Módulo de Razões e Proporções

A Noção de Razão e Exercícios

7° **ano E.F.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Razões e Proporções
A Noção de Razão e Exercícios

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Uma escala E pode ser definida pela fórmula: $E = \dfrac{d}{D}$, na qual d é o comprimento de algum elemento ou a distância entre objetos no mapa e D o tamanho real em centímetros, acompanhada do e (erro gráfico, cujo cálculo é feito como $e = 0,02 \cdot D$ milímetros).

a) As dimensões de um avião em um mapa são 24 cm de comprimento e 19 cm de largura. As dimensões reais são 36 metros de comprimento e $28,5$ de largura. Qual a escala e o erro gráfico desse mapa?

b) Uma estrada de 120 km foi representada num mapa por um segmento de reta de 6 cm. Qual o comprimento na mapa de outra estrada, paralela à inicial, de 85 km?

c) Uma casa com área total de 240 m^2 foi representada numa maquete numa escala de 1 : 400. A sala de jantar na maquete da casa tem dimensões $0,75$ cm e $1,25$ cm. Qual a razão entre a área total da casa e a área da sala jantar?

Exercício 2. Denomina-se velocidade média V_m como a razão entre a distância d percorrida e o tempo t gasto para percorrê-la, ou seja, $V_m = \dfrac{d}{t}$.

a) João percorreu 450 km em 5 horas. Qual foi a sua velocidade média?

b) O maratonista Dennis Kimetto correu por aproximadamente 42 km em quase duas horas. Qual foi sua velocidade média?

Exercício 3. O consumo médio C_m é a razão entre a distância d percorrida e o consumo de combustível g gasto para percorrer essa distância, ou seja, $C_m = \dfrac{d}{g}$.

a) Maria foi de Salvador até Maceió (582 km) no seu carro. Foram gastos nesse percurso $48,5$ litros de combustível. Qual foi o consumo médio do carro de Beatriz?

b) José foi de Salvador até Feira de Santana no seu carro em 4 horas com um consumo médio de 56 km/ℓ. Foram gastos nesse percurso 2 litros de combustível. Qual foi a velocidade média entre Salvador e Feira de Santana?

Exercício 4. Densidade demográfica D é a razão entre o número de habitantes n e a área A que é ocupada por eles, ou seja, $D = \dfrac{n}{A}$. A Região A tem área de 10000 km^2 e população de 98000 habitantes e a Região B possui área de 8000 km^2 e população de 82000 habitantes. Nestas condições, calcule a densidade demográfica de cada uma das regiões e conclua qual é a mais densamente povoada.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Sabe-se que a distância real, em linha reta, de Recife para Vitória de Santo Antão é igual a 45 quilômetros. Um estudante do IFPE, ao analisar um mapa, constatou com sua régua que a distância entre essas duas cidades era de 5 centímetros. De acordo com o texto, o mapa observado pelo estudante está em qual escala?

Exercício 6. Uma biblioteca precisa encadernar alguns livros. Uma oficina pode encadernar estes livros em 30 dias, outra em 45 dias. Em quantos dias estas oficinas podem cumprir a tarefa se trabalharam ao mesmo tempo?

Exercício 7. Um grupo de pessoas foi dividido em duas metades. Na primeira metade, a razão do número de homens para o mulheres é de 1 para 2, na segunda metade, a razão do número de mulheres para o de homens é de 2 para 3. No grupo todo, qual a razão do número de mulheres para o de homens?

Exercício 8. O ourives é um profissional que trabalha com objetos de ouro e prata. Ele sabe que o quilate é uma escala para medir a proporção de ouro em uma joia e decidiu derreter dois anéis de ouro para construir uma aliança. O primeiro anel era de ouro 18 quilates e pesava 2 gramas. Já o segundo era de ouro 10 quilates e pesava 6 gramas. Feito isto, o ourives obteve uma aliança de 8 gramas com quantos quilates?

Exercício 9. Os números a, b, c são inteiros positivos tais que $a \leq b \leq c$. Se b é a média aritmética simples entre a e c, então qual o valor da razão $\dfrac{b-a}{c-b}$?

Exercício 10. Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala $1 : 100$, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3cm, 1cm e 2cm. Qual o volume real do armário, em centímetros cúbicos?

Exercício 12. Ana e Bia percorrem uma pista circular com velocidades constantes, partindo de um mesmo ponto, no mesmo instante, mas em sentidos contrários. O primeiro encontro entre elas se dá a 48 metros à esquerda da largada e o segundo encontro a 20 metros à direita da largada. Qual o comprimento total da pista?

Exercício 13. Helena e Gabriel pulam simultaneamente de uma jangada em um rio e nadam em direções opostas. Gabriel nada rio abaixo seguindo a corrente a determinada velocidade e Helena nada rio acima contra a corrente, possivelmente com uma velocidade diferente. Depois de 5 minutos, eles viram e voltam para a jangada, cada um mantendo uma velocidade constante durante todo o tempo. Quem chega primeiro?

Exercício 14. Em seu treino diário de natação, Esmeraldinho percorre várias vezes, com um ritmo constante de braçadas, o trajeto entre dois pontos A e B situados na mesma margem de um rio. O nado de A para B é a favor da corrente e o nado em sentido contrário é contra a corrente. Um tronco arrastado pela corrente passa por A no exato instante em que Esmeraldinho sai de A. Esmeraldinho chega a B e imediatamente regressa a A. No trajeto de regresso, cruza com o tronco 6 minutos depois de sair de A. A seguir, Esmeraldinho chega a A e imediatamente sai em direção a B, alcançando o tronco 5 minutos depois da primeira vez que cruzou com ele ao ir de B para A. Quantos minutos o tronco leva para ir de A até B?

Exercício 15. Em sua velocidade usual, um homem desce um rio de 15 quilômetros de comprimento em 5 horas a menos que o tempo que ele gasta nadando no mesmo rio percorrendo o caminho contrário. Se ele dobrar a sua velocidade usual, ele passa a descer o rio gastando apenas 1 hora a menos que o tempo gasto na volta. Considerando que a velocidade da correnteza do rio se mantém constante durante os trajetos, qual o seu valor km/h?

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado do Wikipédia e Tutor Brasil)

a) A escala fica $E = \frac{24}{3600} = \frac{1}{150}$, que pode ser verificada ainda com as outras medidas dadas, marcando com $E = \frac{19}{2850} = \frac{1}{150}$. E o erro gráfico é $e = 0,02 \cdot 150 = 30$ mm.

b) A escala do mapa é $E = \frac{6}{12000000} = \frac{1}{2000000}$. Agora, um objeto com comprimento de 85 km, no mapa terá $\frac{1}{2000000} \cdot 8500000 = 4,25$ cm com erro de $0,02 \cdot 8500000 = 170000$ mm.

c) As dimensões reais da sala de jantar são:

$$\frac{1}{400} = \frac{0,75}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 300\ cm = 3\ m; \text{ e}$$
$$\frac{1}{400} = \frac{1,25}{y} \quad \Rightarrow \quad y = 500\ cm = 5\ m.$$

Como a área da sala é $3 \cdot 5 = 15$ m^2, a razão entre a área total da casa e a sala de jantar é $\frac{240}{15} = 16$.

2. Aplicando o conceito de velocidade média temos:

a) $V_m = \frac{450}{5} = 90$ km/h.

b) $V_m = \frac{42}{2} = 21$ km/h.

3. Aplicando o conceito de consumo médio ficamos com:

a) $C_m = \frac{582}{48,5} = 12$ km/ℓ .

b) $V_m = \frac{2 \cdot 56}{4} = 28$ km/h.

4. Aplicando o conceito de densidade demográfica temos

- $D_A = \frac{98000}{10000} = 9,8$ pessoas/k^2 .
- $D_B = \frac{82000}{8000} = 10,25$ pessoas/k^2 .

Logo, B é mais densamente povoada que A.

5. (Adaptado do vestibular do IFPE (PE) $-$ 2015)
Basta encontra o quociente $\frac{5 \cdot 10^{-2}}{45 \cdot 10^3}$ que representa a proporção de 1 : 900000.

6. Uma oficina pode encadernar $\frac{1}{30}$ de todos os livros por dia e outra pode encadernar $\frac{1}{45}$ de todos os livros por dia. Logo, trabalhando juntas, elas pode encadernar

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{45+30}{30 \cdot 45} = \frac{75}{45 \cdot 30} = \frac{1}{18}.$$

de todos os livros por dia. Logo elas precisam de 18 dias.

7. (Adaptado do Tutor Brasil)
Sejam H_i e M_i as quantidade de homens e mulheres no grupo i, com $i \in \{1, 2\}$, respectivamente, e $x = H_i + M_i$. Do primeiro grupo temos:

$$\begin{aligned} \frac{H_1}{1} &= \frac{M_1}{2} \\ \frac{H_1+M_1}{1+2} &= \frac{H_1}{1} \\ H_1 &= \frac{x}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{H_1}{1} &= \frac{M_1}{2} \\ \frac{H_1+M_1}{1+2} &= \frac{M_1}{2} \\ M_1 &= \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

Do segundo grupo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{H_2}{2} &= \frac{M_2}{3} \\ \frac{H_2+M_2}{2+3} &= \frac{H_2}{2} \\ H_2 &= \frac{2x}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{H_2}{2} &= \frac{M_2}{3} \\ \frac{H_2+M_2}{2+3} &= \frac{M_2}{3} \\ M_2 &= \frac{3x}{5} \end{aligned}$$

Agora, observando a razão no grupo todo temos:

$$\begin{aligned} \frac{M_1+M_2}{H_1+H_2} &= \frac{\frac{2x}{3} + \frac{2x}{5}}{\frac{x}{3} + \frac{3x}{5}} \\ \frac{M_1+M_2}{H_1+H_2} &= \frac{\frac{10x+6x}{15}}{\frac{5x+9x}{15}} = \frac{16x}{14x} = \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular do IFPE (PE) $-$ 2015)
O novo anel tem $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ do primeiro e $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ do segundo. A razão do quilate ficará então, $\frac{1}{4} \cdot 18 + \frac{3}{4} \cdot 10 = \frac{48}{4} = 12$ quilates.

9. (Adaptado do exame do CM de Brasília)
Podemos escrever que $b = \frac{a+c}{2}$, ou $2b = ac + c$, observando a razão pedida e aplicando uma razão conhecida,

ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{c-b} &= \frac{2\cdot(b-a)}{2\cdot(c-b)}\\ &= \frac{2b-2a}{2c-2b}\\ &= \frac{a+c-2a}{2c-(a+c)}\\ &= \frac{c-a}{2c-a-c}\\ &= \frac{c-a}{c-a} = 1.\end{aligned}$$

10. (Adaptado do ENEM − 2013)
A razão entre as quantidades de telhas e tijolos é $\dfrac{1500}{1200} = \dfrac{5}{4}$. Como o caminhão já recebeu 900 telhas, vamos verificar a quantidade equivalente de tijolos. Assim, $\dfrac{5}{4} = \dfrac{900}{720}$, segue que 900 telhas equivalem a 720 tijolos, faltando, para carga máxima, $1200 - 720 = 480$ tijolos.

11. (Adaptado do ENEM − 2014)
Como a escala do projeto é

$$\frac{1}{100} = \frac{2}{200} = \frac{3}{300},$$

então as dimensões do armário são 100cm, 200cm e 300. Assim, seu volume é igual a $100\cdot 200\cdot 300 = 6000000\text{cm}^3$.

12. (Adaptado do vestibular da ESPM (SP) − 2015)
Sejam a e b as quantidades de metros por minuto que Ana e Bia andam, respectivamente e d a distância total da pista. Suponhamos, sem perda de generalidade, que Ana anda para a esquerda da linha de largada, então o primeiro encontro ocorreu após Ana andar 48 metros e Bia $d-48$, em t_1 minutos. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{48}{a} &= \frac{d-48}{b}\\ \frac{b}{a} &= \frac{d-48}{48}.\end{aligned}$$

Até o segundo encontro, Ana andou $d-20$ e Bia $48+20 = 68$ após t_2 minutos, o que gera

$$\begin{aligned}\frac{d-68}{a} &= \frac{68}{b}\\ \frac{b}{a} &= \frac{68}{d-68}.\end{aligned}$$

Comparando os valores encontrados, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d-48}{48} &= \frac{68}{d-68}\\ (d-48)(d-68) &= 48\cdot 68\\ d^2-68d-48d+48\cdot 68 &= 48\cdot 68\\ d^2-116d &= 0\\ d(d-116) &= 0.\end{aligned}$$

Daí ou $d = 0$, que não convém, ou $d = 116$ metros.

13. A distância percorrida por Gabriel no tempo de 5 minutos foi $D_G = (V_G + V_C)\cdot 5$, onde V_G e V_C são as velocidades de Gabriel e da correnteza, respectivamente. Já Helena percorreu $D_H = (V_H - V_C)\cdot 5$, com velocidade V_H. Na volta, o tempo t_G de Gabriel será $D_G = (V_G - V_C)\cdot t_G$ e t_H de Helena será $D_H = (V_H + V_C)\cdot t_H$. Perceba que

$$\begin{aligned}(V_H - V_C)\cdot 5 &= (V_H + V_C)\cdot t_H\\ t_H &= 5\cdot\frac{V_H - V_C}{V_H + V_C} < 5.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(V_G + V_C)\cdot 5 &= (V_G - V_C)\cdot t_G\\ t_G &= 5\cdot\frac{V_G + V_C}{V_G - V_C} > 5.\end{aligned}$$

Então, $t_H < t_G$ e Helena chega antes.

14. (OBM − Eureka 24)
Sabemos que:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} \text{ e tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}}.$$

Para as velocidades c da correnteza e v a de Esmeraldinho (E) e d a distância do ponto A até o ponto B temos que o tronco percorreu até 1° encontro $6c$ e depois mais $5c$ até o 2° encontro. (E) leva $\dfrac{d}{v+c}$ minutos para ir de A até B, pois como ele está nadando a favor da correnteza ele fica com velocidade $v+c$. Escrevemos $t_{AB} = \dfrac{d}{v+c}$.
Já para ir do ponto B até o ponto A ele nada contra a correnteza e por isso vai com velocidade $v-c$, $t_{BA} = \frac{d}{v-c}$.
O tempo que (E) leva para ir do ponto A ao ponto B e do ponto B ao primeiro encontro deve ser igual a 6 minutos, a distância de B até o ponto do primeiro encontro é $d-6c$, já que o tronco já havia percorrido $6c$, e motamos a equação:

$$\begin{aligned}t_{AB} + t_{B1^\circ} = \frac{d}{v+c} + \frac{d-6c}{v-c} &= 6\\ d-3c &= 3v. \qquad (1)\end{aligned}$$

(E) leva de A até B, de B até A e de A até o 2° encontro $6+5$ min, então:

$$\begin{aligned}\frac{d}{v+c} + \frac{d}{v-c} + \frac{11c}{v+c} &= 11,\\ 2d+11c &= 11v. \qquad (2)\end{aligned}$$

O tempo que o tronco leva para ir de A até B, ou seja, $\frac{d}{c}$. Por (1) temos $d = 3v + 3c$, e substituído (2):

$$2(3v + 3c) + 11c = 11v \Rightarrow v = \frac{11c}{5}.$$

Como $d = 3v + 3c$ então $d = \frac{66c}{5}$. O tronco levou A até B:

$$\frac{d}{c} = \frac{\frac{66c}{5}}{c} = 13 \text{ minutos e } 12 \text{ segundos.}$$

15. Sabemos que:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} \text{ e tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}}.$$

Quando o homem nada no sentido da correnteza, a sua velocidade relativa deve ser somada com a do rio e, quando nada no sentido contrário ao da correnteza, a velocidade do rio deve ser subtraída de sua velocidade. Primeiramente, sejam c e v as velocidades da correnteza do rio e do homem e $d = 15$ a distância percorrida. O homem leva $\frac{15}{v+c}$ minutos, nadando a favor da correnteza e $\frac{15}{v-c}$ minutos, nadando contra a correnteza. Assim, os dados do enunciado podem ser traduzidos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{15}{v+c} = \dfrac{15}{v-c} - 5 \\ \\ \dfrac{15}{2v+c} = \dfrac{15}{2v-c} - 1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $(v^2 - c^2)$ e a segunda por $(4v^2 - c^2)$, obtemos

$$\begin{cases} 15(v-c) = 15(v+c) - 5(v^2 - c^2) \\ \\ 15(2v-c) = 15(2v+c) - (4v^2 - c^2) \end{cases}$$

Por comparação, segue que

$$5(v^2 - c^2) = (4v^2 - c^2),$$

ou seja,

$$v^2 = 4c^2.$$

Como as velocidade são positivas, $v = 2c$. Substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações do sistema, obtemos $c = 2$ e, consequentemente, $v = 4$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com