

# Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau

## Introdução às Inequações do Segundo Grau

1º ano E.M.



## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Determine os valores reais de  $x$  para os quais  $x^2 - 6x + 8 > 0$ .

**Exercício 2.** Resolva em  $\mathbb{R}$  a inequação  $-5t^2 + 20t \geq 15$ .

**Exercício 3.** Para quais valores reais de  $x$  temos  $-x^2 - 2 < -2x$ ?

**Exercício 4.** Resolva em  $\mathbb{R}$  a inequação  $4x(x - 1) > -1$ .

**Exercício 5.** Determine quais valores de  $x$  fazem parte do conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} < 0\}$ .

**Exercício 6.** Para quais valores reais de  $x$  o trinômio  $-4x^2 + 2x - 1/4$  é não negativo?

**Exercício 7.** Resolva em  $\mathbb{R}$  a inequação  $(x - 3)^2 < 5$ .

**Exercício 8.** Determine o maior domínio  $D$  possível para a função  $f(x) = \sqrt{x/3 - x^2}$ .

**Exercício 9.** Mostre que a soma de três números naturais (não considere o zero) consecutivos é menor ou igual ao produto dos dois maiores.

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 10.** Resolva a inequação em  $\mathbb{R}$ .

$$(x - 1)(x + 1) + 2(x + 2) \leq 2(2x + 1)$$

**Exercício 11.** Para quais valores reais de  $x$  é válida a inequação  $\sqrt{2x - 8} + 8 < x$ ?

**Exercício 12.** Dada a constante  $m \in \mathbb{R}$ , para quais valores reais de  $n$  vale a inequação  $n^2 - 2n + m > 0$ ?

**Exercício 13.** Considere a inequação  $ax^2 + bx + c > 0$ , onde  $a > 0$ . Mostre que se o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , então a inequação é válida para todo  $x$  real.

**Exercício 14.** Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \geq 0$ . Mostre a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática:  $\frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ .

**Exercício 15.** Para todo  $n$  inteiro e positivo, mostre que  $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ .

**Exercício 16.** Um grupo de cinco jovens empreendedoras resolveu expandir sua produção de biquínis. Seus custos mensais são de R\$500 com publicidade e R\$20 para a produção de cada peça. Elas esperam que as vendas sigam a "curva de demanda" ( $n^\circ$  de peças vendidas no mês)  $n = 800 - 2p$ , onde  $p$  é o preço de cada peça. Por exemplo, se um biquíni custa R\$400 elas não vendem nenhum deles. Se custa R\$200 elas conseguem vender  $800 - 2 * 200 = 400$  peças. Se cada uma delas quer lucrar pelo menos R\$5000 por mês, qual o valor mínimo de cada peça?

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 17.** Resolva em  $\mathbb{R}$  a inequação  $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$ .

**Exercício 18.** Determine  $m \in \mathbb{R}$  para que se tenha  $x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 1 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 19.** Determine  $m \in \mathbb{R}$  para que se tenha  $mx^2 + 8x < 6 - m$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 20.** Determine  $m \in \mathbb{R}$  para os quais o domínio da função  $f(x) = \sqrt{(m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3}$  é o conjunto dos números reais.

**Exercício 21.** Para quais valores reais de  $m$  a inequação  $x^2 - (m - 3)x + m > 0$  é válida para todo  $x \in [1, 2]$ ?

**Exercício 22.** Mostre que  $2x^2 + 5y^2 \geq 4xy$ .

**Exercício 23.** Mostre que para  $x, y, z \in \mathbb{R}$  vale a inequação  $x^2 + y^2 + z^2 + 4 > 2(x + y + z)$ .

**Exercício 24.** Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , mostre que  $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ .

## Respostas e Soluções.

1. Defina  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ . As raízes de  $f$  têm soma 6 e produto 8, logo são 2 e 4. Temos  $a = 1 > 0$ , logo

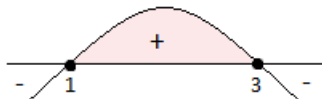
$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } 2 < x < 4 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = 2 \text{ ou } x = 4 \\ f(x) > 0 & \text{para } x < 2 \text{ ou } x > 4. \end{cases}$$



Como a inequação é  $f(x) > 0$ , o conjunto-solução é  $S = \{x \in \mathbb{R}; x < 2 \text{ ou } x > 4\}$ .

2. Para facilitar as contas dividimos toda a inequação por 5 e definimos  $f(t) = -t^2 + 4t - 3$ . Temos  $a = -1 < 0$ ,  $\Delta = 4 > 0$  e raízes  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 3$ , então

$$\begin{cases} f(t) < 0 & \text{para } x < 1 \text{ ou } x > 3 \\ f(t) = 0 & \text{para } x = 1 \text{ ou } x = 3 \\ f(t) > 0 & \text{para } 1 < x < 3. \end{cases}$$



Como a inequação é  $f(t) \geq 0$ , o conjunto-solução é  $S = \{t \in \mathbb{R}; 1 \leq t \leq 3\}$ .

3. Podemos completar quadrados fazendo

$$-x^2 + 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 1 + 1) = -(x - 1)^2 - 1 < 0$$

para todo  $x$ , ou definindo  $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ , temos  $a = -1 < 0$ ,  $\Delta = -4 < 0$ , logo  $f(x) < 0$  para todo  $x$  real.

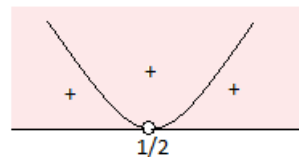


Assim, a inequação é válida para todo  $x$  real.

4. Definindo  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ ,  $a = 4 > 0$ ,  $\Delta = 0$  e a raiz dupla é  $x = 1/2$ , então

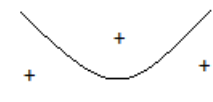
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{para } x = 1/2 \\ f(x) > 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}. \end{cases}$$

Como a inequação é  $f(x) > 0$ , o conjunto-solução é  $S = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ .



De outra maneira, temos  $4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - x + 1/4) > 0 \Leftrightarrow 4(x - 1/2)^2 > 0$ , que é válido para todo  $x \neq 1/2$ , onde o valor é nulo.

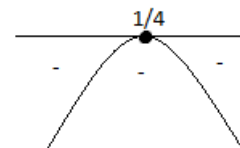
5. Multiplicando a inequação por 12 para facilitar as contas e definindo  $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$ , temos  $a = 4 > 0$  e  $\Delta = -12 < 0$ , logo  $f(x) > 0$  para todo  $x$ . Segue que  $A = \emptyset$ .



6. Definindo  $f(x) = -4x^2 + 2x - 1/4$ , temos  $a = -4 < 0$ ,  $\Delta = 0$  e a raiz dupla  $x = 1/4$ . Logo

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{para } x = 1/4 \\ f(x) < 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{1/4\}. \end{cases}$$

Como a inequação é  $f(x) \geq 0$ , o conjunto-solução é o unitário  $S = \{1/4\}$ .



De outra maneira, temos  $-4x^2 + 2x - 1/4 = -(2x - 1/2)^2 \leq 0$ . Logo, só pode ser não negativo sendo igual a zero. Assim,  $x = 1/4$ .

7.  $(x - 3)^2 < 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 < 0$ . Definindo  $f(x) = x^2 - 6x + 4$ , temos  $a = 1 > 0$ ,  $\Delta = 20 > 0$  e suas raízes são  $3 - \sqrt{5}$  e  $3 + \sqrt{5}$ . Logo

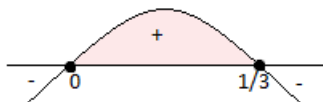
$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5} \\ f(x) = 0 & \text{para } x = 3 - \sqrt{5} \text{ ou } x = 3 + \sqrt{5} \\ f(x) > 0 & \text{para } x < 3 - \sqrt{5} \text{ ou } x > 3 + \sqrt{5}. \end{cases}$$



Como a inequação é  $f(x) < 0$ , o conjunto-solução é  $S = \{x \in \mathbb{R}; 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}\}$ .

8. Para  $f$  estar bem definida devemos ter  $x/3 - x^2 \geq 0$ . Definindo  $g(x) = x/3 - x^2 = x(1/3 - x)$ , temos  $a = -1 < 0$  e raízes  $x = 0$  e  $x = 1/3$ . Então

$$\begin{cases} g(x) < 0 & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > 1/3 \\ g(x) = 0 & \text{para } x = 0 \text{ ou } x = 1/3 \\ g(x) > 0 & \text{para } 0 < x < 1/3. \end{cases}$$



Como o desejado é  $g(x) \geq 0$ , o maior domínio possível é  $D = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1/3\}$ .

9. Denote os números por  $x, x + 1$  e  $x + 2$ . Temos

$$\begin{aligned} x + (x + 1) + (x + 2) &\leq (x + 1)(x + 2) \\ \Leftrightarrow 3x + 3 &\leq (x + 1)(x + 2) \\ \Leftrightarrow 3(x + 1) &\leq (x + 1)(x + 2) \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2 - 3) &\geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Aqui, podemos usar os métodos para resolver inequações-produto. Mas, vamos definir  $f(x) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , e analisar o sinal de  $f$ .



Temos  $f(x) \geq 0$  para  $\{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$ . Como a inequação vale para todo  $x \geq 1$ , real, em particular, vale para todo natural.

10.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 1) + 2(x + 2) &\leq 2(2x + 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 + 2x + 4 - 4x - 2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, \end{aligned}$$

já que  $(x - 1)^2 \geq 0$  para todo  $x$  e  $(x - 1)^2 = 0$  apenas se  $x - 1 = 0$ . Assim  $S = \{1\}$ .

11. Reescreva como  $\sqrt{2x - 8} < x - 8$ . Para a raiz estar bem definida devemos ter  $2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x > 4$ . Para a raiz não ser negativa devemos ter  $x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 8$ . Aqui,  $x > 8$ .

$$\sqrt{2x - 8} < x - 8 \Leftrightarrow 2x - 8 < (x - 8)^2 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 72 > 0.$$

Defina  $f(x) = x^2 - 18x + 72$ . A função  $f$  é positiva para  $x < 6$  ou  $x > 12$ . Como temos  $x > 8$ , então devemos ter  $x > 12$ . Assim, a inequação é válida para  $x$  real,  $x > 12$ .

12. Considere a função  $f(n) = n^2 - 2n + m$ . Como  $a = 1 > 0$ , seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima. Calculando o discriminante temos  $\Delta = 4 - 4m$ . Temos três situações possíveis:

$\Delta < 0$ . Isto acontece para  $m > 1$ . Nesse caso o gráfico de  $f$  não toca o eixo das abscissas e a função é positiva para todo valor de  $n$ .

$\Delta = 0$ . Isto acontece para  $m = 1$ . Nesse caso o gráfico de  $f$  toca o eixo das abscissas apenas no vértice da parábola ( $n_v = -b/2a = 2/2 = 1$ ) e, portanto, é positiva para  $n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$\Delta > 0$ . Isto acontece para  $m < 1$ . Nesse caso, o gráfico de  $f$  toca o eixo das abscissas em dois pontos  $n_1$  e  $n_2$ , e a função é positiva para  $n \in (-\infty, n_1) \cup (n_2, +\infty)$ . Os valores de  $n_1$  e  $n_2$  são  $n_1 = (2 - \sqrt{4 - 4m})/2 = 1 - 2\sqrt{1 - m}$  e  $n_2 = 1 + 2\sqrt{1 - m}$ .

Resumindo, se  $m > 1$ , o conjunto solução é  $S = \mathbb{R}$ , se  $m = 1$ ,  $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  e, se  $m < 1$ ,  $S = (-\infty, 1 - 2\sqrt{1 - m}) \cup (1 + 2\sqrt{1 - m}, +\infty)$ .

13. Podemos escrever  $ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) > 0$ . Para a inequação ser válida, basta que  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$ , já que  $a > 0$ . Completando quadrados

$$\begin{aligned} x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} &> 0 \\ \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &> 0, \end{aligned}$$

a qual é válida para todo  $x$ , já que  $\Delta < 0$ .

14. Como os dois lados da desigualdade são não negativos

$$\begin{aligned} \frac{(x + y)^2}{4} &< \frac{x^2 + y^2}{2} \\ \Leftrightarrow (x + y)^2 &< 2(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 &< 2x^2 + 2y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 &> 0, \end{aligned}$$

a qual é válida para qualquer  $x, y$  reais.

15. Vamos mostrar as duas inequações separadamente. Usando que se  $x, y \geq 0$  e  $x < y$ , então  $x^2 < y^2$ , da primeira inequação:

$$\begin{aligned} \sqrt{4n + 1} &< \sqrt{n} + \sqrt{n + 1} \\ \Leftrightarrow 4n + 1 &< n + 2\sqrt{n}\sqrt{n + 1} + n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n &< 2\sqrt{n}\sqrt{n + 1} \\ \Leftrightarrow n &< \sqrt{n}\sqrt{n + 1} \\ \Leftrightarrow n^2 &< n(n + 1) \\ \Leftrightarrow n^2 &< n^2 + n \\ \Leftrightarrow 0 &< n, \end{aligned}$$

que é válido pois  $n$  é positivo.

Da segunda inequação:

$$\begin{aligned}\sqrt{n} + \sqrt{n+1} &< \sqrt{4n+2} \\ \Leftrightarrow n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + n + 1 &< 4n + 2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} &< 2n + 1 \\ \Leftrightarrow 4n(n+1) &< 4n^2 + 4n + 1 \\ \Leftrightarrow 4n^2 + 4n &< 4n^2 + 4n + 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< 1,\end{aligned}$$

que é sempre válido.

16.

$$\text{Custo} = 500 + 20n = 500 + 20(800 - 2p) = 16500 - 40p$$

$$\text{Receita} = np = (800 - 2p)p = 800p - 2p^2$$

$$\text{Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo} = -2p^2 + 840p - 16500$$

Como queremos que cada uma tenha pelo menos R\$5000 de lucro, elas precisam que o lucro total seja de pelo menos R\$25000. Assim, temos que resolver a inequação

$$-2p^2 + 840p - 16500 \geq 25000,$$

que equivale a resolver

$$-p^2 + 420p - 20750 \geq 0.$$

A função  $f(p) = -p^2 + 420p - 20750$  é não negativa em  $[p_1, p_2]$ , onde  $p_1$  e  $p_2$  são suas raízes. Portanto, o menor preço procurado é o valor de  $p_1$  (se não negativo). Calculando  $p_1 = \frac{-420 + \sqrt{93400}}{-2} \approx 57,19 > 0$ . Concluimos que elas devem vender cada peça por pelo menos R\$57,19.

17. Fazendo  $z = x^2$ , temos

$$z^2 - 10z + 9 \geq 0 \Rightarrow z \leq 1 \quad \text{ou} \quad z \geq 9;$$

mas  $z = x^2$ , logo

$$\begin{aligned}(x^2 \leq 1 \quad \text{ou} \quad x^2 \geq 9) &\Leftrightarrow (x^2 - 1 \leq 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 9 \geq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 1 \quad \text{ou} \quad x \leq -3 \quad \text{ou} \quad x \geq 3).\end{aligned}$$

Logo  $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -3 \quad \text{ou} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{ou} \quad x \geq 3\}$ .

18. Para  $f(x) = x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 1$  ser não negativa para todo  $x$ , devemos ter  $a > 0$  e  $\Delta \leq 0$ . Se  $\Delta < 0$ ,  $f(x) > 0$  para todo  $x$ . Se  $\Delta = 0$ ,  $f(x) > 0$  para todo  $x$  diferente do  $x$  do vértice da parábola, onde  $f(x) = 0$ .

$$a = 1 > 0 \text{ para qualquer valor de } m;$$

$$\begin{aligned}\Delta = (2m - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1) &\leq 0 \Leftrightarrow -12m + 13 \leq 0 \\ \Leftrightarrow m &\geq 13/12.\end{aligned}$$

Logo, devemos ter  $m \geq 13/12$ .

19. Considere  $f(x) = mx^2 + 8x + m - 6$ . Para  $f(x)$  ser negativa para todo  $x$  devemos ter  $a < 0$  e  $\Delta < 0$ .

$$a = m < 0;$$

$$\begin{aligned}\Delta = 64 - 4m(m - 6) < 0 &\Leftrightarrow -m^2 + 6m + 16 < 0 \\ \Leftrightarrow m < -2 \quad \text{ou} \quad m > 8.\end{aligned}$$

Das duas condições concluímos que  $m < -2$ .

20. Considerando  $g(x) = (m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3$ , para que o domínio da função  $f$  seja  $\mathbb{R}$ , devemos ter  $g(x) \geq 0$  para todo valor de  $x$ . Então, para a função  $g$ , devemos ter  $a > 0$  e  $\Delta \leq 0$ , portanto

$$a = m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2;$$

$$\begin{aligned}\Delta = (-2m)^2 - 4(m - 2)(2m - 3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -m^2 + 7m - 6 &\leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1 \quad \text{ou} \quad m \geq 6.\end{aligned}$$

Das duas condições concluímos que  $m \geq 6$ .

21. Solução 1. Seja  $f(x) = x^2 - (m - 3)x + m$ . Como  $a = 1 > 0$ , o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima e intersecta o eixo  $x$  em 0, 1 ou 2 pontos a depender do sinal de  $\Delta$ .

$$\Delta = (m - 3)^2 - 4m = m^2 - 10m + 9$$

Temos três casos:

1º) Se  $\Delta < 0$ ,  $f(x) > 0$  para todo  $x$  real, em particular para  $x \in [1, 2]$ .  $\Delta < 0$  se  $1 < m < 9$ .

2º) Se  $\Delta = 0$ ,  $f(x) > 0$  para todo  $x$  diferente do  $x_v = -b/2a = (m - 3)/2$ . Então, basta que  $x_v \notin [1, 2]$ . Temos  $\Delta = 0$  se  $m = 1$  ou  $m = 9$ . Se  $m = 1$ ,  $x_v = -1$  e se  $m = 9$ ,  $x_v = 3$ . Logo,  $x_v \notin [1, 2]$  para esses valores de  $m$ .

3º) Se  $\Delta > 0$ ,  $f(x) > 0$  em  $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são raízes de  $f(x)$ . Assim, devemos ter  $[1, 2] \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ , o que acontece se  $2 < x_1$  ou  $x_2 < 1$ .  $\Delta > 0$  se  $m < 1$  ou  $m > 9$ .

• Se  $2 < x_1$

$$\begin{aligned}2 < x_1 &\Leftrightarrow 2 < \frac{m - 3 - \sqrt{m^2 - 10m + 9}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 10m + 9} < m - 7\end{aligned}$$

Se  $m < 1$ ,  $m - 7 < 0 \Rightarrow \sqrt{m^2 - 10m + 9} < 0$ , o que não é válido. Suponha  $m > 9$ . Como a desigualdade se conserva com o quadrado dos termos, temos  $m^2 - 10m + 9 < m^2 - 14m + 49 \Leftrightarrow m < 10$ . Aqui,  $9 < m < 10$ .

• Se  $x_2 < 1$

$$\begin{aligned}x_2 < 1 &\Leftrightarrow \frac{m - 3 + \sqrt{m^2 - 10m + 9}}{2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 10m + 9} < 5 - m\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, temos aqui  $m < 1$ .

Unindo todas as opções possíveis:  $(1, 9) \cup \{1, 9\} \cup (9, 10) \cup (-\infty, 1) = (-\infty, 10)$ .

**21.** Solução 2. Seja  $f(x) = x^2 - (m - 3)x + m$ . O gráfico de  $f$  é uma parábola com concavidade voltada para cima, já que  $a = 1 > 0$ . A questão nos pede os valores de  $m$  tais que o pedaço da parábola referente ao intervalo  $[1, 2]$  esteja acima do eixo  $x$ . Sabemos que  $f$  atinge seu valor mínimo no vértice  $x_v = (m - 3)/2$ . Vamos considerar três casos:

1º)  $x_v \in [1, 2] \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 7$ . Como todo o gráfico está acima do vértice, basta que  $f(x_v) > 0$ . Isto acontece se  $4m > (m - 3)^2$ , de onde obtemos  $1 < m < 9$ . Das duas condições temos  $m \in [5, 7]$ .

2º)  $x_v < 1 \Leftrightarrow m < 5$ . Como o  $x_v$  está à esquerda do intervalo de interesse, a função será crescente nele, então basta que seja positiva em  $x = 1$ .  $f(1) = 1 - m + 3 + m = 4 > 0$ , para qualquer valor de  $m$ . Aqui, basta  $m \in (-\infty, 5)$ .

3º)  $2 < x_v \Leftrightarrow m > 7$ . Como o  $x_v$  está à direita do intervalo de interesse, a função será decrescente nele, então basta que seja positiva em  $x = 2$ .  $f(2) > 0 \Leftrightarrow m < 10$ . Das duas condições  $m \in (7, 10)$ .

Unindo todos os valores de  $m$  para os quais  $f > 0$ , temos  $[5, 7] \cup (-\infty, 5) \cup (7, 10) = (-\infty, 10)$ .

**22.** Vamos completar quadrados. Para facilitar as contas multiplique a equação por 2, obtendo

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8xy + 10y^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2y + (2y)^2 + 6y^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 2y)^2 + 6y^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Outra solução: Se  $y = 0$ , a inequação é óbvia. Supondo  $y \neq 0$ , dividindo a inequação por  $y^2$  e denotando  $z = x/y$ , temos  $2z^2 - 4z + 5 \geq 0$ . Esta inequação tem  $a = 2 > 0$  e  $\Delta < 0$ , logo é válida para todo  $z \in \mathbb{R}$ . E, por sua vez, a anterior é válida para todo  $(x, y)$  com  $y \neq 0$ .

**23.** A inequação equivale a  $(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) + (z^2 - 2z) + 4 \geq 0$ . Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) + 4 - 3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + 1 &\geq 1 > 0. \end{aligned}$$

**24.** Como  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ , note que a inequação equivale a

$$\begin{aligned} 2ab + 2bc + 2ca &\leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$