

Módulo de Áreas de Figuras Planas

Áreas de Figuras Planas: Resultados Básicos

Nono Ano

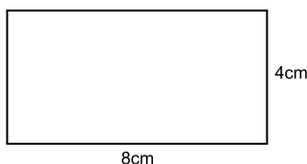


Área de Figuras Planas: Resultados Básicos

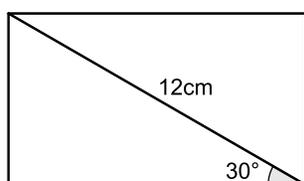
1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a área dos retângulos abaixo:

a)



b)



Exercício 2. Determine a área de um quadrado

a) cujo lado mede 8cm.

b) cujo lado mede 7,1cm.

c) cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm.

d) cuja diagonal mede 6cm.

Exercício 3. Determine a medida do lado de um quadrado cuja área é

a) 25cm^2 .

b) 12cm^2 .

Exercício 4. Determine a área de um losango

a) cujas diagonais medem 5cm e 8cm.

b) cujo lado mede 5cm e a diagonal menor mede 6cm.

c) cujo lado mede 8cm e um dos ângulos internos mede 120° .

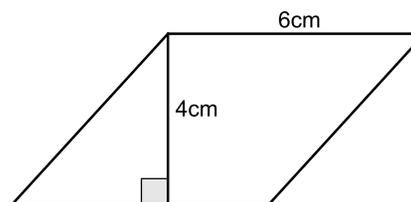
Exercício 5. Determine a área de um trapézio de bases medindo 5cm e 7cm e altura medindo 4cm.

Exercício 6. Determine a área de um quadrado cujo perímetro é 72cm.

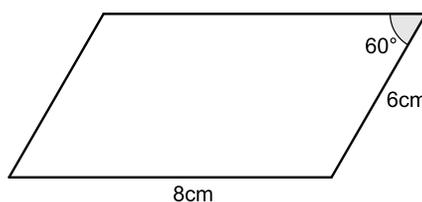
Exercício 7. Determine a área de um trapézio isósceles cujos bases têm 6cm e 12cm de medida e os outros lados, 5cm.

Exercício 8. Calcule a área dos paralelogramos abaixo

a)

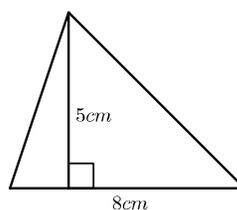


b)

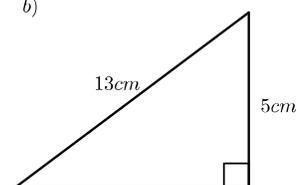


Exercício 9. Calcule a área dos triângulos abaixo.

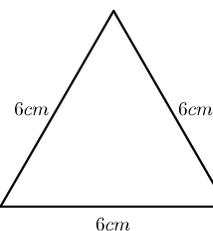
a)



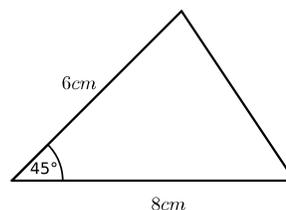
b)



c)



d)



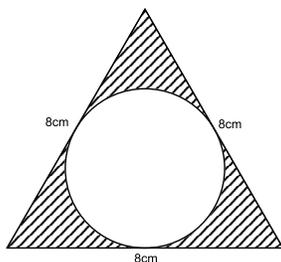
2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. A altura de um retângulo é a metade de sua base. Se sua área é 450m^2 , determine suas dimensões.

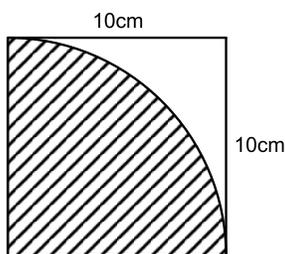
Exercício 11. Aumentando em 10% o comprimento de um retângulo e diminuindo em 10% sua largura, determine sua nova área, sabendo que a área inicial era 100cm^2 .

Exercício 12. Determine a área hachurada nas figuras abaixo.

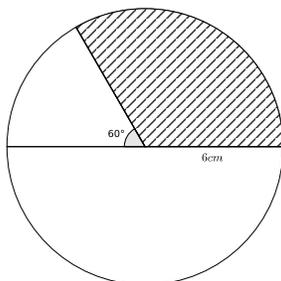
a)



b)



c)

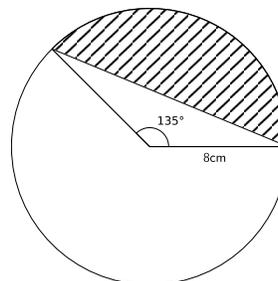


Exercício 13. A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça. (Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar 2012). Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30cm e 15cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

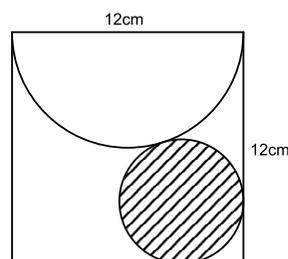
- (a) 4% (b) 20% (c) 36% (d) 64% (e) 96%.

Exercício 14. Determine a área hachurada nas figuras abaixo.

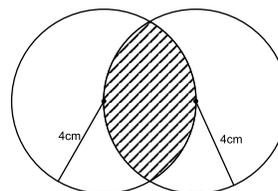
a)



b)



c)



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento x no comprimento e y na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5-x)(3-y)$.

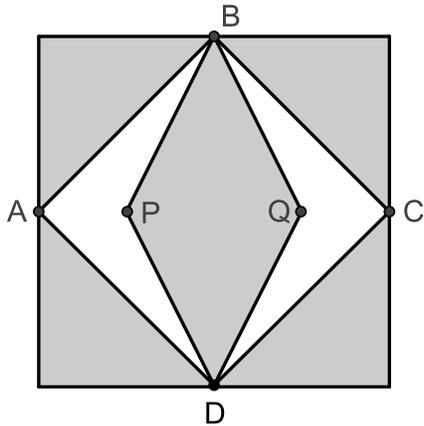
Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por

- (a) $2x$ (b) $15 - 3x$ (c) $15 - 5x$ (d) $-5y - 3x$
 (e) $5y + 3x - xy$.

Exercício 16. Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de



quadrados de lado medindo $1m$, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado de área $1m$ e os segmentos AP e QC medem $1/4$. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa $R\$30,00$ o m^2 e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$), que custa $R\$50,00$ o m^2 . De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- (a) $R\$22,50$ (b) $R\$35,00$ (c) $R\$40,00$ (d) $R\$42,50$ (e) $R\$45,00$.

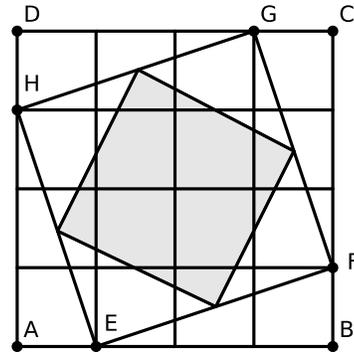
Exercício 17. Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros ABE, BCF, CDG e DAH . Qual a área do quadrilátero $EFGH$?

- a) 2 b) $2\sqrt{3}$ c) $2 + \sqrt{3}$ d) 3 e) 6.

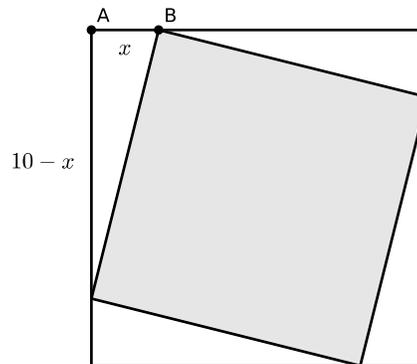
Exercício 18. O quadrado $ABCD$ da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado $EFGH$.

- a) A área do quadrado $EFGH$ corresponde a que fração da área do quadrado $ABCD$?
- b) Se o quadrado $ABCD$ tem $80cm^2$ de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

Exercício 19. Um prefeito quer construir uma praça quadrada de $10m$ de lado, que terá canteiros triangulares



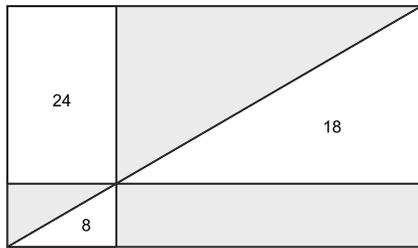
iguais de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, por isso o comprimento deste segmento AB está indicado por x na figura.



- a) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.
- b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x .
- c) Sabe-se que o canteiro de grama custa $R\$4,00$ por metro quadrado e os canteiros de pedra custam $R\$3,00$ por metro quadrado. Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

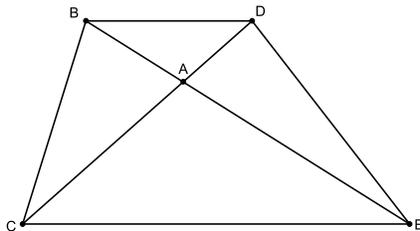
Exercício 20. O retângulo da figura foi repartido por meio de três segmentos em várias regiões, algumas retangulares e outras triangulares. A linha não paralela aos lados é uma diagonal e os números indicam as áreas em m^2 das regiões brancas em que se encontram. Qual é a do retângulo original?

- (a) $60cm^2$ (b) $80cm^2$ (c) $90cm^2$ (d) $100cm^2$ (e) Impossível saber.

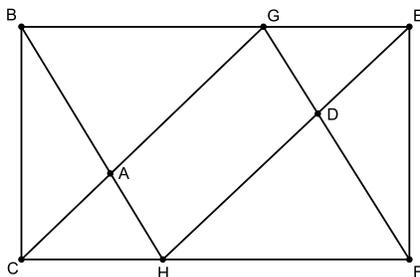


Exercício 21.

- a) Temos abaixo um trapézio e suas diagonais. Mostre que a área do triângulo ABC é igual à área do triângulo ADE .



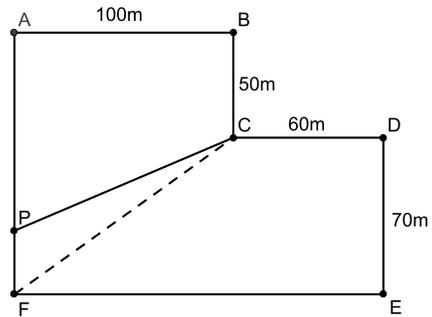
- b) Na figura a seguir, $BCFE$ é um retângulo, o triângulo ABC tem área 5cm^2 e o triângulo DEF tem área 4cm^2 . Calcule a área do quadrilátero $AGDH$.



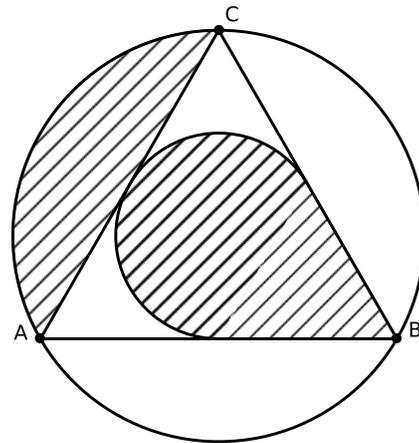
Exercício 22. João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono $ABCDEF$. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P . Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP ?

- a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 20.

Exercício 23. Seja $ABCD$ um retângulo tal que $AD = 6$ e $DC = 8$. Construa um triângulo equilátero CED tal que E, A e B estão no mesmo semi-plano determinado pela reta CD . Determine a área do triângulo AEC .



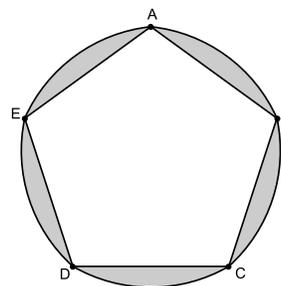
Exercício 24. Considere o triângulo ABC inscrito em uma circunferência em que os menores arcos AB, BC e AC são congruentes.



Se a circunferência menor, inscrita ao triângulo ABC , tem raio igual a 1cm , então o número que representa a área hachurada, em cm^2 , é igual ao número que representa

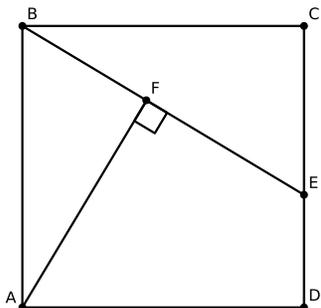
- a) o comprimento do círculo menor, em cm .
 b) a área do círculo maior em cm^2 .
 c) o comprimento do círculo maior, em cm .
 d) o dobro da área do triângulo ABC , em cm^2 .

Exercício 25. Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular de lado a e os arcos AB, BC, CD, DE e EA são congruentes e arcos de circunferência cujo raio mede a . Assim, determine a área hachurada nessa figura, em

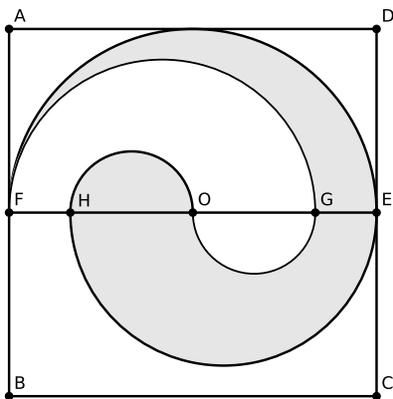


função de "a".

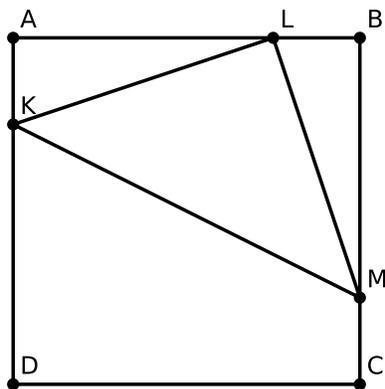
Exercício 26. Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 12 e BE é um segmento de comprimento 16. Determine o comprimento do segmento AF .



Exercício 27. Dado o quadrado $ABCD$ de lado 2. Sejam O o centro do quadrado e E e F os pontos médios dos lados AB e CD . Se os segmentos FH e GE são iguais e os arcos FE, EH, GO, OG, FG são semicircunferências, encontre a área sombreada.



Exercício 28. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 4, K pertence ao lado AD , L pertence ao lado AB , M pertence ao lado BC e KLM é um triângulo retângulo isósceles, sendo L o ângulo reto. Então a área do quadrilátero $CDKM$ é igual a



- a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $A = 8 \cdot 4 = 32cm^2$.

b) A altura h mede $12 \cdot \sin 30^\circ = 6cm$ e a base b mede $12 \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}cm$. Assim

$$A = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}cm^2.$$

2.

a) $A = 8^2 = 64cm^2$.

b) $A = 7,1^2 = 50,41cm^2$.

c) $A = (\sqrt{3})^2 = 3cm^2$.

d) Se a diagonal mede $6cm$, o lado mede $3\sqrt{2}cm$, então a área é $A = (3\sqrt{2})^2 = 18cm^2$.

3.

a) $l = \sqrt{25} = 5cm$.

b) $l = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}cm$.

4.

a) $A = (5 \cdot 8)/2 = 20cm^2$.

b) Se $2b$ é o comprimento da outra diagonal, como as diagonais de um losango são perpendiculares, usando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 + 3^2 &= 5^2 \\ b &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ b &= 4. \end{aligned}$$

Portanto, a outra diagonal mede $8cm$ e a área do losango vale $A = 24cm^2$.

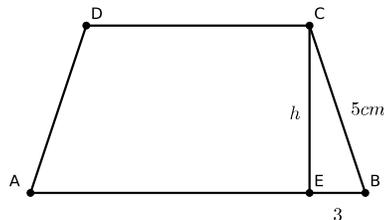
c) Dois ângulos internos consecutivos de um losango são suplementares. Assim, um de seus ângulos internos será 60° . Temos, então, dois triângulos equiláteros de lados medindo $8cm$. A área de cada um deles é $\frac{8^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, a área do losango é $2 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}cm^2$.

5. $A = \frac{4(5+7)}{2} = 24cm^2$.

6. Podemos usar o Teorema de Pitágoras para encontrarmos a altura h .

$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ h &= 4. \end{aligned}$$

Daí, segue que $A = \frac{4(6+12)}{2} = 36cm^2$.



7.

a) $A = 6 \cdot 4 = 24cm^2$.

b) Temos que a altura do paralelogramo mede $6 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$. Daí, segue que $A = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}cm^2$.

8.

a) $A = (8 \cdot 5)/2 = 20$.

b) Pelo Teorema de Pitágoras, a medida do outro cateto é $12cm$. Daí, segue que $A = (12 \cdot 5)/2 = 30$.

c) $A = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}cm^2$.

d) $A = \frac{6 \cdot 8 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 12\sqrt{2}cm^2$.

2 Exercícios de Fixação

9. Se o perímetro é $72cm^2$, então o lado é $72/4 = 18cm$, segue que $A = 18^2 = 324cm^2$.

10. Chamando a altura de x , a base é $2x$. Temos, então, que $2x^2 = 450$. Daí segue que $x = 15$. Portanto, as dimensões do retângulo são $15cm$ e $30cm$.

11. Sendo x e y as dimensões iniciais, temos $xy = 100$. Após as modificações nas dimensões, sua área será

$$A = 0,9x \cdot 1,1y = 0,99 \cdot 100 = 99cm^2.$$

12.

a) A altura de um triângulo de lado 8 é $(8\sqrt{3})/2 = 4\sqrt{3}$. Como o raio do círculo inscrito é a terça parte da altura do triângulo, o raio do círculo do desenho mede $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Assim, a área da região hachurada pode ser calculada pela diferença entre as áreas do triângulo equilátero e do círculo.

$$\begin{aligned} A_{hachurada} &= A_{\text{triângulo equilátero}} - A_{\text{círculo}} \\ A &= \frac{8^2\sqrt{3}}{4} - \pi \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} \\ &= \frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{3} cm^2 \end{aligned}$$

- b) A área hachurada é a diferença entre as áreas do quadrado e do setor circular (quarta parte do círculo).

$$\begin{aligned} A_{hachurada} &= A_{\text{quadrado}} - A_{\text{setor}} \\ &= 10^2 - \frac{10^2\pi}{4} \\ &= 100 - 25\pi \\ &= 25(4 - \pi)cm^2 \end{aligned}$$

- c) A medida do ângulo do setor circular é $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, que equivale a $1/3$ do círculo. Temos, então

$$A = \frac{6^2\pi}{3} = 12\pi cm^2.$$

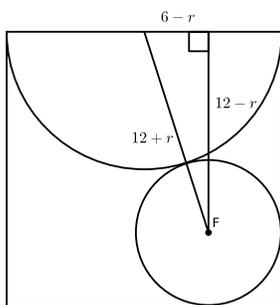
13. (Extraído do ENEM 2013) Como a área inicial era $30 \cdot 15 = 450cm^2$ e a área final ficou $(30 - 6)(15 - 3) = 288cm^2$, sua redução foi de $\frac{450 - 288}{450} = 0,36 = 36\%$. Resposta C.

14.

- a) A área hachurada é a diferença entre as áreas do setor circular e do triângulo. Temos então

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{8}\pi 8^2 - \frac{8 \cdot 8 \cdot \text{sen } 135^\circ}{2} \\ &= 24\pi - 16\sqrt{2} \\ &= 8(\pi - \sqrt{2})cm^2 \end{aligned}$$

- b) Para o cálculo do raio r , utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo formado pela reta que passa pelos centros das duas circunferências, pelo centro da circunferência menor e é perpendicular ao lado do quadrado e pelo lado do quadrado como indica a figura abaixo.



Os lados deste triângulo são $(6 + r)$, $(6 - r)$ e $(12 - r)$. Temos, então

$$\begin{aligned} (6 + r)^2 &= (6 - r)^2 + (12 - r)^2 \\ 12r &= -12r + 144 - 24r + r^2 \\ r^2 - 48r + 144 &= 0 \\ r &= 12(2 - \sqrt{3})cm \end{aligned}$$

Assim, a área do círculo menor é $\pi[12(2 - \sqrt{3})]^2 = 144(7 - 4\sqrt{3})cm^2$

- c) Traçando um segmento pelos pontos de intersecção das circunferências, teremos dois segmentos circulares, cujas áreas são a diferença entre as áreas dos setores circulares e dos triângulos gerados. A medida do ângulo destes setores é 120° , pois pode-se formar dois triângulos equiláteros ligando os centros das circunferências e seus pontos de intersecção. A distância entre estes pontos de intersecção é $4\sqrt{3}cm$, pois é o dobro da altura de um dos triângulos. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{4^2\pi}{3} - \frac{4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 120^\circ}{2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) \\ &= 4 \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right) cm^2 \end{aligned}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

15. (Extraído do ENEM 2012) A área perdida é a diferença entre as áreas inicial e final. Temos, então

$$\begin{aligned} A &= 15 - (5 - x)(3 - y) \\ &= 15 - 15 + 3x + 5y - xy \\ &= 5y + 3x - xy \end{aligned}$$

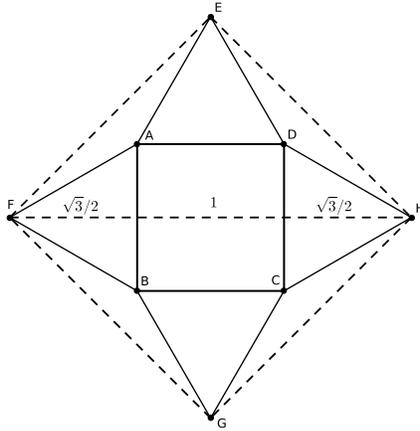
Resposta E.

16. (Extraído do ENEM 2012) Calculando a área $ABPD$, temos

$$\begin{aligned} [ABPD] &= [ABD] - [PBD] \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} - \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8}m^2 \end{aligned}$$

Consequentemente, a soma das áreas não sombreadas é $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ e a área restante é $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Temos, então, que o custo é $\frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{3}{4} \cdot 30 = 12,50 + 22,50 = R\$35,00$. Resposta B.

17. (OBM 2014) Como cada triângulo equilátero tem altura $\frac{\sqrt{3}}{2}$, as diagonais do quadrado $EFGH$ medem $1 + \sqrt{3}$, e sua área pode ser calculada como $\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$. Resposta C.



18. (Extraído da OBMEP 2005)

a) Sendo a o lado de cada quadrado, temos

$$\begin{aligned} [EFGH] &= [ABCD] - 4[AEH] \\ &= 16a^2 - 6a^2 \\ &= 10a^2 = \frac{10}{16}[ABCD] \end{aligned}$$

b) Sendo A a área do quadrado sombreado, temos

$$\begin{aligned} A &= [EFGH]/2 \\ &= \frac{10}{32}[ABCD] \\ &= 25cm^2 \end{aligned}$$

Portanto, o lado do quadrado sombreado é $5cm$.

19. (extraído da OBMEP 2005)

a) A área de cada canteiro de pedra para $x = 2$ vale $\frac{2 \cdot 8}{2} = 8$. Assim, a área do canteiro de grama é $100 - 4 \cdot 8 = 68m^2$.

b) A área de cada canteiro triangular é dada pela expressão $\frac{x(10-x)}{2}$. Assim, a área do canteiro de grama é dada por:

$$100 - 4 \cdot \frac{x(10-x)}{2} = 2x^2 - 20x + 100m^2$$

c) Como a diferença entre os preços das coberturas de pedra e grama é de 1, o custo total é o mesmo que gastar 3 por metro quadrado em todo o quadrado e 1 extra pela área dos canteiros de grama, ou seja, o custo total é:

$$3 \cdot 100 + 1 \cdot (2x^2 - 20x + 100) = 2x^2 - 20x + 400.$$

Fatorando a expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 20x + 200 &= 2(x-5)^2 + 350 \\ &\geq 0^2 + 350 \\ &= 350. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre apenas quando $x = 5$. Assim, o prefeito precisa de pelo menos $R\$150,00$ reais.

20. (OBM 2014) Como a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos de mesma área, as áreas dos triângulos sombreados são $8m^2$ e $18m^2$. Observando, agora, o retângulo original, sua diagonal o dividiu em dois triângulos, sendo um deles com área $24 + 8 + 18 = 50m^2$, ou seja, a área do retângulo original é $100m^2$. Resposta D.

21. (Extraído da OBM 2013)

a) Como $A_{CBE} = A_{EDC}$, pois possuem a mesma base e mesma altura, então, decompondo ambas as áreas, $A_{ABC} + A_{ACE} = A_{ADE} + A_{ACE}$, segue que $A_{ABC} = A_{ADE}$.

b) Traçando o segmento GH , temos, pelo item anterior, que $A_{AGH} = A_{ABC} = 5cm^2$ e $A_{DGH} = A_{DEF} = 4cm^2$. Temos então que $A_{AGDH} = A_{AGH} + A_{DGH} = 5 + 4 = 9cm^2$.

22. (Extraído da OBM 2012) Como a área total do terreno é $160 \cdot 120 - 60 \cdot 50 = 16200m^2$, cada parte deverá ter $8100m^2$. Calculando a área do trapézio $ABCP$, temos

$$\begin{aligned} [ABCP] &= 8100 \\ \frac{(120 - x + 50)100}{2} &= 8100 \\ 170 - x &= 162 \\ x &= 8m. \end{aligned}$$

Resposta B.

23. (Extraído da OBM 2012) Se P o pé da altura do $\triangle DEC$ no lado DC , então $EP = 4\sqrt{3}$. Temos que

$$\begin{aligned} [AEC] &= [AECD] - [ACD] \\ &= [AEPD] + [ECP] - [ACD] \\ &= \frac{4(6 + 4\sqrt{3})}{2} + \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} - 24 \\ &= 12 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 24 \\ &= 16\sqrt{3} - 12 \\ &= 4(4\sqrt{3} - 3). \end{aligned}$$

24. (Extraído da EPCAR 2014) Como os arcos são congruentes, o $\triangle ABC$ é equilátero, sendo 120° a medida do seu ângulo central e a medida do raio da circunferência maior o dobro do raio da menor, ou seja, 2cm . Dividiremos a área hachurada em três partes:

- i) área de $2/3$ do círculo menor, que é $2\pi/3$;
- ii) área do segmento do círculo maior, que é $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$;
- iii) área do quadrilátero formado por dois segmentos perpendiculares aos lados do triângulo partindo do centro do círculo menor, que é $\sqrt{3}$.

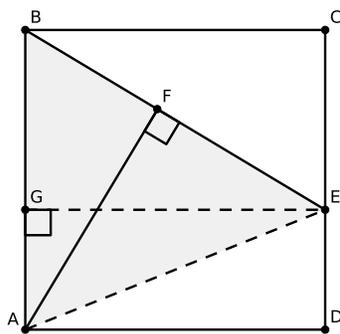
Portanto, a área hachurada é $2\pi/3 + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\pi$. Resposta A.

25. (Extraído da EPCAR 2013 - Adaptada) Sendo cada uma das cinco partes hachuradas a área de um segmento circular de uma circunferência de raio que mede a , temos que a área hachurada é $5\left(\frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

26. A área do triângulo ABE é $\frac{AB \cdot GE}{2} = 72$. Assim, aplicando a mesma fórmula de área para a base BE e a altura AF , temos:

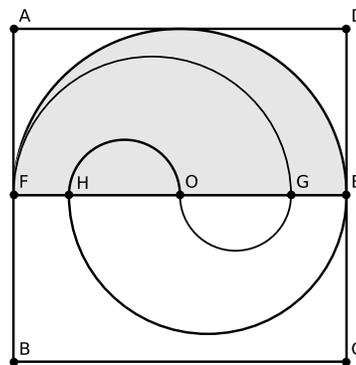
$$72 = \frac{AF \cdot BE}{2} = \frac{AF \cdot 16}{2} = 8AF.$$

Portanto, o comprimento de AF é $\frac{72}{8} = 9$.



27. Como $FH = GE$, temos $HO = FO - FH = OE - GE = OG$. Consequentemente o semicírculo de diâmetro HO possui a mesma área do semicírculo de diâmetro OG . Além disso, a área entre os arcos FG e HO é igual à área entre os arcos GO e HE . Consequentemente, a área procurada corresponde a área de um semicírculo de diâmetro FE . Como o raio do semicírculo de diâmetro FE mede 1, a área sombreada mede $\frac{2^2\pi}{2} = 2\pi$.

28. (Extraído da OBM 2009) Temos $\angle ALK = 180^\circ - \angle KLM - \angle BLM = 180^\circ - 90^\circ - \angle BLM =$



$90^\circ - \angle BLM = \angle BLM$, ambos os ângulos $\angle KAL$ e $\angle LBM$ são retos. Como $KL = LM$, segue que os triângulos KAL e LBM são congruentes pelo caso LAA_o . Portanto, sendo $x = AK$, $AL = 4 - x$, $LB = x$ e $BM = AL = 4 - x$. Logo a área do trapézio $AKMB$ é igual a $\frac{AK + BM}{2} \cdot AB = \frac{x + (4 - x)}{2} \cdot 4 = 8$ e, conseqüentemente, a área de $CDKM$ é $4^2 - 8 = 8$. Resposta B

Observação. De fato, os trapézios $AKMB$ e $KMCD$ são iguais.