**Módulo de Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares.**

**Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente.**

**9º ano E.F.**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

**Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares**
**Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente.**

# 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Aplicando o Teorema de Pitágoras, calcule os valores indicados em cada item.

a) Qual a medida da hipotenusa num triângulo retângulo de catetos de medidas 3 e 4?

b) Qual a medida do cateto $b$ num triângulo retângulo de hipotenusa medindo 13 e cateto $c = 12$?

**Exercício 2.** A **Recíproca do Teorema de Pitágoras**, enuncia que:

> "se as medidas dos três lados de um triângulo qualquer satisfazem a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo".

Dentre os ternos $(a, b, c)$ de números inteiros listados, com $a < b < c$, qual(is) dele(s) poderiam ser lados de triângulo(s) retângulo(s)?

a) $(5, 12, 13)$.

b) $(8, 15, 17)$.

c) $(7, 24, 25)$.

d) $(12, 35, 37)$.

e) $(11, 60, 61)$.

f) $(20, 21, 29)$.

g) $(9, 40, 41)$.

**Exercício 3.** Dentre os ângulos agudos dos triângulos retângulos do exercício 2, qual possui o maior seno?

**Exercício 4.** Quais os senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos do triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

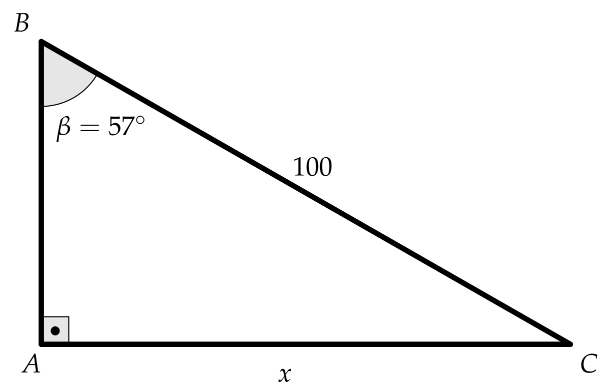
**Exercício 5.** Um triângulo tem lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm. Outro triângulo tem lados medindo 9 cm, 12 cm e 15 cm. Os ângulos desses triângulos são iguais?

**Exercício 6.** Utilizando os dados aproximados da tabela 2, calcule o que se pede.

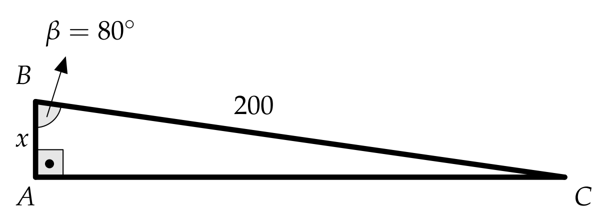
Tabela 2: Senos, cossenos e tangentes.

| Arco | sen | cos | tg |
|---|---|---|---|
| $15°$ | $0,26$ | $0,97$ | $0,27$ |
| $20°$ | $0,34$ | $0,93$ | $0,37$ |
| $30°$ | $0,5$ | $0,87$ | $0,58$ |
| $40°$ | $0,64$ | $0,77$ | $0,84$ |
| $57°$ | $0,84$ | $0,54$ | $1,54$ |
| $80°$ | $0,98$ | $0,17$ | $5,67$ |

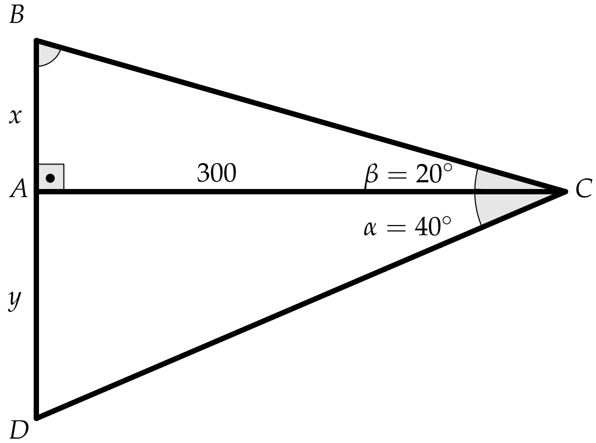
a) Determine valor de $AC = x$.




b) Determine valor de $AB = x$.




c) Determine valor de $BD = x + y$.




d) Seja o $\triangle ABC$, retângulo em $B$, com $B\hat{A}C = 15^\circ$ e $D \in AB$ tal que $A\hat{D}C = 150^\circ$. Sendo $DB = 400$ cm, qual o valor de $AC$?

e) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 34 e 93, qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de menor medida?

f) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 26 e 97. Qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de maior medida?

g) Num triângulo retângulo com um ângulo medindo $30^\circ$, prove que o seu cateto oposto é metade da hipotenusa.

**Exercício 7.** No triângulo da figura 2, calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes de $\alpha$ e $\beta$.

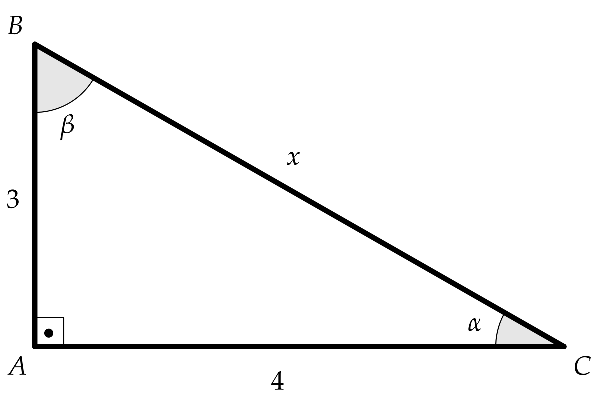



Figura 2

**Exercício 8.** A figura 3 representa um $\triangle ABC$, equilátero, com lado medido 2 cm e uma altura $BH$.

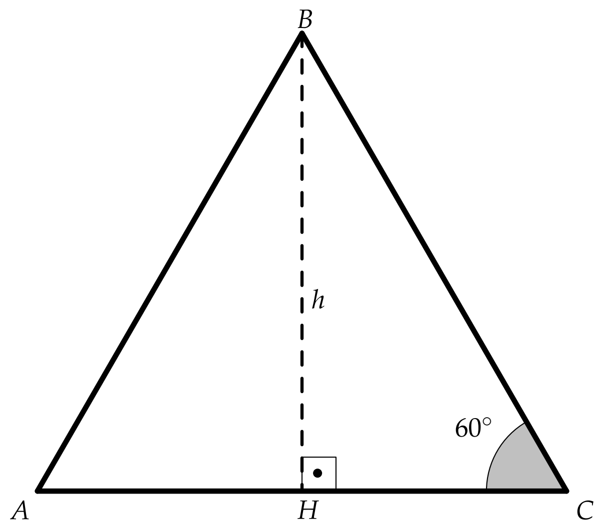



Figura 3

Quais os valores do(a):

a) $\operatorname{sen} 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ e $\operatorname{tg} 60^\circ$?

b) $\operatorname{sen} 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ e $\operatorname{tg} 30^\circ$?

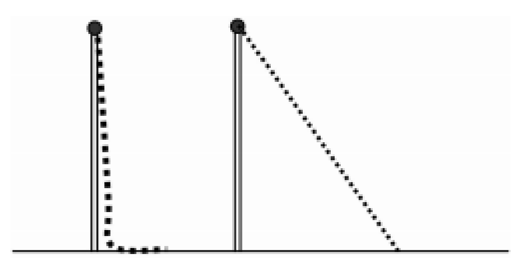
**Exercício 9.** Uma escada rolante liga dois andares de uma loja e tem uma inclinação de $30^\circ$. Sabendo que a escada rolante tem 10 m de comprimento, qual é a altura entre os dois andares?

**Exercício 10.** A partir de um quadrado de lado medindo 1 cm, determine as medidas dos seno, cosseno e da tangente de $45^\circ$.

**Exercício 11.** Uma pessoa na margem de um rio vê sob um ângulo de $60^\circ$ uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta 30 metros esse ângulo diminui para $30^\circ$. Qual é a largura do rio?

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 12.** No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 3 chih[1]. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de 8 chih do pé do bambu. Que comprimento tem o bambu?



[1] Antiga unidade de medida chinesa, conhecido como "pé chinês". Seu comprimento é derivado do comprimento do antebraço humano.

**Exercício 13.** Sobre uma rampa de 6 $m$ de comprimento e inclinação de $30^\circ$ com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 25 cm. Quantos degraus desse tipo serão construídos?

**Exercício 14.** Ao atender o chamado de um incêndio em um edifício, o corpo de bombeiros de uma cidade utilizou um veículo de combate a incêndio, dotado de escada magirus. Esse veículo possibilita atender a resgates a uma altura máxima de 54 metros, utilizando um ângulo máximo de levantamento de $60^\circ$.

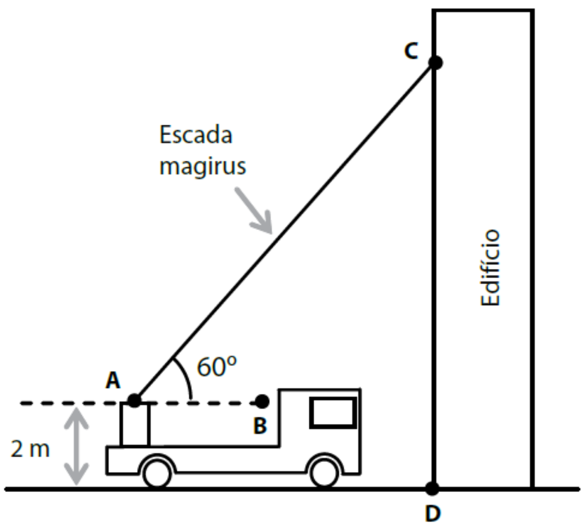



Figura 6

a) Qual o comprimento dessa escada quando totalmente esticada?

b) Houve um problema e o ângulo de levantamento foi reduzido em 25%. Qual a nova altura máxima alcançada?

**Exercício 15.** Demonstre que a área $S$ do $\triangle ABC$ (figura 7) pode ser calculada pela fórmula $S = \dfrac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$.

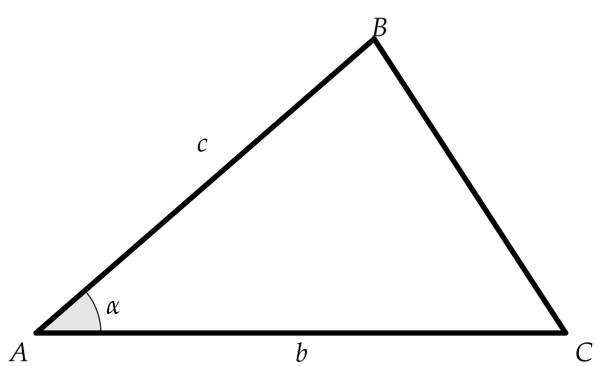



Figura 7

**Exercício 16.** No $\triangle ABC$ temos que $AB = \sqrt{2}$ cm, $AC = 6$ cm e $B\hat{A}C = 45^\circ$, qual o valor da sua área?

**Exercício 17.** Percorrendo, ao longo de uma reta horizontal, a distância $d = AB$, em direção à base inacessível de um poste $CD$, nota-se (com o auxílio de um teodolito) que os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}D$ medem, respectivamente, $\alpha$ e $\beta$ graus. Qual é a altura do poste $CD$?

**Exercício 18.** Um observador está em um ponto $A$ do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de $10^\circ$ com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de $14^\circ$. Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?
Dados: $\text{tg}\,10^\circ = 0,1763$ e $\text{tg}\,14^\circ = 0,2493$.

**Exercício 19.** Um enigma interessante ocorre quando movimentamos as "peças" da figura 11 e criamos a figura 12. Com as mesmas peças reordenadas, surge um quadradinho vazio na base. Explique esse fato.

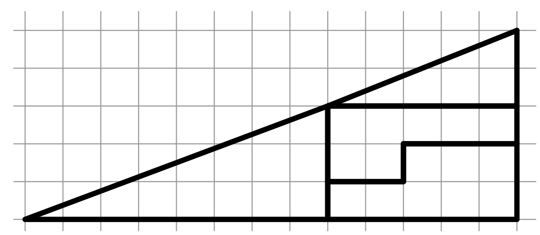


Figura 11

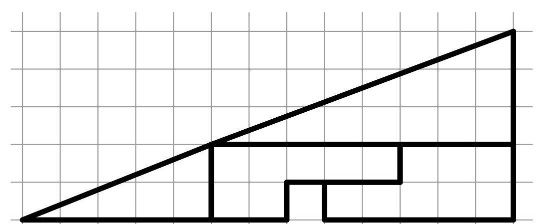
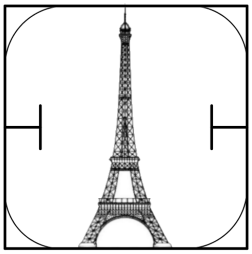


Figura 12

**Exercício 20.** Uma pessoa de 2 m de altura, passeando pela cidade, caminha em linha reta numa rua horizontal, na direção da portaria de um edifício. A pessoa e olha o topo desse edifício, o que a obriga a olhar para cima num ângulo de 30 graus com a horizontal. Após caminhar 49 m, para uma segunda vez para ver o topo do edifício e tem que olhar para cima num ângulo de 45 graus com a horizontal. Utilize $\sqrt{3} = 1,7$. Nessa situação, qual a altura do prédio?

**Exercício 21.** A Torre Eiffel tem 324 m da altura (contando com a antena), e deseja-se fotografá-la completamente usando uma câmera com lente de abertura de $40^\circ$. Qual a mínima distância da torre (no plano da sua base) para que uma foto com essa câmera capture a torre inteira, como ilustra a seguir.



**Exercício 22.** Conforme mostra a figura 14, um pêndulo de comprimento constante $L$ faz um ângulo $\alpha$ com sua posição vertical. Expresse a altura $H$ em função do ângulo $\alpha$.

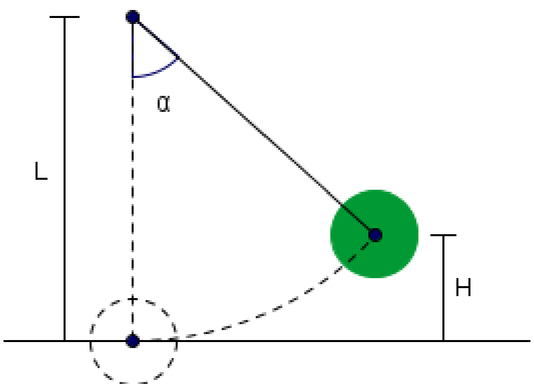



Figura 14

**Exercício 23.** Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem $a$ e $3a$, respectivamente, então o cosseno do ângulo oposto ao menor lado é?

**Exercício 24.** João mora a 10 km a leste de Maria. Num dia eles saem de casa ao mesmo tempo, andando em linha reta; João vai para o oeste a 6 km/h e Maria para o sul a 3 km/h. Determine a menor distância possível entre eles.

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 25.** Três goiabas perfeitamente esféricas de centros $C_1$, $C_2$ e $C_3$, e raios 2 cm, 8 cm e 2 cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura 16.

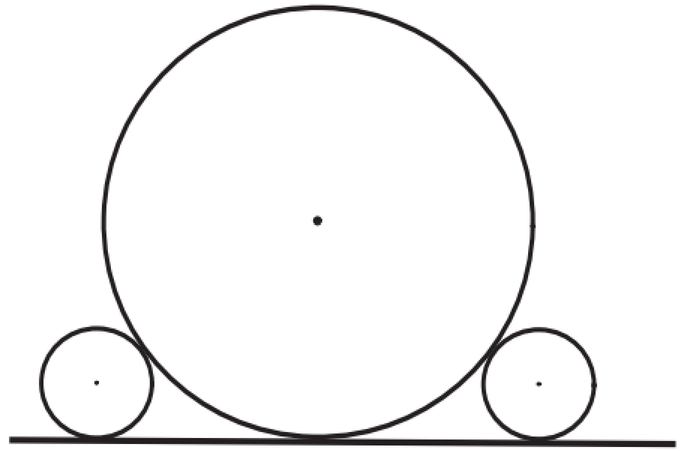


Figura 16

Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?

**Exercício 26.** No triângulo da figura 18, qual a razão entre as áreas $S_1$ e $S_2$?

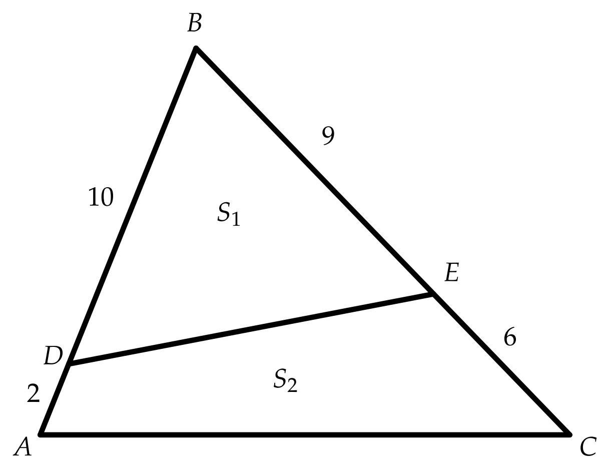



Figura 18

**Exercício 27.** Para calcular a altura de um morro, um topógrafo posicionou-se com seu teodolito a 200 $m$ do morro e o aparelho forneceu a medida do ângulo de visada do morro: 30°. O topógrafo, olhando numa tabela, considerou $\text{tg}\,30° = 0,57$. Se a altura do teodolito é $1,60$ m, qual é a altura, em metros, do morro obtida pelo topógrafo?

a) $352,48$. b) $125,60$. c) $118,20$. d) $115,60$. e) $114$.

**Exercício 28.** Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm. A soma das tangentes dos ângulos agudos é aproximadamente:

a) 1.

b) 1,3.

c) 2.

d) 2,5.

e) 2,8.

**Exercício 29.** Na figura 19, as retas $r$ e $s$ são paralelas. O segmento $AB$ é perpendicular a essas retas e o ponto $P$, nesse segmento, é tal que $AP = 2$ e $BP = 1$. O ponto $X$ pertence à reta $r$ e a medida do segmento $BX$ é indicada por $x$. O ponto $Y$ pertence à reta $s$ e o triângulo $XPY$ é retângulo em $P$.

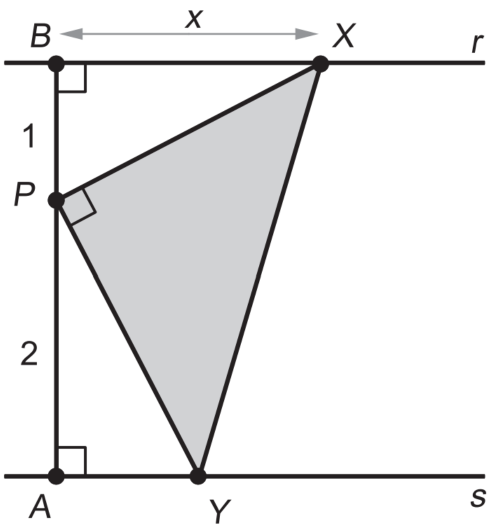



Figura 19

Determine o valor de $x$ para o qual a área do triângulo $XPY$ é mínima e calcule o valor dessa área.

**Exercício 30.** Na figura 20, estão assinalados três ângulos retos, e três ângulos de medida $\alpha$. Sendo $AB = 1$ e $BC = 5$, o valor de $\cos\alpha$ é

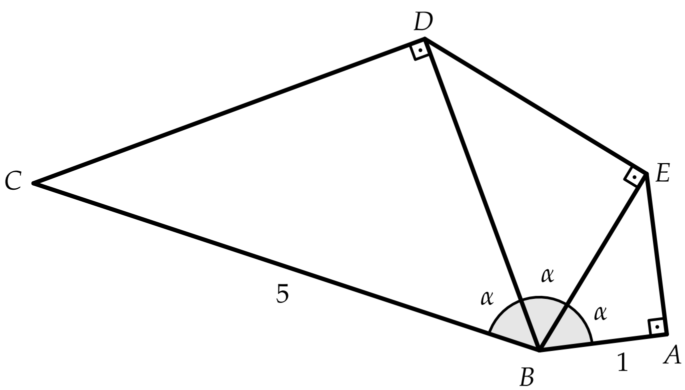



Figura 20

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.   b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.   c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.   d) $\sqrt[3]{5}$.   e) $\dfrac{1}{5}$.

**Exercício 31.** A partir do triângulo da figura 21 calcule:

a) $\operatorname{sen} 18^\circ$ e $\cos 18^\circ$.   b) $\operatorname{sen} 72^\circ$ e $\cos 72^\circ$.

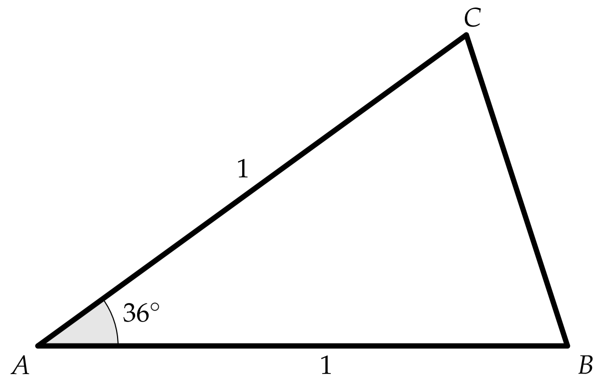



Figura 21

**Exercício 32.** Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto $P$, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de $60^\circ$ e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer $30^\circ$, conforme a figura 25. A velocidade, em km/h, desse avião era de:

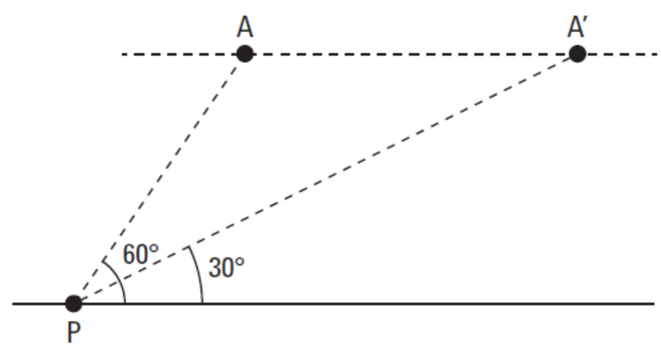



Figura 25

a) 180.   b) 240.   c) 120.   d) 150.   e) 200.

**Exercício 33.** Leia as proposições abaixo e depois desenvolva o que se pede.

**Proposição 1.** Para o $\triangle ABC$, com ceviana[5] $BD$, vale que:

$$\frac{(ABD)}{(CBD)} = \frac{AD}{CD},$$

onde $(ABD)$ e $(CBD)$ representam as áreas de $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$.

Para ver isso, basta usar que a área de um triângulo é o semiproduto da área da base pela sua altura correspondente.

[5]**Ceviana** é qualquer segmento de reta num triângulo com uma extremidade no vértice do triângulo e a outra extremidade no lado oposto, no caso $D \in AC$.

**Proposição 2.** Para o $\triangle ABC$, bissetriz $BD$, $D \in AC$, é válido que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{CB}.$$

Desenvolva uma demonstração da proposição 2 utilizando a proposição 1 e a fórmula demonstrada no exercício 15.

**Respostas e Soluções.**

**Observação:** Neste módulo, serão estudadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Aplicaremos os conceitos de cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa para definir os senos, cossenos e tangentes de cada ângulo. No geral, fazendo uso das marcações no triângulo da figura 1, teremos:

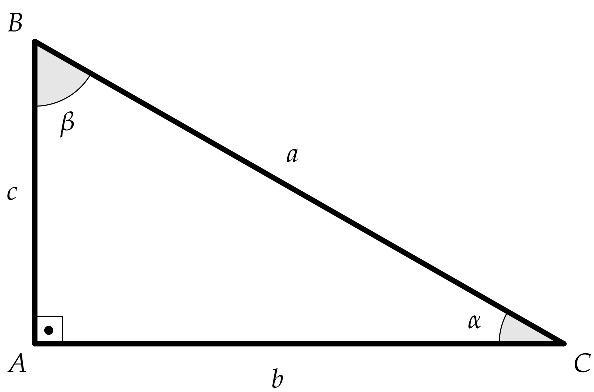


Figura 1

i) os catetos são $b$ e $c$ e a hipotenusa é $a$;

ii) em relação ao ângulo $\alpha$, teremos $c$ como cateto oposto e $b$ como cateto adjacente (o inverso para $\beta$);

iii) definiremos o $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{c}{a}$ e o $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b}{a}$;

iv) definiremos o $\cos\alpha = \dfrac{b}{a}$ e o $\cos\beta = \dfrac{c}{a}$; e

v) definiremos a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{c}{b}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{c}$.

O que permite concluir que quando $\alpha$ e $\beta$ forem complementares, isto é,

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

teremos $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$. Usando as substituições adequadas concluímos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$. Além disso, aplicando o Teorema de Pitágoras, poderemos concluir para ângulos agudos que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

A última equação é denominada "**Relação Fundamental**" e é válida para qualquer ângulo, não necessariamente o agudo. Outras funções trigonométricas importantes são $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ e $\operatorname{cossec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

**1.**

a) Seja "$a$" a medida da hipotenusa. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} a^2 &= 3^2 + 4^2 \\ a &= \sqrt{9+16} \\ a &= 5. \end{aligned}$$

b) Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} 13^2 &= 12^2 + c^2 \\ 169 &= 144 + c^2 \\ c &= 5. \end{aligned}$$

**2.** Observe que todos os ternos satisfazem a Recíproca do Teorema de Pitágoras, portanto, todos poderiam ser lados em triângulos retângulos. Os dois números menores representariam as medidas dos catetos e o maior número, a medida da hipotenusa.

**3.** Em cada um dos triângulos retângulos da questão anterior há dois ângulos agudos. Definindo o $\operatorname{sen} i = \dfrac{\text{Cateto Oposto } i}{\text{Hipotenusa}}$, $i \in \{1, 2\}$, e calculando os respectivos valores, obtemos os resultados aproximados da tabela 1.

Tabela 1: Senos, cossenos e tangentes.

| Cateto 1 | Cateto 2 | Hipotenusa | Seno 1 | Seno 2 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 12 | 13 | $0,385$ | $0,923$ |
| 8 | 15 | 17 | $0,471$ | $0,882$ |
| 7 | 24 | 25 | $0,280$ | $0,960$ |
| 12 | 35 | 37 | $0,324$ | $0,946$ |
| 11 | 60 | 61 | $0,180$ | $0,984$ |
| 20 | 21 | 29 | $0,690$ | $0,724$ |
| 9 | 40 | 41 | $0,220$ | $0,976$ |

Portanto, o maior seno é $\dfrac{60}{61} \cong 0,984$.

**4.** Observe que os lados do triângulo verificam a recíproca do "Teorema de Pitágoras", ou seja,

$$6^2 + 8^2 = 10^2.$$

Portanto, esse triângulo é retângulo com hipotenusa 10, com um dos seus ângulos agudos tendo seno igual a $\frac{6}{10}$, cosseno igual a $\frac{8}{10}$, tangente igual a $\frac{6}{8}$. O outro possui seno igual a $\frac{8}{10}$, cosseno igual a $\frac{6}{10}$ e tangente igual a $\frac{8}{6}$.

**5.** Pela Recíproca do Teorema de Pitágoras, temos que ambos são triângulos retângulos, pois,

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ e } 9^2 + 12^2 = 15^2.$$

No primeiro triângulo, um dos ângulos agudos ($\alpha_1$) tem seno igual a $\frac{3}{5}$, cosseno igual a $\frac{4}{5}$ e tangente igual a $\frac{3}{4}$ e o outro ($\beta_1$) possui seno igual $\frac{4}{5}$, cosseno igual a $\frac{3}{5}$ e tangente igual a $\frac{4}{3}$. Já no segundo, teremos os mesmos valores de senos, cossenos e tangentes para $\alpha_2$ e $\beta_2$, respectivamente. Portanto, nos dois triângulos teremos ângulos retos, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$.

**6.** Retirando os dados da tabela 2, obtemos:

a) Como $\operatorname{sen} 57° = 0,84 = \frac{x}{100}$, temos $x = 84$;

b) Como $\cos 80° = 0,17 = \frac{x}{200}$, temos $x = 34$;

c) Como $\operatorname{tg} 20° = 0,36 = \frac{x}{300}$ temos $x = 108$. Além disso, como $\operatorname{tg} 40° = 0,84 = \frac{y}{300}$ temos $y = 252$. Portanto, $BD = 360$;

d) Observe que $\triangle DBC$ é isósceles de base $BC$, pois $D\hat{C}A = 15°$, então $CD = DA = 400$ cm. Sendo $BC = x$ e aplicando que $\operatorname{sen} 30° = \frac{x}{400}$ concluiremos que $x = 200\ cm$;

e) Sejam $\alpha$ e $\beta$ os ângulos opostos ao maior e menor catetos, respectivamente. Fazendo $\operatorname{tg}\beta = \frac{34}{93} \cong 0,37$, encontraremos, pela tabela 2, que $\beta \cong 20°$;

f) Sejam $\alpha$ e $\beta$ os ângulos opostos ao maior e menor catetos, respectivamente. Se fizermos a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{97}{26} \cong 3,73$, encontramos um valor fora da tabela 2. Contudo, para $\operatorname{tg}\beta = \frac{26}{97} \cong 0,27$. Temos, $\beta \cong 15°$ e, portanto, $\alpha \cong 75°$; e

g) Como $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, concluímos que o cateto oposto é metade da hipotenusa.

**7.** (Adaptado da Vídeo Aula)
Inicialmente devemos calcular o valor da hipotenusa $x$ utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 \\ x^2 &= 25 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Então, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$.

**Comentário para professores:** Na resolução da equação $x^2 = 25$ só foi destacada a sua raiz positiva, pois $x$ representa a medida da hipotenusa.

**8.** (Adaptado da Vídeo Aula)
Na figura 4 podemos destacar o triângulo $BHC$ , retângulo em $H$, e aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + h^2 \\ h^2 &= 3 \\ h &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

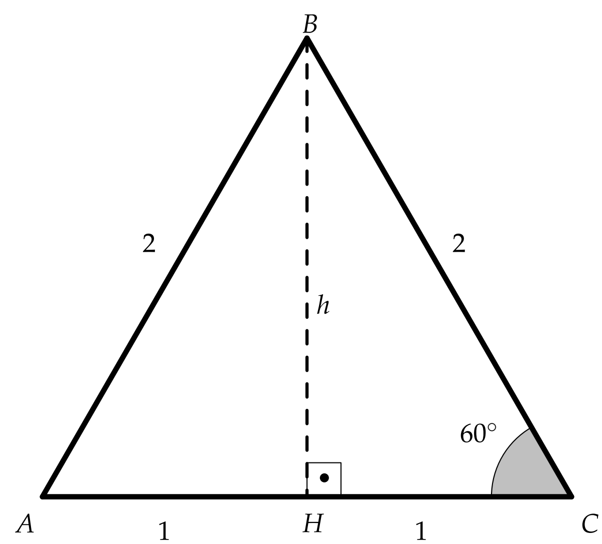


Figura 4

No mesmo triângulo, o ângulo de 60° terá cateto oposto igual a $\sqrt{3}$ , cateto adjacente 1 e hipotenusa 2. Portanto $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, o que responde o item $a$). Como 60° e 30° são complementares, teremos:

i) $\operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ii) $\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$; e

iii) $\operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 30° = 1$. Assim, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**9.** Observe que podemos construir um triângulo retângulo com hipotenusa coincidindo com a escada rolante (um segmento de reta que a represente pelo comprimento), um ângulo na base da escada com o solo medindo 30° e estamos em busca do valor de cateto oposto (a altura "$h$" entre os andares), portanto, usaremos o seno de 30°.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{h}{10} \\ \frac{1}{2} &= \frac{h}{10} \\ h &= 5 \text{ metros.} \end{aligned}$$

**10.** Seja $ABCD$ o quadrado de lado 1 cm, pelo Teorema de Pitágoras, a sua diagonal medirá $\sqrt{2}$ cm e $B\hat{C}D = 45^\circ$ (figura 5).

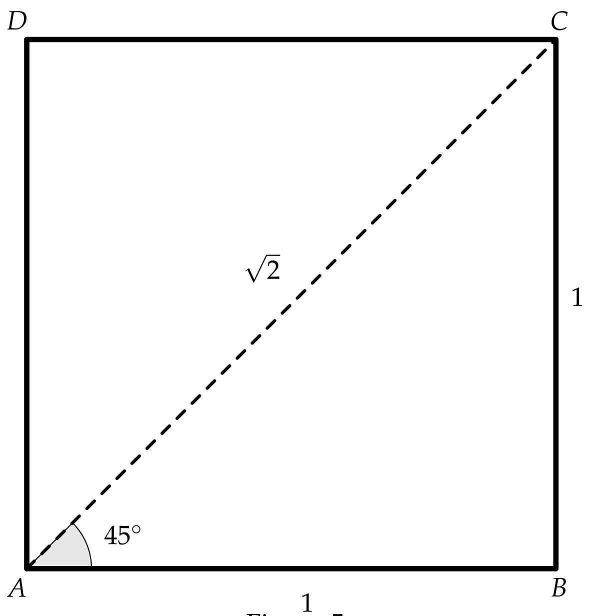


Figura 5

Portanto,

i) $\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ii) $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

iii) $\operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{1}{1} = 1$.

**11.** Sejam $x$ a largura do rio e $h$ a altura da torre. De início, temos que $\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{h}{x}$, ou seja, $h = x\sqrt{3}$. Após o afastamento encontramos que $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{h}{30+x}$, isto é, $h = \dfrac{(30+x)\sqrt{3}}{3}$. Por fim,

$$x\sqrt{3} = \frac{(30+x)\sqrt{3}}{3},$$

donde $x = 15$ metros.

**12.** (Extraído de um antigo livro chinês[2].)
Se $x$ é o comprimento do bambu temos $(x+3)^2 = x^2 + 8^2$, o que dá $x = \dfrac{55}{6} \cong 9,17$ chih.

**13.** A rampa deve ser vista como a hipotenusa de um triângulo retângulo e a altura $h$ será o cateto oposto ao ângulo de 30°. Então usaremos o $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{h}{6}$, sendo assim, $h = 3$ m ou 300 cm. Para a quantidade de degraus basta fazermos $\dfrac{300}{25} = 12$ degraus.

**14.**

a) (Adaptado do vestibular do IFSP/2014)
Sejam $c$ o comprimento da escada e $A'$ a projeção de $A$ em $CD$. Como o alcance da escada é de 54 metros, teremos $A'C = 52\ m$. Usando que $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{52}{c}$, então $c = \dfrac{104}{\sqrt{3}} = \dfrac{104\sqrt{3}}{3}$ m.

b) Com a perda de 25% o novo ângulo será $0,75 \cdot 60^\circ = 45^\circ$. A nova altura máxima será $h' + 2$, com $A'C' = h'$, definindo $C'$ como o ponto onde a escada toca o prédio. Fazendo $\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{h'}{\frac{104}{\sqrt{3}}}$, temos $h' + 2 = \dfrac{52\sqrt{6}+6}{3}\ m$.

**15.** A partir da altura $BH = h$ relativa à $AC$, temos $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{c}$ e $h = c \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (figura 8).

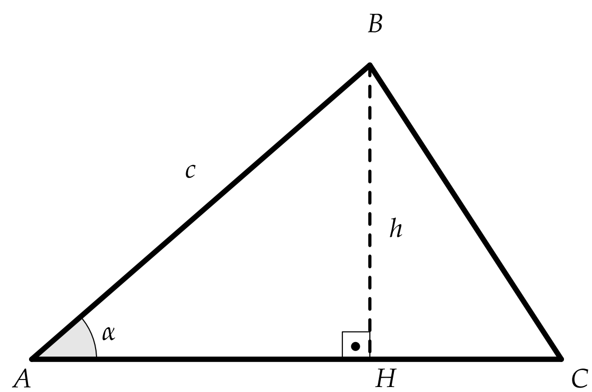


Figura 8

Por fim, como a base $AC = b$, $S = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$. ■

**16.** $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{2} = 3 \text{ cm}^2$.

[2] O antigo livro chinês Jiuzhang Suanshu contém 246 problemas. Para a solução de alguns, é necessário o uso do gou gu, ou seja, do Teorema de Pitágoras. O problema 12está no Capítulo 9 do Jiuzhang.
Fonte: PIC−OBMEP-Livro 3.

**17.** Temos $CD = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = BC \cdot \operatorname{tg}\beta$. Como $AC = BC + d$, vem $(BC + d) \cdot \operatorname{tg}\alpha = BC \cdot \operatorname{tg}\beta$. Daí,

$$BC = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

e

$$CD = BC \cdot \operatorname{tg}\beta = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$$

**18.** (Extraído do material do IMPA/PAPMEM.)

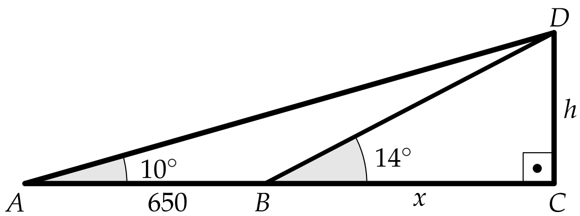



Figura 9

Sejam $h$ a altura do Pão de Açúcar e $x$ a distância de $B$ ao pé da altura (figura 9). Então, teremos que

$$\operatorname{tg} 14^\circ = \frac{h}{x} = 0,2493 \text{ e } \operatorname{tg} 10^\circ = \frac{h}{650 + x} = 0,1763.$$

Após resolver o sistema, chegaremos a $h = 391,4$.

**Comentário para professores:**
Um dos instrumentos de medida usuais, baseado nas funções trigonométricas, é o teodolito (figura 10), que faz medidas de ângulos com imensa precisão na vertical e na horizontal[3].

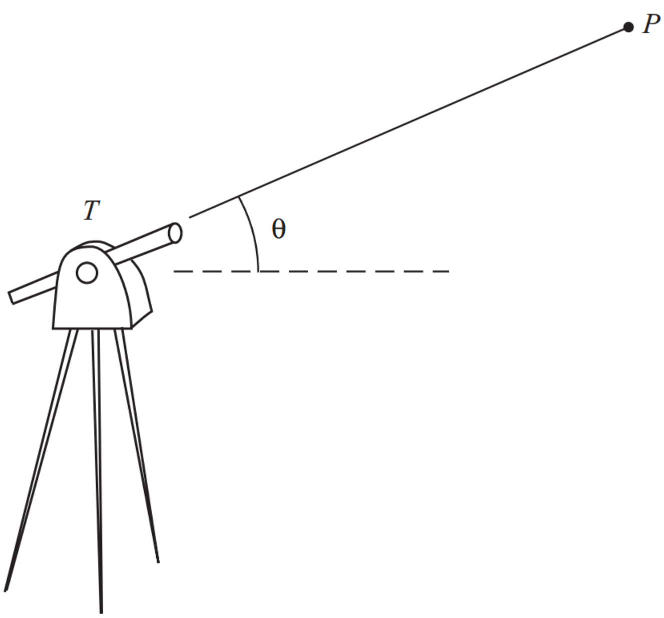



Figura 10: Teodolito.

[3]Imagem: Capítulo 4, ensinomedio.impa.br, acesso em 2004.

**19.** A justaposição das figuras não geram os triângulos retângulos maiores que aparentam estar no desenho[4]. No triângulo menor, temos que o ângulo agudo da base tem $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{2}{5}$ e no maior, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{3}{8}$. Logo, a figura 11 não é um triângulo (nem a figura 12), por isso, na reorganização, surge um quadradinho branco. Após a movimentação, a suposta "hipotenusa" da figura grande muda levemente a curvatura, avançando a diferença de 1 quadradinho que surge.

**20.** (Adaptado de vestibular da UFPR.)
Sendo $h$ a altura do prédio e $x$ a distância do observador até o prédio no primeiro momento, logo

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{x}.$$

No segundo momento,

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h-2}{x+49}.$$

Comparando o valor de $x$ na duas equações, obtemos $h = 72$ metros.

**21.** (Extraído do Geogebra.org)

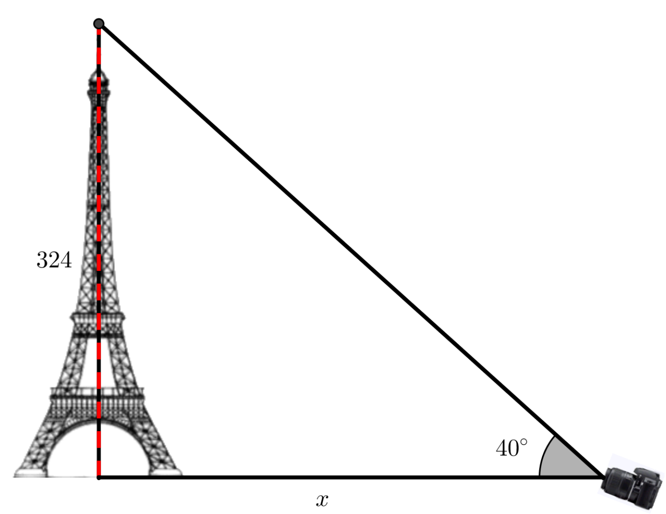



Figura 13

Usando que $\operatorname{tg} 40^\circ = \dfrac{324}{x}$, obteremos que $x \cong 385,72$ metros. (a aproximação foi para "cima", se a fizéssemos para baixo poderíamos perder parte da antena da torre).

**22.** (Extraído do site `www.tutorbrasil.com.br`)
Construindo a figura 15 e analisando-a, podemos concluir que

[4]Tal ilusão é conhecida como o "Paradoxo do quadrado perdido"

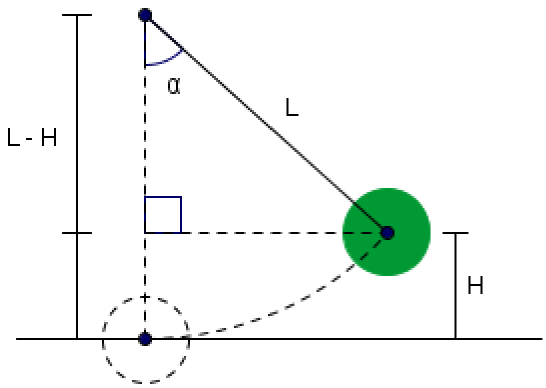



Figura 15

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{L-H}{L}\\ L-H &= L\cdot\cos\alpha\\ H &= L\cdot(1-\cos\alpha).\end{aligned}$$

**23.** (Extraído do site `www.tutorbrasil.com.br`) Começando pelo cálculo do valor do outro cateto $x$.

$$\begin{aligned}(3a)^2 &= a^2+x^2\\ x^2 &= 8a^2\\ x &= 2a\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Daí, $x > a$ e esta é a medida do maior cateto. Portanto, o lado menor é o que mede $a$ e o cosseno do seu ângulo oposto $\alpha$ será a razão $\cos\alpha = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

**24.** (Extraído do site Clubes de Matemática da OBMEP) Observe que após $k$ horas, $k \in \mathbb{R}$, Maria estará a $3k$ km de sua casa e João a $10-6k$ da casa dela. A distância $d$ entre eles será a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo $3k$ e $10-6k$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos que

$$\begin{aligned}d^2 &= (3k)^2+(10-6k)^2\\ &= 9k^2+100-120k+36k^2\\ &= 45k^2-120k+100.\\ d &= \sqrt{45k^2-120k+100}\end{aligned}$$

Para calcular a menor distância, devemos minimizar a expressão $\sqrt{45k^2-120k+100}$. Uma boa estratégia é escrevê-la como soma de um trinômio quadrado perfeito e o quadrado de um número real:

$$\begin{aligned}\sqrt{45k^2-120k+100} &=\\ \sqrt{45\left(k^2-\frac{120k}{45}+\frac{100}{45}\right)} &=\\ \sqrt{45\left(k^2-2\cdot k\cdot\frac{60}{45}+\frac{20}{9}\right)} &=\\ \sqrt{45\left(k^2-2\cdot k\cdot\frac{4}{3}+\frac{20}{9}\right)} &=\\ \sqrt{45\left(k^2-2\cdot k\cdot\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}\right)} &=\\ \sqrt{45\left[\left(k^2-2\cdot k\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)+\frac{4}{9}\right]} &=\\ &= \sqrt{45\left[\left(k-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right]}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Para qualquer número real $k$, temos

$$\left(k-\frac{4}{3}\right)^2 \geq 0,$$

o que equivale a fizer que seu valor mínimo é zero e isso ocorre apenas quando $k = \frac{4}{3}$. Substituindo a raiz indicada em (1), o valor mínimo será

$$\sqrt{45\cdot\frac{4}{9}} = 2\sqrt{5}\text{ km}.$$

Por curiosidade, isso ocorre $\frac{4}{3}$ hora após a saída de ambos, ou seja, após 1 hora e 20 minutos.

**25.** Na figura 17, sejam $C_1B = y$ e $TA = x$.

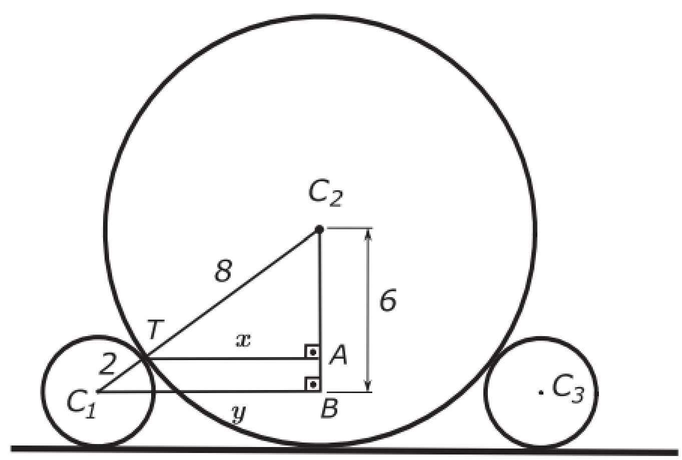



Figura 17

No $\triangle C_1BC_2$, usando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} y^2 + 6^2 &= (8+2)^2 \\ y &= 8 \qquad (2) \end{aligned}$$

Daí, temos que $\triangle C_2TA \equiv C_2C_1B$, já que $TA||C_1B$, logo

$$\begin{aligned} \frac{10}{8} &= \frac{y}{x} \\ x &= 6,4. \qquad (3) \end{aligned}$$

De (2) e (3) obtemos o caminho mais curto fazendo

$$2 + x + x + 2 = 4 + 2 \cdot 6,4 = 16,8 \text{ cm}.$$

**26.** Seja $S$ a área do $\triangle ABC$, então $S_2 = S - S_1$. Tomando como base o ângulo $A\hat{B}C = \beta$, teremos que:

$$\begin{aligned} S &= \frac{12 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}; \\ S_1 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}; \text{ e} \\ S_2 &= \frac{12 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\dfrac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}}{\dfrac{12 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2} - \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos concluir que $S_1 = S_2$.

**27.** (Extraído do exame do PROFMAT/2014)
Seja $x$ o cateto oposto a $30°$. Então $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{x}{200} = 0,57$. Logo, $x = 114\ m$ e a altura do morro é de $x = 114 + 1,6 = 115,6$ m. Portanto, resposta é letra **D**.

**28.** (Extraído do exame do PROFMAT/2014)
Como a hipotenusa mede 13 e um dos catetos mede 5, pelo Teorema de Pitágoras, o outro cateto mede 12. Os ângulos agudos terão tangentes iguas a $\dfrac{5}{12}$ e $\dfrac{12}{5}$. Portanto $\dfrac{5}{12} + \dfrac{12}{5} \cong 2,8$ e a resposta é letra **E**.

**29.** (Extraído da OBMEP – 2012)
Sendo $AY = y$, $B\hat{P}X = \alpha$ e $A\hat{P}Y = \beta$, observe que

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Como $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{1}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{y}{2}$ chegamos a $AY = \dfrac{2}{x}$. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned} BX^2 + BP^2 &= PX^2 \\ PX &= \sqrt{x^2+1}, \text{ e} \\ AP^2 + AY^2 &= PY^2 \\ PY &= \sqrt{4 + \frac{4}{x^2}}. \end{aligned}$$

A área do triângulo hachurado, em função de $x$, fica

$$\begin{aligned} (XPY) &= \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{4 + \dfrac{4}{x^2}}}{2} \\ &= x + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Como $x$ é um número positivo, podemos aplicar a desigualdade das médias (aritmética $\geq$ geométrica), obtendo

$$\begin{aligned} \frac{x + \dfrac{1}{x}}{2} &\geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \\ x + \frac{1}{x} &\geq 2. \end{aligned}$$

O que conclui que o menor valor de $x + \dfrac{1}{x}$ é 2 e ocorre quando $x = 1$. Para $x = 1$, temos $(XPY) = 2$ u.a..

**30.** (Extraído do exame do PROFMAT/2014)
Sejam $BD = y$ e $BE = x$. Portanto, no $\triangle BDC$, temos que $\cos\alpha = \dfrac{y}{5}$, no $\triangle BED$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{y}$ e no $\triangle BAE$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{x}$. Resolvendo esse sistema, teremos que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ e, portanto, a resposta é letra **B**.

**31.** Temos $A\hat{B}C = B\hat{C}A = 72°$, pois $ABC$ é isósceles de base $BC$ (figura 22).

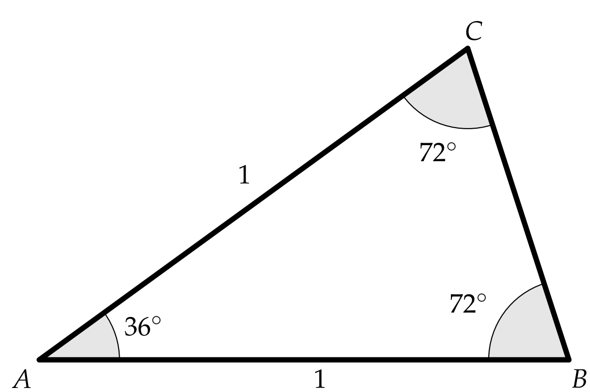



Figura 22

A bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ encontra $AC$ no ponto $D$ e separa os triângulos isósceles $ABD$, de base $AB$, e $BDC$, de base $DC$. Donde segue que

$$CD = AD = BC = x$$

e

$$BD = 1 - x$$

(figura 23).

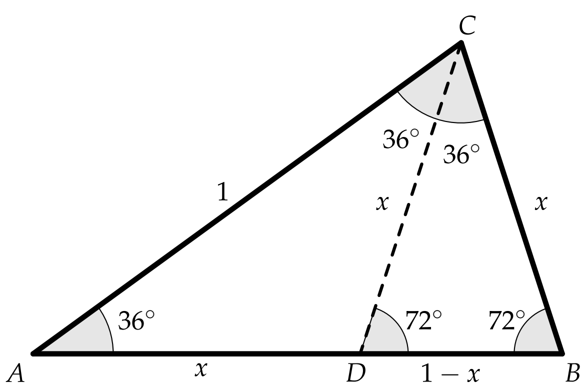


Figura 23

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, teremos

$$\begin{aligned} \frac{x}{1} &= \frac{1-x}{x} \\ x^2 &= 1-x \\ x^2+x-1 &= 0 \\ x &= \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Ficamos com $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, pois $x > 0$. A bissetriz de $B\hat{A}C$ (que contém as altura e mediana relativas a $BC$) tem interseção com $BC$ em $H$. (figura 24).

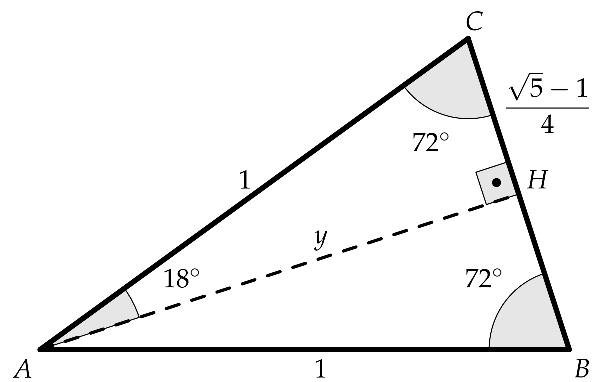


Figura 24

No $\triangle AHB$, retângulo em $H$, teremos que calcular o valor do cateto $AH = y$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + y^2 &= 1^2 \\ 5-2\sqrt{5}+1+16y^2 &= 16 \\ 16y^2 &= 10+2\sqrt{5} \\ y &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

Obtemos assim

a) $\operatorname{sen} 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;

b) $\operatorname{sen} 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ e $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

**32.** (Extraído do vestibular da ESPM/2014)
Sejam $r$ e $s$ as retas representadas da figura 25, onde $s$ é a tracejada. Denomine a projeção de $A$ na reta $r$ como o $B$. Então, $\cos 60^\circ = \dfrac{PB}{8}$ e $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{AB}{8}$. Portanto, $AB = 4\sqrt{3}\ km$ e $PB = 4\ km$. Chame de $B'$ a projeção de $A'$ na reta $r$. Perceba que $AB = A'B' = 4\sqrt{3}\ km$. Consequentemente, $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{4\sqrt{3}}{PB'}$, isto é, $PB' = 12\ km$. Por fim, $AA' = 8$ km. Como o avião percorreu essa distância em dois minutos, em uma hora iria percorrer $8 \cdot 30 = 240\ km$. Assim, a resposta é a letra **B**.

**33.** Usando os valores da figura 26, teremos pela proposição 1 que $\dfrac{(ABD)}{(CBD)} = \dfrac{x}{y}$.

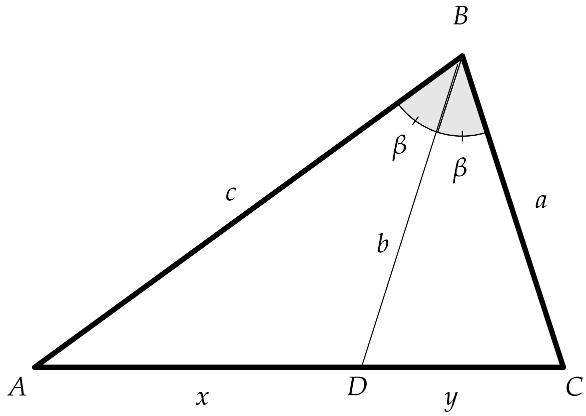


Figura 26

Aplicando o resultado do exercício 15 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{cb \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}}{\frac{ab \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}} &= \frac{x}{y}\\
\frac{c}{a} &= \frac{x}{y}\\
\frac{AD}{AB} &= \frac{DC}{CB}.
\end{aligned}$$

O que demonstra a proposição 2. ∎

**Comentário para professores:** A proposição 2 é conhecida também como "Teorema da Bissetriz Interna" ou, pela forma lúdica, "Teorema da Bailarina". Esse segundo nome deve-se ao truque de memorização usado para lembrar das razões ennvolvidas em seu enunciado que podem ser associados a um movimento de Balé (figura 27).

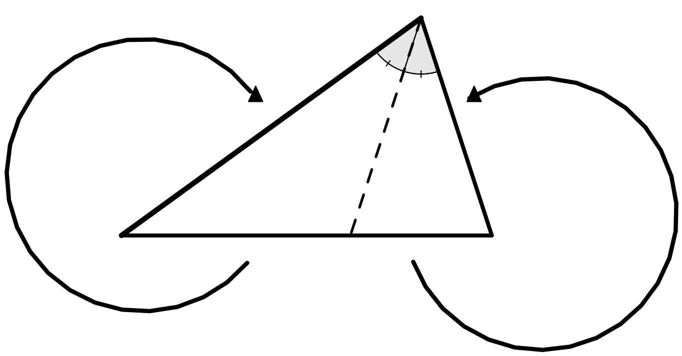


Figura 27

Em resumo, num $\triangle ABC$ com bissetriz $BD$, $D \in AC$, como na figura 26, temos que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{CB}.$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com