Função Logarítmica

Exercícios de Função Logarítmica

1° **ano E.M.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Função Logarítmica
Exercícios de Função Logarítmica

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = \log_9 x$, determine:

a) $f(1)$.

b) $f(81)$.

c) $f(27)$.

d) k, para que $f(k) = 3$.

Exercício 2. O gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{\pi}{3}} x$ é?

a) uma parábola.

b) uma reta.

c) uma curva crescente.

d) uma curva decrescente.

e) uma circunferência.

Exercício 3. Qual a soma das raízes da função

$$f(x) = \log_7(-x^2 + 7x - 11)?$$

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Exercício 4. Determine o domínio das funções abaixo.

a) $f(x) = \log_3(2x - 8)$.

b) $g(x) = \log_{(x+1)} 6$.

c) $p(x) = \log_3(x^2 - 9)$.

Exercício 5. Se o $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, então $\log 6$ é:

a) $0,144$.

b) $0,78$.

c) $0,18$.

d) $0,6$.

e) 0.

Exercício 6. Se o $\log 2 = 0,3$, então $\log 50$ é:

a) $1,5$.

b) $1,7$.

c) $1,9$.

d) $2,1$.

e) $2,3$.

Exercício 7. Resolva a equação:

$$\log(x - 3) + \log(x + 87) = 3$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Considerando que uma população inicial cresce 3% ao ano, determine a quantidade aproximada de anos para que ela triplique, sendo $\log 3 = 0,48$ e $\log 103 = 2,013$.

Exercício 9. Para se calcular a intensidade luminosa L, medida em lumens, à profundidade de x centímetros num determinado lago, utiliza-se a lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08x.$$

Qual a intensidade luminosa L a uma profundidade de $12,5cm$?

a) 150 lumens.

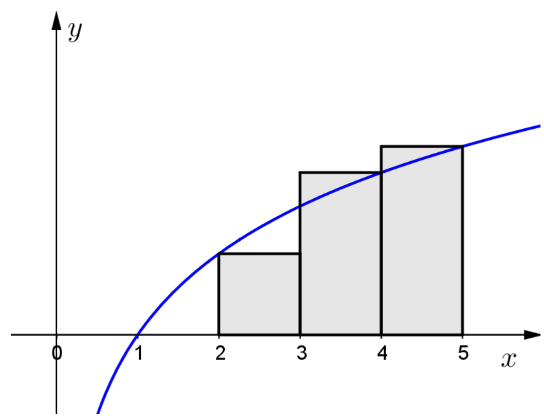
b) 15 lumens.

c) 10 lumens.

d) $1,5$ lumens.

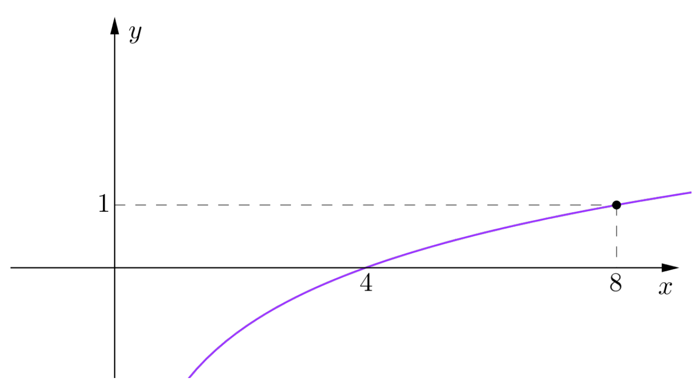
e) 1 lúmen.

Exercício 10. Determine a soma das áreas dos retângulos da figura, sendo o gráfico correspondente à função $\log_3 x$.



Exercício 11. Ao digitar corretamente a expressão $\log_{10}(-2)$ em uma calculadora, o retorno obtido no visor corresponde a uma mensagem de erro, uma vez que esse logaritmo não é um número real. Determine todos os valores reais de x, para os quais a expressão $\log_{0,1}(\log_{10}(\log_{0,1}(x)))$ seja um número real.

Exercício 12. Na figura, temos o gráfico de uma função do tipo $f(x) = a + \log_b x$. Determine $a + b$.



Exercício 13. Seja $k = \log 2 + \log 64 + \log 256 + \log 1024$, determine k em função de $\log 2$.

Exercício 14. Um capital de 10.000 reais é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Qual é a quantidade mínima de anos (inteiros) para que o montante seja maior que o dobro do capital inicial, sendo $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

Exercício 15. Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \log_2(x-1)$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. A função $f(x) = 500 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x}{10}}$, com x em anos, fornece aproximadamente o consumo anual de água no mundo, em km^3, em algumas atividades econômicas, do ano 1900 $(x = 0)$ ao ano 2000 $(x = 100)$. Determine, utilizando essa função, em que ano o consumo de água quadruplicou em relação ao registrado em 1900, sendo $\log 2 = 0,3$.

Exercício 17. Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de $R\$5.000,00$. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, $R\$400,00$ mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula:

$$P = \frac{5000 \cdot 1,013^n \cdot 0,013}{(1,013^n - 1)}.$$

Se necessário, utilize $0,005$ como aproximação para $\log 1,013$; $2,602$ como aproximação para $\log 400$; $2,525$ como aproximação para $\log 335$. De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é:

a) 12.

b) 14.

c) 15.

d) 16.

e) 17.

Exercício 18. Uma calculadora tem duas teclas especiais, A e B. Quando a tecla A é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla B é digitada, o número do visor é multiplicado por 5. Considere que uma pessoa digitou as teclas BAB, nesta ordem, e obteve no visor o número 10. Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número:

a) 20.

b) 30.

c) 40.

d) 50.

Exercício 19. A solução da equação na variável real x, $\log_x(x+6) = 2$, é um número

a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

Exercício 20. Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$.

b) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$.

c) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$.

d) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$.

e) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM

Respostas e Soluções.

1.

a) $f(1) = \log_9 1 = 0$.

b) $f(81) = \log_9 81 = 2$.

c) $f(27) = \log_9 27 = \dfrac{3}{2}$.

d) Devemos ter $\log_9 k = 3$, que, pela definição de logaritmos, temos $k = 9^3 = 729$.

2. C.

3.

$$\begin{aligned}
\log_7(-x^2+7x-11) &= 0\\
-x^2+7x-11 &= 7^0\\
-x^2+7x-11 &= 1\\
-x^2+7x-12 &= 0\\
x^2-7x+12 &= 0\\
x_1 &= 3\\
x_2 &= 4.
\end{aligned}$$

Portanto, a soma das raízes é $3+4=7$. Resposta D.

4.

a) $2x-8>0$, segue que $x>4$. $D_f=(4,+\infty)$.

b) $x+1\neq 1$ e $x+1>0$, segue que $x\neq 0$ e $x>-1$. $D_g=(-1,+\infty)-\{0\}$.

c) $x^2-9>0$, segue que $x<-3$ ou $x>3$. $D_p=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

5. $\log 6 = \log(2\cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3+0,48 = 0,78$. Resposta B

6. $\log 50 = \log\left(\dfrac{100}{2}\right) = \log 100 - \log 2 = 2 - 0,3 = 1,7$. Resposta B.

7.

$$\begin{aligned}
\log(x-3)+\log(x+87) &= 3\\
\log[(x-3)(x+87)] &= 3\\
(x-3)(x+87) &= 10^3\\
x^2+87x-3x-261 &= 1000\\
x^2+84x-1261 &= 0\\
x &= \frac{-84\pm\sqrt{12100}}{2}\\
x &= \frac{-84\pm 110}{2}\\
x_1 &= 13\\
x_2 &= -97.
\end{aligned}$$

Portanto, a única solução da equação é $x=13$.

8. (Extraído da Vídeo Aula) Seja $P(t)$ a população em um tempo t, em anos, contado a partir da população inicial P_o. Como queremos verificar após quanto tempo esta população inicial será triplicada, temos:

$$\begin{aligned}
P(t) &= P_o\cdot 1,03^t\\
3P_o &= P_o\cdot 1,03^t\\
3 &= 1,03^t\\
\log 3 &= \log 1,03^t\\
\log 3 &= t\cdot\log 1,03\\
0,48 &= t\cdot\log\left(\frac{103}{100}\right)\\
0,48 &= t(\log 103-\log 100)\\
0,48 &= t(2,013-2)\\
0,013t &= 0,48\\
t &= \frac{480}{13}\\
t &\cong 36,9.
\end{aligned}$$

Portanto, esta população será o triplo da inicial aproximadamente depois de 37 anos.

9. (Extraído da UFPR) Temos:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{L}{15}\right) &= -0,08x\\
\log\left(\frac{L}{15}\right) &= -0,08\cdot 12,5\\
\log\left(\frac{L}{15}\right) &= -1\\
\frac{L}{15} &= 10^{-1}\\
L &= 15\cdot\frac{1}{10}\\
L &= 1,5.
\end{aligned}$$

Resposta D.

10. As bases dos retângulos medem 1 unidade de comprimento (u.c.) cada, enquanto que as alturas medem $\log_3 2$, $\log_3 4$ e $\log_3 5$ u.c.. Temos então que a soma das áreas S é:

$$\begin{aligned}
S &= 1\cdot\log_3 2+1\cdot\log_3 4+1\cdot\log_3 5\\
&= \log_3 2+\log_3 4+\log_3 5\\
&= \log_3(2\cdot 4\cdot 5)\\
&= \log_3 40.
\end{aligned}$$

11. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases}
x > 0\\
\log_{0,1} x > 0\\
\log_{10}(\log_{0,1} x) > 0.
\end{cases}$$

Da segunda inequação temos $x < 1$, enquanto que da terceira inequação temos $\log_{0,1} x > 1$, donde $x < 0,1$. Agora podemos escrever o sistema assim:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x < 0,1. \end{cases}$$

Portanto, pela interseção das inequações, temos $0 < x < 0,1$.

12. Vemos que o gráfico contém os pontos $(4, 0)$ e $(8, 1)$. Assim:

$$\begin{cases} a + \log_b 4 = 0 \\ a + \log_b 8 = 1 \end{cases}$$

Subtraindo as equações, chegamos a:

$$\begin{aligned} \log_b 8 - \log_b 4 &= 1 - 0 \\ \log_b \left(\frac{8}{4}\right) &= 1 \\ \log_b 2 &= 1 \\ b^1 &= 2 \\ b &= 2. \end{aligned}$$

Como $b = 2$, basta substituirmos em uma das equações do sistema: $a + \log_2 4 = 0$, donde $a = -2$. Por fim, temos $a + b = -2 + 2 = 0$.

13.

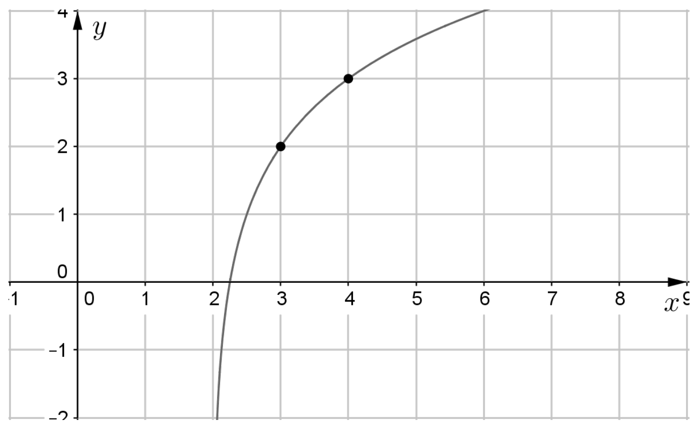
$$\begin{aligned} k &= \log 2 + \log 64 + \log 256 + \log 1024 \\ &= \log 2 + \log 2^6 + \log 2^8 + \log 2^{10} \\ &= \log(2 \cdot 2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^{10}) \\ &= \log 2^{1+6+8+10} \\ &= \log 2^{25} \\ &= 25 \cdot \log 2. \end{aligned}$$

14. Seja $M(t)$ o montante desta aplicação após t anos. Podemos calculá-lo utilizando $M(t) = C \cdot 1,08^t$, onde C é o capital aplicado. Temos então:

$$\begin{aligned} M(t) &= C \cdot 1,08^t \\ 2 \cdot C &= C \cdot 1,08^t \\ 2 &= 1,08^t \\ \log 2 &= \log 1,08^t \\ 0,3 &= t \cdot \log \left(\frac{2^2 \cdot 3^3}{100}\right) \\ 0,3 &= t(2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,48 - 2) \\ 0,3 &= t(0,6 + 1,44 - 2) \\ 0,3 &= 0,04t \\ t &= \frac{30}{4} \\ t &= 7,5. \end{aligned}$$

Portanto, a quantidade inteira mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital aplicado é 8.

15.



16. (Extraído da Unesp) Em 1900, $t = 0$, o consumo foi $f(0) = 500 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{0}{10}} = 500 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x}{10}} = 500 \cdot 1 = 500\ km^3$. Temos então:

$$\begin{aligned} f(x) &= 500 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x}{10}} \\ 4 \cdot 500 &= 500 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x}{10}} \\ 4 &= \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x}{10}} \\ \log 4 &= \log \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x}{10}} \\ \log 4 &= \frac{x}{10} \cdot \log \left(\frac{10}{8}\right) \\ 2\log 2 &= \frac{x}{10} \cdot (\log 10 - \log 2^3) \\ 2 \cdot 0,3 &= \frac{x}{10}(1 - 3 \cdot 0,3) \\ 0,6 &= \frac{x}{10} \cdot 0,1 \\ x &= 0,6 \cdot 100 \\ x &= 60. \end{aligned}$$

Portanto, o consumo de água de 1900 foi quadruplicado no ano de 1960.

17. (Extraído do ENEM - 2017) Com $P \leq 400$ e fazendo

$1,013^n = k$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{5000 \cdot k \cdot 0,013}{k-1} &\leq 400 \\
65k &\leq 400(k-1) \\
65k &\leq 400k - 400 \\
-335k &\leq -400 \\
335 \cdot 1,013^n &\geq 400 \\
\log(335 \cdot 1,013^n) &\geq \log 400 \\
\log 335 + n \log 1,013 &\geq \log 400 \\
2,525 + 0,005n &\geq 2,602 \\
0,005n &\geq 0,077 \\
n &\geq 15,4.
\end{aligned}$$

Como o número de parcelas deve ser natural, temos $n = 16$. Resposta D.

18. (Extraído da UERJ - 2017) Se o número do visor era x e a sequência foi BAB, temos:

$$\begin{aligned}
5 \cdot \log(5x) &= 10 \\
\log(5x) &= 2 \\
5x &= 10^2 \\
5x &= 100 \\
x &= 20.
\end{aligned}$$

Resposta A.

19. (Extraído da Unicamp - 2016) Inicialmente, lembremos das condições de existência, ou seja, $x > 0$ e $x \neq 1$. Temos, então:

$$\begin{aligned}
\log_x(x+6) &= 2 \\
x + 6 &= x^2 \\
x^2 - x - 6 &= 0 \\
x_1 &= -2 \\
x_2 &= 3.
\end{aligned}$$

Assim, a única solução é $x = 3$. Resposta A.

20. (Extraído do ITA - 2018) Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, segue que:

$$\begin{aligned}
a + b &= \log_2 \pi + \log_5 \pi \\
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \log_\pi 2 + \log_\pi 5 \\
&= \log_\pi(2 \cdot 5) \\
&= \log_\pi 10
\end{aligned}$$

Como $\pi > 1$ e $10 > \pi^2$, segue que $\log_\pi 10 > 2$, donde $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > 2$. Resposta E.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com