)$, encontramos o valor de d:

$$2.0 - 4.0 = d \Rightarrow d = 0.$$

Daí,

$$\pi : 2x - 4y = 0 \Rightarrow \pi : x - 2y = 0.$$

5. a) Observando a relação entre os coeficientes das equações dos planos temos que

$$\frac{2}{6} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{4}{2}.$$

Daí sabemos que os planos se intersectam em uma reta, a qual denotamos r. Para determinar uma reta basta encontrar dois pontos pertencentes a ela.

Supondo $x = 0$,

$$\begin{cases} 3y + 4z = 5 \\ 2y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ e } z = 1/2.$$

Supondo $y = 0$,

$$\begin{cases} 2x + 4z = 5 \\ 6x + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1/10 \text{ e } z = 6/5.$$

Assim, temos os pontos $A = (0, 1, 1/2)$ e $B = (1/10, 0, 6/5)$ na reta r. O vetor $\vec{AB} = B - A = (1/10, -1, 7/10)$ é paralelo à reta r, então partindo de um ponto da reta e adicionando um certo múltiplo do vetor $\vec{AB}$ chegamos a qualquer outro ponto desejado da reta. Portanto, a reta r é dada pelo conjunto de pontos

$$\begin{aligned} \{A + t\vec{AB}; t \in \mathbb{R}\} &= \{(0, 1, 1/2) + t(1/10, 0, 6/5); t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(t/10, 1, 1/2 + 6t/5); t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(t, 1, 1/2 + 12t); t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

b) Observando os coeficientes dos planos temos que

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \neq \frac{5}{2},$$

logo os planos π_1 e π_3 são paralelos e a interseção entre eles é vazia.

c) Observando os coeficientes dos planos temos que

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10},$$

logo os planos π_1 e π_4 são coincidentes e a interseção entre eles é o próprio plano $\pi_1 = \pi_4$.

6. Vamos usar que as equações nos sistemas representam planos no espaço, o qual denotamos π_1 e π_2.

a) Observando os coeficientes dos planos temos

$$\frac{5}{10/3} = \frac{-3}{-2} = \frac{6}{4} \neq \frac{10}{9},$$

logo os planos são paralelos e não se intersectam. Assim a solução do sistema linear é o conjunto $S = \emptyset$.

b) Observando os coeficientes dos planos temos

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{4},$$

logo os planos se intersectam. O lugar geométrico formado por essa interseção é uma reta. Os infinitos pontos dessa reta são as soluções do sistema linear. Vamos encontrá-los de três maneiras.

Solução 1. O sistema é possível e indeterminado, mas como a solução se trata de uma reta podemos escrever seus pontos como função de uma única variável, digamos x. Isolando z na primeira equação temos $z = y - 2x$. Substituindo z na segunda equação chegamos a $y = (9 + 7x)/2$. Agora, substituindo essa expressão para y na expressão anterior para z, temos $z = (9 + 3x)/2$. Assim, a solução do sistema é o conjunto de pontos

$$S = \{(x, (9 + 7x)/2, (9 + 3x)/2); x \in \mathbb{R}\}.$$

Solução 2. Sabendo que a solução é uma reta, basta encontrarmos dois pontos particulares para determinar sua equação.
Supondo $y = 0$,

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + 4z = 9 \end{cases} \Rightarrow x = -9/7 \text{ e } z = 18/7.$$

Supondo $z = 0$,

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = -6.$$

Assim, temos os pontos $A = (-9/7, 0, 18/7)$ e $B = (-3, -6, 0)$. Qualquer ponto da reta pode ser escrito como

$$\begin{aligned} B + t\vec{AB} &= (-3, -6, 0) + t(-12/7, -6, -18/7) \\ &= (-3 - 12t/7, -6 - 6t, -18t/7) \end{aligned},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$. Logo, a solução do sistema linear é o conjunto

$$\begin{aligned} S &= \{(-3 - 12t/7, -6 - 6t, -18t/7); t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-3 - 2t, -6 - 7t, -3t); t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Solução 3. Na solução anterior, usamos o vetor $\vec{AB}$ para construir a equação da reta. Vejamos outra maneira de contruir um vetor. Considere os vetores $\vec{n_1} = (2, -1, 1)$ e $\vec{n_2} = (1, -2, 4)$ normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente. O vetor

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (-2, -7, -3)$$

é normal aos vetores $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$, logo é paralelo aos planos π_1 e π_2. Isso nos diz que, se somarmos um múltiplo de $\vec{v}$ a qualquer ponto pertencente aos planos π_1 e π_2, iremos obter um outro ponto pertencente a π_1 e π_2. Escolhendo por exemplo o ponto B obtido na solução anterior, os pontos da reta (solução do sistema) podem ser escritos como

$$B + t\vec{v} = (-3, -6, 0) + t(-2, -7, -3).$$

Logo, a solução do sistema linear é o conjunto

$$S = \{(-3 - 2t, -6 - 7t, -3t); t \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que $\vec{AB}$ e $\vec{v}$ são múltiplos um do outro.

c) Observando os coeficientes dos planos temos

$$\frac{4}{1/3} = \frac{-3}{-1/4} = \frac{6}{1/2} = \frac{9}{3/4},$$

logo os planos são coincidentes e a solução do sistema é o próprio plano. Observe que as equações são equivalentes e, portanto, o sistema tem três variáveis e apenas uma equação, logo há duas variáveis livres. Podemos isolar uma variável em qualquer uma das equações, por exemplo na primeira,

$$z = \frac{9 - 4x + 3y}{6} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y.$$

A solução do sistema é o conjunto de pontos

$$S = \{(x, y, 3/2 - 2x/3 + y/2); x, y, \in \mathbb{R}\}.$$

7. Como π_1 é perpendicular a π_2 e π_3, os vetores normais a esses planos, $n_2 = (1, -3, 2)$ e $n_3 = (2, 1, -1)$, respectivamente, são paralelos a π_1. Assim, o vetor $n_1 = n_2 \times n_3 = (1, 5, 7)$ é normal ao plano π_1. Logo, uma equação para o plano π_1 é

$$x + 5y + 7z = d.$$

Para saber o valor de d substituímos as coordenadas do ponto $P \in \pi_1$:

$$3 + 5.2 + 7(-4) = d \Rightarrow d = -15.$$

Assim,

$$\pi_1 : x + 5y + 6z + 15 = 0.$$

8. a) Para que os planos tenham infinitos pontos em comum, eles devem ser coincidentes ou a interseção entre eles deve ser uma reta.
Para que sejam coincidentes devemos ter

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{a} = \frac{b}{8} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 4.$$

Para que se interceptem numa reta devemos ter

$$\frac{1}{a} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow a \neq 2.$$

Assim, devemos ter $a = 2$ e $b = 4$ ou $a \neq 2$.

b) Para que não tenham pontos em comum os planos devem ser paralelos. Temos

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{a} \neq \frac{b}{8} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b \neq 4.$$

Logo, devemos ter $a = 2$ e $b \neq 4$.

9. Vamos resolver o sistema linear dado pelas equações dos planos π_1 e π_2. Como existe uma variável livre vamos escrever as coordenadas das soluções em função de x. Isolando z na equação de π_1 temos $z = 2x - y - 1$. Substituindo essa expressão para z na equação de π_2, temos $y = (9x - 7)/5$. Por sua vez, substituindo essa expressão para y na expressão anterior para z, temos $z = (x + 2)/5$. Assim, os pontos da reta têm coordenadas

$$(x, \frac{9x-7}{5}, \frac{x+2}{5}), x \in \mathbb{R}.$$

Basta verificar agora que qualquer ponto que tenha essa coordenada satisfaz a equação de α. De fato,

$$9x - 5\left(\frac{9x-7}{5}\right) = 7,$$

logo todo ponto da reta pertence ao plano α.

10. Solução 1. Vamos escolher dois planos particulares, por exemplo tomando $k = 0$ e $k = 2$, e encontrar a reta dada pela interseção dos dois. Em seguida, basta mostrar que os pontos dessa reta satisfazem a equação dos planos para todo $k \in \mathbb{R}$, logo pertencem a todos os planos.

Tomando $k = 0$ temos o plano $x + y - 2z = 1$ e, tomando $k = 2$, o plano $3x - 3y = 1$, o que nos leva ao sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3x - 3y = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear por substituição, temos que os pontos da reta podem ser escritos como

$$\left(x, \frac{3x-1}{3}, \frac{3x-2}{3}\right).$$

Agora, basta verificar que esses pontos satisfazem a equação dos planos para todo k real. De fato,

$$\begin{aligned} x + \frac{3x-1}{3} - 2\left(\frac{3x-2}{3}\right) - 1 \\ + k\left(x - 2\left(\frac{3x-1}{3}\right) + \frac{3x-2}{3}\right) = 0, \forall k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Solução 2. Olhando a equação dos planos como um polinômio na variável k, o polinômio é identicamente nulo se seus coeficientes são identicamente nulos, isto é,

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

Note que esse sistema é possível indeterminado e os infinitos pontos do seu conjunto-solução formam uma reta (interseção de dois planos distintos). Em outras palavras, para qualquer valor de k escolhido, os pontos dessa reta satisfazem a equação do plano, logo essa reta pertence a todos os planos obtidos variando o valor de k.

11. O plano EFG é paralelo ao plano ABC, logo o vetor $v = (1, -1, 1)$, normal a ABC, é também normal a EFG. Podemos escrever $EFG : x - y + z = d$. Como $F \in EFG$, substituindo as coordenadas de F na equação do plano encontramos d:

$$0 - 1 + 0 = d \Rightarrow d = -1.$$

Logo $EFG : x - y + z + 1 = 0$.

O vetor normal a ABC, $v = (1, -1, 1)$, é paralelo ao plano ABF. Um vetor com a direção do segmento de reta DG, por exemplo, $w = (1, 2, 3)$, também é paralelo a ABF. Assim, o vetor $v \times w = (-5, -2, 3)$ é normal ao plano ABF, que também contém o ponto F. Podemos escrever ABF : $-5x - 2y + 3z = d$. Substituindo as coordenadas do ponto F encontramos $d = -2$. Segue que $ABF : 5x + 2y - 3z + 2 = 0$.

12. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer no plano tangente, vale que

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{P_0O} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ \vec{P_0O} &= -(x_0, y_0, z_0), \\ \vec{P_0P} \cdot \vec{P_0O} = 0 &\Leftrightarrow -x_0x - y_0y - z_0z = d, \end{aligned}$$

onde

$$d = -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = -r^2.$$

Assim, a equação do plano tangente é

$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2$$

Note que se P é um ponto do plano tangente, a última equação equivale a $P_0 \cdot P = r^2$.

13. Resolvendo por substituição, os pontos da reta r podem ser escritos como

$$(x, 3x - 1, 1 - 2x), x \in \mathbb{R}.$$

Minimizar a distância do ponto a origem é o mesmo problema que minimizar o quadrado da distância. Temos

$$d(O, P)^2 = x^2 + (3x - 1)^2 + (1 - 2x)^2 = 14x^2 - 10x + 2.$$

A distância $d(O, P)^2$ é uma função quadrática de x, logo atinge seu mínimo no valor de x correspondente ao vértice da parábola, isto é, $x_v = -b/2a = 5/14$. Assim, o ponto na reta mais próximo da origem é

$$(5/14, 3.5/14 - 1, 1 - 2.5/14) = (5/14, 1/14, 2/7).$$

14. Como $abc \neq 0$ e $a'b'c' \neq 0$, podemos interpretar as equações como dois planos no espaço, os quais denotamos α e α', com os coeficientes que acompanham as variáveis não nulos. Como o coeficiente independente dos dois planos é nulo, então a origem é um ponto comum aos planos. Assim, os planos não podem ser paralelos distintos. Como todos os coeficientes são não nulos,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \begin{cases} ab' = a'b \\ bc' = c'b \\ ac' = a'c. \end{cases}$$

Se as três igualdades acontecem, os planos são coincidentes e a interseção é o próprio plano $\alpha = \alpha'$. A solução pode ser escrita como o conjunto de pontos

$$S = \{(x, y, (-ax - by)/c); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Suponha que ao menos uma dessas igualdades não é válida. Então sabemos que os planos se intersectam em uma reta. Vamos resolver como na Solução 3 da questão 6*b*. Os vetores $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\vec{v'} = (a', b', c')$ são vetores normais aos planos α e α', respectivamente. O vetor

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{v'} = (c'b - b'c, a'c - ac', ab' - a'b)$$

é normal aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{v'}$, logo é paralelo aos planos α e α'. Isso nos diz que, se somarmos um múltiplo de $\vec{n}$ a qualquer ponto pertencente aos planos α e α', iremos obter um outro ponto pertencente a α e α'. Como a origem é um ponto comum aos dois planos, então os pontos da reta (solução do sistema) podem ser escritos como

$$O + t\vec{n} = (0, 0, 0) + t(c'b - b'c, a'c - ac', ab' - a'b).$$

Logo, a solução do sistema linear é o conjunto

$$S = \{((c'b - b'c)t, (a'c - ac')t, (ab' - a'b)t); t \in \mathbb{R}\}.$$

Material elaborado por Lorena Bulhosa