Módulo Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro, Cone e Esfera

Cone.

3° ano/E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

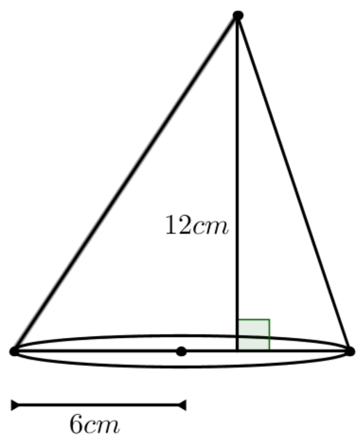
Portal da Matemática
OBMEP

Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro, Cone e Esfera.
Cone.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a área total e o volume de um cone reto de raio da base medindo $3cm$ e altura medindo $4cm$.

Exercício 2. Determine o volume do cone oblíquo da figura.



Exercício 3. Determine a altura de um cone equilátero cujo raio da base mede $12cm$.

Exercício 4. Determine o volume de um cone reto de raio da base medindo $4cm$ e com ângulo determinado pela altura e geratriz medindo $30°$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Um cone é construído a partir de uma semicircunferência de raio igual a $12cm$. Determine o volume deste cone.

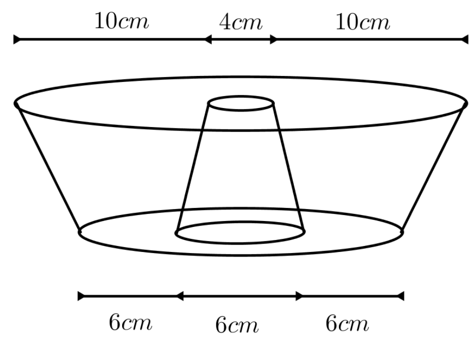
Exercício 6. Um cone de revolução é obtido pela rotação de um triângulo retângulo, de lados $3cm$, $4cm$ e $5cm$, tendo como eixo a reta suporte do lado de $4cm$. Determine seu volume e sua área lateral.

Exercício 7. Determine o volume e a área total de um cone reto inscrito em um cubo de $10cm$ de aresta.

Exercício 8. Um copo de plástico tem o formato de um tronco de cone reto. Se o diâmetro da base menor mede $4cm$, o da base maior $6cm$ e a altura $10cm$, qual sua capacidade em $m\ell$?

Exercício 9. Um chapéu de aniversário tem formato cônico, de diâmetro da base medindo $10cm$ e altura medindo $15cm$. Determine a quantidade de papel utilizada para sua confecção.

Exercício 10. Uma fôrma de bolo, de $10cm$ de altura, é formada por dois troncos de cone, conforme a figura. Determine a quantidade máxima de massa líquida de bolo que pode ser colocada na forma, se esta massa deve ocupar apenas 80% de sua capacidade, pois deve existir uma margem para que o bolo cresça.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Um cone circular reto é seccionado por um plano paralelo à sua base a $\frac{2}{3}$ de seu vértice. Se chamarmos V o volume do cone, então o volume do tronco de cone resultante vale:

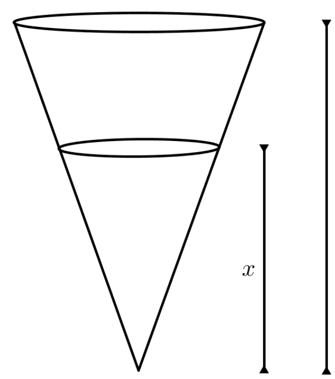
a) $\dfrac{8V}{27}$.

b) $\dfrac{2V}{3}$.

c) $\dfrac{4V}{9}$.

d) $\dfrac{19V}{27}$.

Exercício 12. Um copo tem a forma de um cone com altura $8cm$ e raio da base $3cm$. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de água e suco de laranja. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro líquido deve ser:



a) $\dfrac{8}{3}cm$.

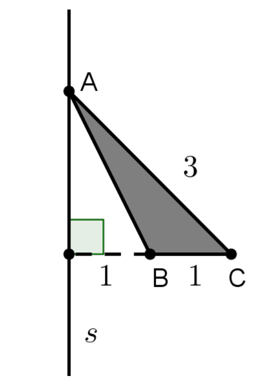
b) $6cm$.

c) $4cm$.

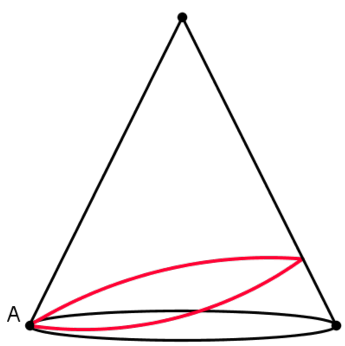
d) $4\sqrt{3}cm$.

e) $4\sqrt[3]{4}cm$.

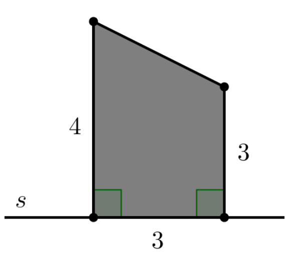
Exercício 13. O triângulo ABC sofre uma rotação sobre o eixo s da figura. Determine o volume do sólido gerado.



Exercício 14. Seja um cone cujo raio é $\dfrac{g}{6}$, ou seja, $\dfrac{1}{6}$ da geratriz. Tomando-se o ponto A da circunferência da base e passando um barbante ao redor do cone com início e fim no ponto A, determine o menor comprimento deste barbante.



Exercício 15. Ao girarmos o trapézio abaixo pelo eixo s, determinamos um sólido de revolução. Determine seu volume e sua área total.



Respostas e Soluções.

1. Pelo triângulo retângulo formado pela altura, raio da base e geratriz, temos:

$$\begin{aligned} g^2 &= r^2 + h^2 \\ g^2 &= 3^2 + 4^2 \\ g^2 &= 25 \\ g &= 5. \end{aligned}$$

Dessa forma, $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi cm^3$ e $A_t = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 24\pi cm^2$.

2. $V = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 12}{3} = 144\pi cm^3$.

3. Se o cone é equilátero, então sua secção meridiana é um triângulo equilátero, onde a geratriz tem a mesma medida do diâmetro da base, ou seja, $24cm$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo formado pela geratriz, raio da base e altura, temos:

$$\begin{aligned} g^2 &= r^2 + h^2 \\ 24^2 &= 12^2 + h^2 \\ h^2 &= 24^2 - 12^2 \\ h^2 &= (24+12)(24-12) \\ h &= 12\sqrt{3}cm. \end{aligned}$$

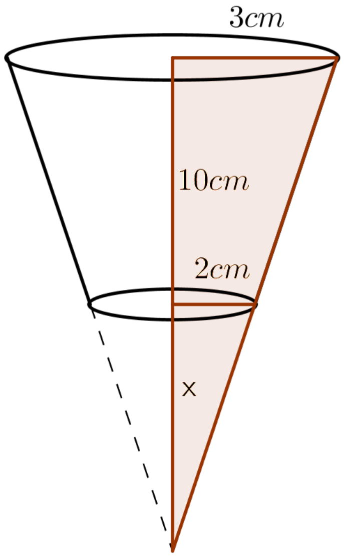
4. Se o ângulo entre a altura e a geratriz mede $30°$, no triângulo retângulo formado pela altura, geratriz e raio da base, então $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{4}{h}$, segue que $h = 4\sqrt{3}cm$. Então seu volume é $V = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3} cm^3$.

5. Quando montamos o cone a partir desta semicircunferência, temos que a geratriz do cone é igual ao raio da semicircunferência, ou seja, $12cm$. Além disso, o comprimento do arco da semicircunferência é igual ao comprimento da circunferência, de raio r, da base do cone, ou seja, $2\pi r = \dfrac{2\pi \cdot 12}{2}$, segue que $r = 6cm$. Pelo triângulo retângulo formado pela geratriz, altura e raio da base, temos $h^2 + 6^2 = 12^2$, segue que $h = 6\sqrt{3}cm$. Concluímos então o volume do cone é $V = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 72\sqrt{3}\pi cm^3$.

6. Se o eixo de rotação é a reta que contém o cateto de lado $4cm$, então, a altura do cone gerada é $4cm$ e o raio da base é o outro cateto, ou seja, $3cm$. Temos então que seu volume é $V = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi cm^3$ e sua área lateral é $A_l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi cm^2$.

7. Se o cone está inscrito em um cubo de $10cm$ de aresta, então sua altura mede $10cm$ e o seu diâmetro da base também mede $10cm$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo formado pela altura, geratriz e raio da base, obtemos $g = 5\sqrt{5}cm$. Temos então que seu volume é $V = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 10}{3} = \dfrac{250\pi}{3}cm^3$ e sua área total é $A_t = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 5\sqrt{5} = 25\pi(1+\sqrt{5})cm^2$.

8. Inicialmente, vamos observar a figura.



Reconstruindo o cone que deu origem ao tronco, encontramos uma semelhança de triângulos:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{10+x} &= \frac{2}{x} \\
2(10+x) &= 3x \\
x &= 20.
\end{aligned}$$

Para calcular o volume do tronco, basta subtrairmos o volume do cone maior pelo volume do cone menor:

$$\begin{aligned}
V_t &= V_1 - V_2 \\
&= \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 30}{3} - \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 20}{3} \\
&= \frac{270\pi - 80\pi}{3} \\
&= \frac{190\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Temos então que o volume é aproximadamente $199cm^3$, ou seja, $199m\ell$.

9. Pelo triângulo retângulo formado pela geratriz, raio da base e altura, temos $g^2 = 5^2 + 15^2$, segue que $g = 5\sqrt{10}cm$. Então a quantidade de papel gasto, que é a área lateral, é $A_l = \pi \cdot 5 \cdot 5\sqrt{10} = 25\sqrt{10}\pi cm^2$.

10. Incialmente vamos calcular o volume do tronco de cone maior. "Reconstruindo"o cone truncado que deu origem ao tronco, temos um cone maior com altura H e um menor com altura $(H-10)$. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{H}{H-10} = \dfrac{12}{9}$, segue que $H = 40cm$. Basta agora subtrair os volumes destes cones para encontrarmos o volume do tronco, ou seja, $V_t = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 40}{3} - \dfrac{\pi \cdot 9^2 \cdot 30}{3} = 1110\pi cm^3$. De forma análoga, encontramos o volume do tronco menor igual a $\dfrac{190\pi}{3}cm^3$. Lembrando que apenas 80% da capacidade deve ser usada, temos que o volume de massa líquida é $0,8(1110\pi - \dfrac{190\pi}{3}) \cong 2,63\ell$.

11. (Extraído da UnB-DF) Chamando o volume do cone menor de v e a altura do cone maior de H, temos que $\dfrac{V}{v} = \left(\dfrac{H}{\frac{2H}{3}}\right)^3$, segue que $v = \dfrac{8V}{27}$. Então o volume do tronco é $V_t = V - v = \dfrac{19V}{27}$. Resposta D.

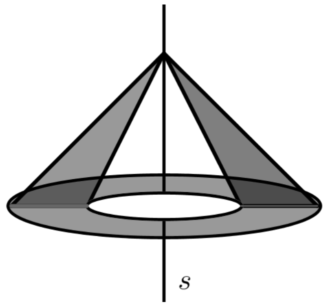
12. (Extraído da Fuvest-SP) Como o volume do primeiro líquido deve ser a metade, então temos:

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\frac{V}{2}} &= \left(\frac{8}{x}\right)^3 \\
2 &= \frac{2^9}{x^3} \\
x^3 &= 2^8 \\
x &= 4\sqrt[3]{4}.
\end{aligned}$$

Resposta E.

13. (Extraído da Vídeo Aula) Pela rotação do triângulo, o sólido gerado será uma espécie de "casca de cone", sendo um cone de geratriz 3 e raio da base 2 e, portanto, altura $\sqrt{5}$, e, deste, "retirado" um outro cone de raio da base 1 e altura também $\sqrt{5}$. Temos então que o volume V do sólido gerado é:

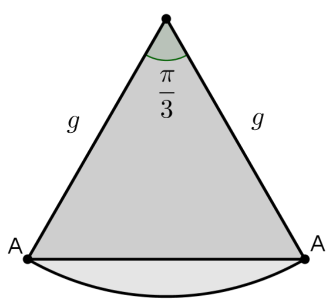
$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{5}}{3} - \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{5}}{3} \\
&= \frac{4\sqrt{5}\pi - \sqrt{5}\pi}{3} \\
&= \frac{3\sqrt{5}\pi}{3} \\
&= \sqrt{5}\pi.
\end{aligned}$$



14. Se planificarmos a lateral do cone, teremos um setor circular, cujas extremidades do arco deste setor serão ambas o ponto A. Como a menor distância entre dois pontos no plano é um segmento reto, a corda que liga estas extremidades do arco deste setor será o menor comprimento do barbante. Além disso a área lateral do cone é $A_l = \pi r g = \dfrac{g^2\pi}{6}$. Esta é também a área do setor circular, ou seja, $A_s = \dfrac{\alpha\pi g^2}{2\pi} = \dfrac{\alpha g^2}{2}$, pois o raio do setor circular é g. Igualando as duas áreas, temos:

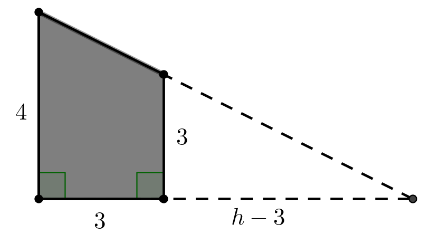
$$\begin{aligned}\frac{\alpha g^2}{2} &= \frac{g^2\pi}{6}\\ \alpha &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Como o ângulo central do setor mede $\dfrac{\pi}{3}$, então o triângulo formado pelos raios do setor e a corda é equilátero, ou seja, o menor comprimento do barbante é a medida da geratriz do cone.



15. O sólido gerado é um tronco de cone de raios das bases 3 e 4, além de altura 3. Reconstruindo o triângulo que foi truncado para originar o trapézio, vamos chamar um cateto de h, já que o outro é 4. Por semelhança de triângulos, temos:

$$\begin{aligned}\frac{h}{h-3} &= \frac{4}{3}\\ 4h-12 &= 3h\\ h &= 12.\end{aligned}$$



Se giramos este triângulo retângulo, como foi girado o trapézio, teremos dois cones, sendo um de raio da base 4 e outro de raio da base 3. O volume do tronco em questão é a diferença entre os volumes destes dois cones, ou seja:

$$\begin{aligned}V_t &= V_1 - V_2\\ &= \frac{\pi\cdot 4^2\cdot 12}{3} - \frac{\pi\cdot 3^2\cdot 9}{3}\\ &= 64\pi - 27\pi\\ &= 37\pi.\end{aligned}$$

Para o cálculo da área do tronco, basta somarmos as áreas das bases e a área lateral, que é o resultado da diferença entre as áreas laterais dos dois cones gerados anteriormente, cujas geratrizes medem $\sqrt{144+16} = 4\sqrt{10}$ e $\sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$. Temos então:

$$\begin{aligned}A_t &= A_{b_1} + A_{b_2} + A_l\\ &= \pi\cdot 4^2 + \pi\cdot 3^2 + \pi\cdot 4\cdot 4\sqrt{10} + \pi\cdot 3\cdot 3\sqrt{10}\\ &= 25\pi + 25\sqrt{10}\pi.\end{aligned}$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com