# Função Exponencial

## Função Exponencial e Propriedades

**$1^{\circ}$ ano E.M.**

**Professores Cleber Assis e Tiago Miranda**

Portal da Matemática
OBMEP

**Função Exponencial**
Função Exponencial e Propriedades

# 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Calcule as potências abaixo.

a) $11^2$.

b) $2^8$.

c) $17^0$.

d) $(-4)^4$.

e) $-4^4$.

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

g) $2{,}7^2$.

h) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$.

i) $(-5)^{-4}$.

**Exercício 2.** Utilize uma única potência para representar as expressões abaixo.

a) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4$.

b) $\dfrac{3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^7}{27}$.

c) $\dfrac{4 \cdot 8^2 \cdot 2^3}{16 \cdot 2^{-1}}$.

d) $\dfrac{a^2 \cdot a^4}{a^3}$.

**Exercício 3.** Escreva os radicais abaixo na forma de potência, simplificando quando possível.

a) $\sqrt[3]{6^9}$.

b) $\sqrt[5]{(-8)^2}$.

c) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{9}\right)^4}$.

d) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{10}$.

**Exercício 4.** Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2^x$, determine:

a) $f(1)$.

b) $f(-3)$.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

d) $x$ para que $f(x)$ seja igual a $\frac{1}{16}$.

**Exercício 5.** Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, determine:

a) $f(2)$.

b) $f(-2)$.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

d) o menor valor de $k \in \mathbb{Z}$ para $f(k) < 100$.

**Exercício 6.** Determine o valor numérico da expressão

$$(\sqrt[6]{4})^{-3} - \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

**Exercício 7.** O valor da expressão $\sqrt[3]{5^{-2}} \cdot 5^{1,333...}$ é:

a) um número primo.

b) um decimal exato.

c) uma dízima periódica.

d) um número irracional.

e) um número não real.

**Exercício 8.** Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$. Se $f$ é crescente, então:

(a) $a = 1$.

(b) $a > 1$.

(c) $0 < a < 1$.

(d) $a < 0$.

(e) $a = 0$.

**Exercício 9.** Seja a função exponencial $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3^x$, determine o conjunto imagem.

# 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 10.** Escreva em uma única potência:

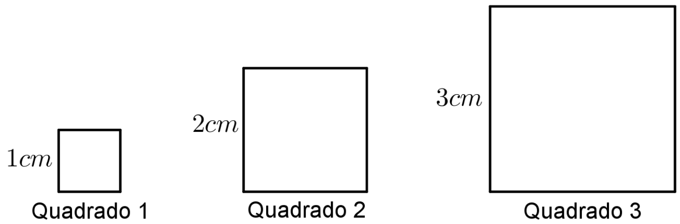
a) a metade de $2^{50}$.

b) o triplo de $3^{15}$.

c) o quadrado do quíntuplo de $25^{12}$.

**Exercício 11.** Resolva a equação $8x^2 = 3 \cdot 2^2 - (3^{-2})^{-1} + (0{,}2)^{-3}$.

**Exercício 12.** Observe a figura.




Determine:

a) a medida do lado do quadrado 5.

b) a área do quadrado $n$.

c) qual quadrado terá área $81cm^2$.

**Exercício 13.** Luiz ingeriu $500mg$ de amoxicilina às $8h$. Suponha que a meia-vida dessa substância é de aproximadamente $1h$.

a) Determine a massa dessa substância no organismo de Luiz às $9h$, $10h$, $11h$.

b) Qual é a massa restante no organismo de Luiz após $t$ horas da ingestão do remédio?

**Exercício 14.** Determine o valor da expressão

$$\frac{4^3 \cdot 2^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot 3^{-2}}{5 \cdot (1,2)^{-1}}.$$

**Exercício 15.** Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma côrte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de arroz da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

a) De acordo com a lenda, qual é quantidade de grãos de arroz correspondente à casa 6 do tabuleiro?

b) Escreva uma função $f$ que expresse a quantidade de grãos de arroz em função do número $x$ da casa do tabuleiro.

c) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de arroz devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

**Exercício 16.** Jonas precisa fazer um empréstimo em um banco, que cobra uma taxa de juros compostos de 10% ao mês. Ele tomou emprestado $R\$2.400,00$.

a) Se Jonas pagar sua dívida depois de 3 meses, qual será o valor total pago?

b) Escreva uma função $f$ que expresse a quantia paga em função do tempo $t$, dado em meses.

c) Ao final de $m$ meses, ele pagou ao banco $R\$3.513,84$. Qual o valor de $m$?

**Exercício 17.** Se $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e $b = \dfrac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$, determine $a^b$.

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 18.** Considere $a = 11^{50}$, $b = 4^{100}$ e $c = 2^{150}$ e assinale a alternativa correta.

a) $c < a < b$.

b) $c < b < a$.

c) $a < b < c$.

d) $a < c < b$.

**Exercício 19.** O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante $t$, dado em minutos, $T_A$ é a temperatura ambiente, supostamente constante, e $\alpha$ e $\beta$ são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de $-18^oC$. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu $0^oC$ após 90 minutos e chegou a $-16^oC$ após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes $\alpha$ e $\beta$.

b) Determine o valor de $t$ para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ $^oC$ superior à temperatura ambiente.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

**Respostas e Soluções.**

**1.**

a) $11^2 = 121$.

b) $2^8 = 256$.

c) $17^0 = 1$.

d) $(-4)^4 = 256$.

e) $-4^4 = -256$.

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$.

g) $2,7^2 = 7,29$.

h) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{64}$.

i) $(-5)^{-4} = \frac{1}{625}$.

**2.**

a) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 = 5^{2+3+4} = 5^9$.

b) $\frac{3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^7}{27} = 3^{2+0+7-3} = 3^6$.

c) $\frac{4 \cdot 8^2 \cdot 2^3}{16 \cdot 2^{-1}} = \frac{2^2 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^4 \cdot 2^{-1}} = 2^{2+6+3-4+1} = 2^8$.

d) $\frac{a^2 \cdot a^4}{a^3} = a^{2+4-3} = a^3$.

**3.**

a) $\sqrt[3]{6^9} = 6^{\frac{9}{3}} = 6^3$.

b) $\sqrt[5]{(-8)^2} = 2^{\frac{6}{5}}$.

c) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{9}\right)^4} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$.

d) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{30}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$.

**4.**

a) $f(1) = 2^1 = 2$.

b) $f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

d) Temos $2^x = \frac{1}{16}$, segue que $x = -4$.

**5.**

a) $f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

b) $f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) Como $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} < 100 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$, então o menor valor de $k$ é $-4$.

**6.**

$$\begin{aligned}
(\sqrt[6]{4})^{-3} - \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 &= \\
2^{-\frac{6}{6}} - \frac{25}{5} &= \\
2^{-1} - 5 &= \\
\frac{1}{2} - 5 &= \\
-\frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

**7.**

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{5^{-2}} \cdot 5^{1,333\ldots} &= \\
5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{1+\frac{1}{3}} &= \\
5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} &= \\
5^{-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} &= \\
5^{\frac{2}{3}} &= \\
\sqrt[3]{25}.
\end{aligned}$$

Resposta D.

**8.** B.

**9.** $f$ é uma função exponencial crescente, então o menor valor de $f$ é $f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ e o maior é $f(4) = 3^4 = 81$. Portanto, o conjunto imagem é $\left[\frac{1}{3}, 81\right]$.

**10.**

a) $2^{50} = \frac{2^{50}}{2} = 2^{50-1} = 2^{49}$.

b) $3 \cdot 3^{15} = 3^{1+15} = 3^{16}$.

c) $(5 \cdot 25^{12})^2 = 5^{2+24} = 5^{26}$.

**11.**

$$\begin{aligned}
8x^2 &= 3 \cdot 2^2 - (3^{-2})^{-1} + (0,2)^{-3} \\
8x^2 &= 12 - 3^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \\
8x^2 &= 12 - 9 + 5^3 \\
8x^2 &= 128 \\
x^2 &= 16.
\end{aligned}$$

Portanto $x = -4$ ou $x = 4$.

**12.**

a) $5cm$.

b) $n^2$.

c) Se $n^2 = 81$, então $n = 9cm$. Portanto, será o Quadrado 9.

**13.** (Extraído da Vídeo Aula)

a) A massa às $9h$ era $250mg$, às $10h$ era $125mg$ e às $11h$ $62,5mg$.

b) Como a cada hora a massa reduz-se à metade, após $t$ horas, será $500 \cdot 2^{-t}$.

**14.**

$$\begin{aligned}
\frac{4^3 \cdot 2^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot 3^{-2}}{5 \cdot (1,2)^{-1}} &= \\
\frac{2^6 \cdot 2^{-3} + 3^4 \cdot 3^{-2}}{5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-1}} &= \\
\frac{2^3 + 3^2}{5 \cdot \frac{5}{6}} &= \\
\frac{17 \cdot 6}{25} &= \frac{102}{25}.
\end{aligned}$$

**15.**

a) A sequência é $(1, 2, 4, 8, 16, 32)$, portanto, na casa 6, a quantidade de grãos é 32.

b) $f(x) = 2^{x-1}$, sendo $x$ um número natural de 1 a 64.

c) $2^{63}$.

**16.**

a) $2.400 \cdot 1,1^3 = R\$3.194,40$.

b) $f(x) = 2.400 \cdot 1,1^t$.

c)

$$\begin{aligned}
2.400 \cdot 1,1^m &= 3.513,84 \\
1,1^m &= 1,4641 \\
1,1^m &= 1,1^4 \\
m &= 4.
\end{aligned}$$

**17.**

$$\begin{aligned}
a &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \\
&= 4^2 + 3^2 \\
&= 16 + 9 \\
&= 25.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} \\
&= \frac{6-4}{4} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Temos, portanto, $a^b = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$.

**18.** (Extraído da EPCAR - 2017) Temos $b = 4^{100} = 2^{200} > 2^{150} = c$, ou seja, $b > c$. Temos também $a = 11^{50} < 16^{50} = 4^{100} = b$, ou seja, $a < b$. Por fim, $a = 11^{50} > 8^{50} = 2^{150} = c$. Portanto, $c < a < b$. Resposta A.

**19.** (Extraído da Unicamp)

a) Como a temperatura do congelador é $-18^oC$, então $T_A = -18$. Se $T(90) = 0$, temos $0 = -18 + \alpha \cdot 3^{90\beta}$, ou seja, $3^{90\beta} = \frac{18}{\alpha}$. Se $T(270) = -16$, então:

$$\begin{aligned}
-16 &= -18 + \alpha \cdot 3^{270\beta} \\
\alpha \cdot 3^{270\beta} &= 2 \\
\alpha \cdot \left(3^{90\beta}\right)^3 &= 2 \\
\alpha \cdot \left(\frac{18}{\alpha}\right)^3 &= 2 \\
\alpha^2 &= \frac{18^3}{2} \\
\alpha^2 &= 18^2 \cdot 9 \\
\alpha &= 54.
\end{aligned}$$

Perceba, pela segunda linha do cálculo acima, que $\alpha$ deve ser positivo. Voltando à primeira equação, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= -18 + 54 \cdot 3^{90\beta} \\
54 \cdot 3^{90\beta} &= 18 \\
3^{90\beta} &= \frac{18}{54} \\
3^{90\beta} &= 3^{-1} \\
90\beta &= -1 \\
\beta &= -\frac{1}{90}.
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
T_A + 54 \cdot 3^{-\frac{t}{90}} &= \frac{2}{3} + T_A \\
54 \cdot 3^{-\frac{t}{90}} &= \frac{2}{3} \\
3^{-\frac{t}{90}} &= \frac{1}{81} \\
3^{-\frac{t}{90}} &= 3^{-4} \\
-\frac{t}{90} &= -4 \\
t &= 360 min.
\end{aligned}
$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com