Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis.

8^o **ano/**9^a **série E.F.**

Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales
Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sendo

a) $AB = 4$ e $CD = 2$.

b) $AB = 7$ e $CD = 3$.

c) $AB = 1/2$ e $CD = 1/3$.

d) $AB = 3\sqrt{2}$ e $CD = \sqrt{2}$.

e) $AB = \sqrt{5}$ e $CD = 2$.

f) $AB = 2$ e $CD = \sqrt{2}$.

g) $ABCD$ um paralelogramo.

Exercício 2. No exercício anterior, determine em quais ítens os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensurávies.

Exercício 3. A razão entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é $7/4$. Se $AB = 28$cm, determine CD.

Exercício 4. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos, onde a razão entre suas medidas é $1/2$. Se $AB = 8$cm é o segmento de maior medida, determine CD.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. A razão entre as medidas da diagonal e do lado de um quadrado, qualquer que seja o quadrado, é $\sqrt{2}$, ou seja, são segmentos incomensuráveis. Detemine o lado de um quadrado cuja diagonal mede 8cm.

Exercício 6. Sabe-se que razão entre a medida da altura e a medida do lado de um triângulo equilátero qualquer é $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Determine o comprimento do lado de um triângulo equilátero de altura medindo 6cm.

Exercício 7. A razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro é um número irracional, representado pela letra grega π. Determine a medida do raio de uma circunferência, cujo comprimento é 8πcm.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Se os três lados de um triângulo ABC são comensuráveis dois a dois, mostre que um segmento $\overline{EF}$, cuja medida é igual à medida do perímetro do triângulo ABC, e qualquer um dos lados deste triângulo são comensuráveis.

Exercício 9. Mostre que a diagonal de um quadrado e seu lado são segmentos incomensuráveis.

Respostas e Soluções.

1.

a) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{4}{2} = 2.$

b) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{7}{3}.$

c) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1/2}{1/3} = \dfrac{3}{2}.$

d) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$

e) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

f) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

g) Em um paralelogramo, lados opostos são congruentes, ou seja, $AB = CD$. Assim, temos $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AB}{AB} = 1.$

2. Segmentos comensuráveis são aqueles que possuem um número racional como resultado da razão de suas medidas. Assim, no exercício anterior, os segmentos comensuráveis são os dos ítens a, b, c, d, g. E, é claro, os segmentos incomensuráveis, que são aqueles que obtemos um número irracional na razão de suas medidas, são os das letras e, f.

3. Temos $\dfrac{28}{CD} = \dfrac{7}{4}$, ou seja, $CD = 16$cm.

4. Temos $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $CD = 4$cm. Perceba que a escolha da medida de $\overline{CD}$ no numerador ocorreu porque a fração é menor que 1 e o segmento de maior medida é $\overline{AB}$.

5. Seja l a medida do lado do quadrado. Temos então $\dfrac{8}{l} = \sqrt{2}$, ou seja, $l = 4\sqrt{2}$.

6. Seja l a medida do lado, temos $\dfrac{6}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $l = 4\sqrt{3}$cm.

7. Como a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio de uma circunferência, temos $\dfrac{8\pi}{2R} = \pi$, ou seja, a medida R do raio é 4cm.

8. Sendo a, b, c, as medidas dos lados do $\triangle ABC$, temos como razões entre as medidas dos lados a/b (ou b/a), a/c (ou c/a) e c/b (ou b/c), números racionais, pois são, dois a dois, segmentos comensuráveis. Fazendo a razão dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{AB}$, sendo indiferente se tomássemos $\overline{AC}$ ou $\overline{BC}$, temos $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{a+b+c}{a} = \dfrac{a}{a} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} = 1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$, que é um número racional e, portanto, os segmentos são comensuráveis.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Chamando a medida do lado de l e a medida da diagonal de d, pelo Teorema de Pitágoras, temos $d^2 = l^2 + l^2$, segue que $(\frac{d}{l})^2 = 2$. Supondo que $(\frac{d}{l})$ seja um número racional, digamos $\frac{p}{q}$ onde $mdc(p, q) = 1$ (caso não seja, basta simplificar), temos

$$\begin{aligned} (\frac{p}{q})^2 &= 2 \\ \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ p^2 &= 2q^2. \end{aligned}$$

Vamos usar o fato de que, se n^2 é par, então n também é par (não é difícil essa demonstração). Como $d^2 = 2l^2$, então d^2 é par e, por consequência, d também é par e faremos $d = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Temos agora

$$\begin{aligned} p^2 &= 2q^2 \\ (2k)^2 &= 2q^2 \\ 4k^2 &= 2q^2 \\ 2k^2 &= q^2. \end{aligned}$$

Concluímos então que q^2 e, por consequência, q são pares. Mas se p e q são pares, $mdc(p, q) \neq 1$, o que é absurdo. Portanto a fração $\frac{d}{l}$ não pode ser um número racional e os segmentos (lado e diagonal do quadrado) não podem ser comensuráveis e os chamamos de incomensuráveis.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com