

# Módulo Resolução de Exercícios

## Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum

6° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda



## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Calcule o MDC dos seguintes números.

- a) 20 e 30.
- b) 72 e 90.
- c) 150 e 210.

**Exercício 2.** Calcule o MMC dos seguintes números.

- a) 6, 8 e 12.
- b) 18 e 24.
- c) 60, 80 e 90.

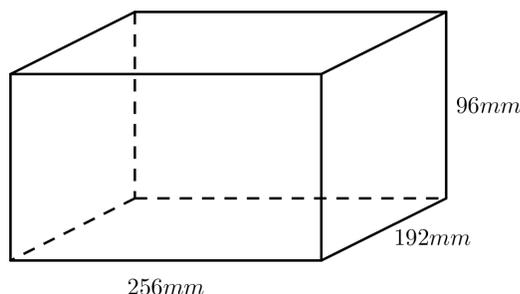
**Exercício 3.** Luciana possui 36 maçãs, 60 laranjas e 84 ameixas e precisa montar cestas de frutas de maneira que todas as cestas tenham a mesma quantidade de maçãs, a mesma quantidade de laranjas e a mesma quantidade de ameixas. Quantas frutas cada cesta possuirá se a quantidade de cestas deve ser a menor possível e todas as frutas sejam utilizadas?

**Exercício 4.** Um sinal luminoso tem três lâmpadas: uma vermelha, uma azul e uma laranja. A lâmpada azul pisca a cada minuto e meio, a lâmpada vermelha pisca a cada dois minutos e a laranja pisca a cada dois minutos e quinze segundos. Se as 8h elas piscaram juntas, que horas elas voltarão a piscar juntas novamente?

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 5.** Sejam  $A$  e  $B$  dois números naturais. Se  $MDC(A, B) = 20$  e  $MMC(A, B) = 240$ , determine o produto  $A \cdot B$ .

**Exercício 6.** Um pedaço de doce de leite tem a forma de um paralelepípedo retângulo, como indica a figura abaixo. O doce deve ser dividido totalmente em cubos iguais, cada um com  $x$  milímetros de aresta. O maior valor inteiro de  $x$  é:



- a) 16.
- b) 18.
- c) 24.
- d) 30.

e) 32.

**Exercício 7.** Calcular  $m$ , no número  $A = 2^{m-1} \cdot 3^2 \cdot 5^m$ , de modo que o MDC entre o número  $A$  e o número 900 seja 45.

- a) 0.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 1.

**Exercício 8.** Seja  $n!$ , onde  $n$  é natural e maior que 1, igual ao produto de  $n$  por todos os naturais menores que  $n$  e diferentes de zero. Por exemplo,  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Determine  $MDC(10!, 15!)$  e  $MMC(10!, 15!)$ .

**Exercício 9.** De Salvador parte um ônibus para Feira de Santana a cada 2 horas e meia e para a Praia do Forte a cada 3 horas. Os dois primeiros ônibus para estas localidades partem juntos às 8h da segunda-feira e às 22h da sexta-feira não parte mais nenhum ônibus até a próxima segunda-feira. Quantas vezes em uma semana dois ônibus partem juntos?

**Exercício 10.** O MMC entre  $A = 2^2 \cdot 3^k$  e 78 é 12.636. Quanto vale  $k$ ?

**Exercício 11.** O MMC de dois números é 300 e o MDC desses números é 6. O número inteiro que representa o quociente entre o maior desses números pelo menor:

- a) tem 4 divisores positivos.
- b) é um número primo.
- c) tem 6 divisores positivos.
- d) é um múltiplo de 11.
- e) pode ser 2.

**Exercício 12.** Uma folha de papel retangular de 360mm de comprimento por 210mm de largura deve ser quadriculada, sendo todos os quadrados idênticos, como um tabuleiro de xadrez, por exemplo. Se a quantidade dos quadrados deve ser a menor possível e a medida dos lados deve ser um número inteiro, em milímetros, qual deve ser essa medida?

**Exercício 13.** Determine o menor valor que devemos subtrair de 13.000 para que o resultado seja divisível por 36, 42 e 64.

**Exercício 14.** Determine o valor de  $A$ , sendo  $MDC(A, 72) = 18$  e  $MMC(A, 72) = 360$ .

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 15.** De um terminal integrado de ônibus, os carros de três linhas de ônibus partem de acordo com os seguintes intervalos:

- (a) Linha 1: de 18 em 18 minutos.

(b) Linha 2: de 30 em 30 minutos.

(c) Linha 3: de 45 em 45 minutos.

Obedecendo rigorosamente a esses intervalos, se, em um dia da semana, um ônibus de cada uma das três linhas sair pontualmente às 6h da manhã, qual será o horário seguinte, desse mesmo dia, em que um ônibus de cada uma das três linhas sairá novamente ao mesmo tempo?

- a) 6h 30min.
- b) 7h.
- c) 7h 30 min.
- d) 8h.
- e) 8h 30 min.

**Exercício 16.** Para enfeitar as mesas da festa de aniversário de Mariana, serão confeccionados potes de vidro nos quais serão colocadas balas coloridas nos seus interiores. Para isto, temos 1.540 balas vermelhas, 2.730 balas verdes e 2.380 balas brancas. Cada pote deverá conter exatamente a mesma quantidade total de balas e a mesma quantidade de balas de uma mesma cor. O número máximo de potes que podem ser confeccionados desta maneira é:

- a) 30 potes.
- b) 70 potes.
- c) 77 potes.
- d) 91 potes.
- e) 119 potes.

**Exercício 17.** Uma enorme pista circular para pequenos carrinhos de corrida foi construída. Haverá uma corrida entre três carrinhos: amarelo, verde e azul, que devem percorrer toda a pista por diversas voltas seguidas. O amarelo completa toda a extensão da pista em exatamente 1 hora e 15 minutos, o azul, em 1 hora e 40 minutos e o verde, em 1 hora e 30 minutos. Se os três partem da largada, ao mesmo tempo, às 12 horas do dia da inauguração da pista, o tempo mínimo necessário para que os três carrinhos juntos cruzem a linha de largada novamente é de:

- a) 10 horas.
- b) 12 horas.
- c) 15 horas.
- d) 16 horas.
- e) 18 horas.

**Exercício 18.** Observe as engrenagens na figura. Quantas voltas a engrenagem com 12 dentes deve dar para que a engrenagem com 9 dentes dê 200 voltas?



- a) 120.
- b) 150.
- c) 180.
- d) 240.
- e) 266.

**Exercício 19.** O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

- 1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
- 2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
- 3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é:

- a) 2.
- b) 4.
- c) 9.
- d) 40.
- e) 80.

**Exercício 20.** Para curar uma infecção dentária de Bento, o Dr. Tiradentes prescreveu o tratamento descrito na receita abaixo.

Para o Sr. Bento

1. Remédio verde:

1 comprimido de 6 em 6 horas,

tomar com um copo de água cheio.

5 caixas de 12 comprimidos.

2. Remédio azul:

1 comprimido de 5 em 5 horas,

tomar com um copo de água cheio.

5 caixas de 13 comprimidos.

Atenção: Na coincidência de horários dos dois remédios, tomar os dois comprimidos apenas com um copo de leite cheio.

Marcar nova consulta após terminar a medicação.

Dr. Tiradentes

Ouro Preto, 21 de abril de 1785.

Bento iniciou o tratamento às 6 horas da manhã do dia 22 de abril de 1785, tomando um comprimido verde e um azul. Quantos copos de água e quantos de leite Bento tomou por causa do tratamento?

- a) 60 copos de água e 65 de leite.
- b) 100 copos de água e 14 de leite.
- c) 103 copos de água e 11 de leite.
- d) 114 copos de água e 11 de leite.
- e) 125 copos de água e nenhum de leite.

**Respostas e Soluções.**

1.

20,	30	2
10,	15	5
2,	3	
		$2 \cdot 5 = 10$

a)

72,	90	2
36,	45	3
12,	15	3
4,	5	
		$2 \cdot 3^2 = 18$

b)

150,	210	2
75,	105	3
25,	35	5
5,	7	
		$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

c)

2.

6,	8,	12	2
3,	4,	6	2
3,	2,	3	2
3,	1,	3	3
1,	1,	1	
			$2^3 \cdot 3 = 24$

a)

18,	24	2
9,	12	2
9,	6	2
9,	3	3
3,	1	3
1,	1	
		$2^3 \cdot 3^2 = 72$

b)

60,	80,	90	2
30,	40,	45	2
15,	20,	45	2
15,	10,	45	2
15,	5,	45	3
5,	5,	15	3
5,	5,	5,	5
1,	1,	1	
			$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

c)

3. Basta calcular o MDC entre as três quantidades:

36,	60,	84	2
18,	30,	42	2
9,	15,	21	3
3,	5,	7	
			$2^2 \cdot 3 = 12$

Portanto, serão  $2^2 \cdot 3 = 12$  cestas, cada uma com 3 maçãs, 5 laranjas e 7 ameixas.

4. Precisamos calcular o MMC dos três tempos, em segundos, 90, 120 e 135:

90,	120,	135	2
45,	60,	135	2
45,	30,	135	2
45,	15,	135	3
15,	5,	45	3
5,	5,	15	3
5,	5,	5	5
1,	1,	1	
			$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

Temos então que elas piscarão juntas novamente depois de  $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1.080$  segundos, que é o mesmo que  $\frac{1080}{60} = 18$  minutos, ou seja, piscarão juntas novamente às 8 horas e 18 minutos.

5. Como vale a propriedade geral  $A \cdot B = MDC(A, B) \cdot MMC(A, B)$  para quaisquer inteiros positivos  $A$  e  $B$ , segue que  $A \cdot B = 4800$ .

6. (Extraído do Colégio Naval/Vídeo Aula) Como queremos o maior valor inteiro de  $x$ , basta calcularmos o MDC entre 256, 192 e 96:

256,	192,	96	2
128,	96,	48	2
64,	48,	24	2
32,	24,	12	2
16,	12,	6	2
8,	6,	3	
			$2^5$

Portanto, o maior valor de  $x$  é 32. Resposta E.

7. (Extraído do Colégio Naval/Vídeo Aula) Temos inicialmente que  $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ . Além disso,  $45 = 3^2 \cdot 5$ . Assim, como  $MDC(A, 900)$  possui apenas um fator 5, este deve figurar na decomposição de  $A$  apenas uma vez, ou seja,  $m = 1$ . Da mesma forma, na existe o fator 2 no  $MDC(A, 900)$ , o que significa que não deve existir também em  $A$  e novamente temos  $m = 1$ . Resposta E.

8. Como, na fatoração de  $15!$ , aparecem todos os fatores de  $10!$ , então  $15!$  é múltiplo de  $10!$ . Sendo assim,  $MDC(10!, 15!) = 10!$  e  $MMC(10!, 15!) = 15!$ .

9. Calculando o MMC entre os tempos de cada viagem, 150 min e 180 min, temos:

150,	180	2
75,	90	2
75,	45	3
25,	15	3
25,	5	5
5,	1	5
1,	1	
		$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Assim, dois ônibus partem juntos de  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$  em 900 minutos, ou seja, de 15h em 15h. Como das 8h da manhã de segunda às 22h de sexta são  $4 \cdot 24 + 14 = 110h$ , sairão ônibus juntos 8 vezes em uma semana.

10. Temos que  $78 = 2 \cdot 39$  e  $12.636 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 39$ . Para que  $MMC(A, 78) = 12.636$ ,  $A$  deve ter o fator 3 exatamente 4 vezes, ou seja  $k = 4$ .

11. (Extraído do Colégio Naval - Adaptada/Vídeo Aula) Sejam  $a$  e  $b$ ,  $a < b$ , estes números, então temos que  $MMC(a, b) = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$  e  $MDC(a, b) = 6 = 2 \cdot 3$ . O fator 5, não pode ser comum a ambos já que não pertence ao MDC, então 5 não divide  $a$  e 25 divide  $b$ , pois  $5^2$  é fator do MMC. 3 é fator do MDC e MMC apenas uma vez, então é fator tanto de  $a$  quanto de  $b$ . 2 é fator duas vezes do MMC e uma vez do MDC, então é fator uma vez de  $a$  e duas de  $b$ . Temos então  $a = 6$  e  $b = 300$ . Portanto,  $\frac{b}{a} = \frac{300}{6} = 50$ . Resposta C.

12. Basta calcularmos o MDC entre 360 e 210.

360,	210	2
180,	105	3
60,	35	5
12,	7	
		$2 \cdot 3 \cdot 5$

Portanto, a medida inteira do lado do quadrado é  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30mm$ .

13. Vamos procurar o número natural, múltiplo comum de 36, 42 e 64, mais próximo, e menor, de 13.000.

36,	42,	64	2
18,	21,	32	2
9,	21,	16	2
9,	21,	8	2
9,	21,	4	2
9,	21,	2	2
9,	21,	1	3
3,	7,	1	3
1,	7,	1	7
1,	1,	1	
			$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$

Como  $MMC(36, 42, 64) = 4.032$ , os múltiplos de 4.032, serão múltiplos comuns de 36, 42 e 64. Assim, o mais próximo e menor que 13.000 é  $4032 \cdot 3 = 12.096$ . Temos que subtrair de 13.000, 904.

14. Como  $MDC(A, B) \cdot MMC(A, B) = A \cdot B$ , sendo  $A$  e  $B$  dois inteiros positivos, temos  $18 \cdot 360 = A \cdot 72$ , segue que  $A = 90$ .

15. (Extraído do Colégio Militar do Rio de Janeiro - 2016 - Adaptado) Calculando  $MMC(18, 30, 45)$ , temos:

18,	30,	45	2
9,	15,	45	3
3,	5,	15	3
1,	5,	5	5
1,	1,	1	
			$2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Temos então que  $MMC(18, 30, 45) = 90$ , ou seja, o próximo horário, depois das 6h, a partirem ônibus das três linhas será às 7h e 30min. Resposta C.

16. (Extraído do Colégio Militar do Rio de Janeiro - 2015) Calculando o MDC entre 1.540, 2.730 e 2.380, temos:

1540,	2730,	2380	2
770,	1365,	1190	5
154,	273,	238	7
22,	39,	34	
			$2 \cdot 5 \cdot 7$

Assim, a quantidade de potes é  $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ . Resposta B.

17. (Extraído do Colégio Militar do Rio de Janeiro - 2015) Calculando o  $MMC$  dos três tempos, 75min, 100min e 90min, temos:

75,	100,	90	2
75,	50,	45	2
75,	25,	45	3
25,	25,	15	3
25,	25,	5	5
5,	5,	1	5
1,	1,	1	
			$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Como  $MMC(75, 100, 90) = 900$ , os carrinhos se encontrarão novamente na largada depois de  $900min = 15h$ . Resposta C.

18. (Extraído da OBMEP - 2015) A engrenagem do meio não influencia em nada no sistema, pois o número de dentes que andar a primeira (da esquerda), será exatamente igual ao número de dentes que andar a terceira (da direita). Vamos calcular agora, depois de quantas voltas de cada, após o início do funcionamento do sistema, estas duas engrenagens voltarão a ter sua configuração inicial. Como a primeira voltará a sua posição inicial a cada 12 dentes e a terceira a cada 9 dentes, as duas juntas voltarão a sua posição inicial a cada  $MMC(9, 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$  dentes, ou seja, a cada 3 voltas da primeira e 4 voltas da terceira. Se a terceira engrenagem der  $200 = 50 \cdot 4$  voltas, então a primeira dará  $50 \cdot 3 = 150$  voltas. Resposta B.

19. (Extraído do ENEM - 2015) O número mínimo de escolas será obtido calculando o número máximo de ingressos que cada escola receberá. Este por sua vez pode ser calculado pelo MDC entre 400 e 320. Temos então:

400,	320	2
200,	160	2
100,	80	2
50,	40	2
25,	20	5
5,	4	
		$2^4 \cdot 5$

Temos então que o número de ingressos por escola deverá ser  $2^4 \cdot 5 = 80$ , sendo que 5 escolas serão contempladas para a sessão vespertina e 4 para a sessão noturna, ou seja, 9 escolas. Resposta C.

20. (Extraído da OBMEP) Como o remédio verde deve ser tomado de 6 em 6 horas e o azul de 5 em 5 horas, os dois juntos serão tomados nas horas múltiplas de  $MMC(5, 6) = 30$ . Além disso, são  $5 \cdot 12 = 60$  comprimidos do remédio verde e  $5 \cdot 13 = 65$  comprimidos do remédio azul. No caso do remédio verde, o primeiro comprimido foi tomado no início do tratamento (hora zero), o segundo depois de 6 horas, o terceiro depois de 12 horas e assim por diante, até o último, que foi tomado depois de  $6 \cdot (60 - 1) = 354$  horas, sendo que as horas múltiplas de 30 foram 12 (0, 30, 60, ..., 270, 300, 330). No caso do remédio azul, o primeiro comprimido foi tomado no início do tratamento (hora zero), o segundo depois de 5 horas, o terceiro depois de 10 horas e assim por diante, até o último, que foi tomado depois de  $5 \cdot (65 - 1) = 320$  horas, sendo que as horas múltiplas de 30 foram apenas 11 (0, 30, 60, ..., 270, 300). Sendo assim, o total de copos de leite tomados foram 11 e o total de copos de água foram  $60 - 11 + 65 - 11 = 103$ . Resposta C.