Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Monotonicidade, Máximos e Mínimos

Material elaborado por Letícia Mattos

Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1
Monotonicidade, Máximos e Mínimos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Para cada uma das funções abaixo, encontre os valores extremos e suas respectivas imagens inversas.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{sen}(x)$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$

Exercício 2. Encontre os valores máximo e mínimo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$. Interprete o resultado geometricamente.

Exercício 3. Encontre o valor máximo a para o qual a equação

$$cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = a^2$$

possua soluções reais. Nesse caso, encontre também as soluções para essa equação.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona. Prove que a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

também é monótona.

Exercício 5. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções monótonas. Prove que $f \circ g$ também é uma função monótona.

Exercício 6. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função que satisfaz a seguinte propriedade:

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

para todos $x, y \in [0,1]$ distintos. Mostre que

$$\#\{t : f(t) = t\} \leq 1.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência de números reais distintos de tamanho pelo menos $n^2 + 1$ contém uma subsequência monótona de tamanho $n + 1$. Encontre uma sequência de tamanho n^2 que não satisfaz essa propriedade.

Exercício 8. Para todo $r \in \mathbb{N}$ e todo $x \geq -1$,

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx.$$

Exercício 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a > 0$. Mostre que

(a) $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Mais geralmente, mostre que para todo número real $\alpha \in [0,1]$ temos

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Interprete geometricamente o item (b).

Respostas e Soluções.

1.

(a) A função f não possui valor máximo pois, para todo real r, existe x tal que $f(x) > r$. Por outro lado, $f(x) > f(0) = 0$, para todo x real não-nulo. Isso implica que f tem valor mínimo igual a 0 e $f^{-1}(0) = \{0\}$.

(b) A função $\operatorname{sen}(x)$ é uma função contínua e periódica cujo contradomínio é igual a $[-1, 1]$. Logo, seus valores máximo e mínimo são iguais a, respectivamente, -1 e 1. Por outro lado,

$$f^{-1}(-1) = \{3\pi/2 + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$f^{-1}(1) = \{\pi/2 + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) A função $\cos(x)$ é uma função contínua e periódica cujo contradomínio é igual a $[-1, 1]$. Logo, seus valores máximo e mínimo são iguais a, respectivamente, -1 e 1. Por outro lado,

$$f^{-1}(-1) = \{\pi/2 + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$f^{-1}(1) = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Os valores máximo e mínimo são, respectivamente, $-1/2$ e $1/2$. Para encontrar os valores máximo e mínimo de f, vamos encontrar primeiro o valor máximo da função $g := f^2$. Note que

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x) \\ &= -\operatorname{sen}^4(x) + \operatorname{sen}^2(x). \end{aligned}$$

Na segunda igualdade acima, utilizamos a identidade $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$. Os valores máximo e mínimo de g podem ser encontrados utilizando pelo menos dois métodos: 1) mudança de variáveis $y = \sin^2(x)$ junto com uma comparação de g com a parábola de equação $p(y) = -y^2 + y$; 2) desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Iremos utilizar o segundo método, mas encorajamos o leitor a resolver o exercício das duas formas.

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica nos diz que

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy,$$

para quaisquer $x, y \geq 0$. A igualdade é válida se, e somente se, $x = y$. Por essa desigualdade, temos

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{sen}^2(x)(1 - \operatorname{sen}^2(x)) \\ &\leq 1/4, \end{aligned}$$

com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se, $\operatorname{sen}^2(x) = 1/2$. Disso, segue que o valor máximo de g é $1/4$, que é atingido para todos os valores de x no conjunto $\{\pi/4 + \pi n/2 : n \in \mathbb{Z}\}$. Isso implica que os valores máximo e mínimo de f são, respectivamente, $1/2$ e $-1/2$. De fato, $f(x) = 1/2$ para todo $x \in \{\pi/4 + \pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ e $f(x) = -1/2$ para todo $x \in \{3\pi/4 + \pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Geometricamente, o produto $\cos(x)\operatorname{sen}(x)$ representa, para $x \in (0, \pi/2)$, a área de um retângulo de lados $cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$, com diagonal 1. O máximo de g ser igual a $1/2$ (atingido quando $x = \pi/4$) nos diz que, entre os retângulos de diagonal igual a 1, o quadrado de lado $1/\sqrt{2}$ é o que maximiza a área.

3. A equação é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen}(x) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \operatorname{sen}(x) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right). \end{aligned}$$

Como o valor máximo da função seno é igual a 1, o valor máximo que a pode atingir é igual a $\sqrt{2}$. Além disso, os valores de x para os quais $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1$ são todos aqueles pertencentes ao conjunto $\{\pi/3 + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

4. Note que

$$\begin{aligned} (n+1)A_{n+1} &= nA_n + a_{n+1} \\ n(A_{n+1} - A_n) &= a_{n+1} - A_{n+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Se $(a_n)_n$ for decrescente, então $A_n > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, a equação acima nos dá

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= (a_{n+1} - A_{n+1})/n \\ &< 0. \end{aligned}$$

Isso implica que a sequência $(A_n)_n$ também é decrescente. Por outro lado, se a sequência $(a_n)_n$ for crescente, então $A_n < a_n$ e a equação (1) nos dá

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= (a_{n+1} - A_{n+1})/n \\ &> 0. \end{aligned}$$

Isso implica que a sequência $(A_n)_n$ também é crescente.

5. Sejam $\square$ e $\blacksquare$ dois símbolos, iguais a $<$ ou $>$, e tais que

$$\begin{cases} x < y \iff g(x)\square g(y), \\ x\square y \iff f(x)\blacksquare f(y) \end{cases}$$

para todos x, y reais distintos. Então,

$$\begin{aligned} x < y &\iff g(x)\square g(y) \\ &\iff f(g(x))\blacksquare f(g(y)). \end{aligned}$$

Isso implica que $f \circ g$ é função monotona, como queríamos.

6. Sejam $a, b \in [0, 1]$ números reais que satisfazem $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Como $|f(a) - f(b)| = |a - b|$, a propriedade de f nos permite concluir que $a = b$. Logo, existe no máximo um ponto a que satisfaz $f(a) = a$.

7. Este exercício é um teorema de Erdős e Szekeres de 1935. Existem diversas provas desse teorema. Aqui, vamos explicar uma das mais bonitas.

Seja $x_1, \ldots, x_{n^2+1}$ uma sequência de números reais distintos. Assuma, por contradição, que não existe sequência crescente ou decrescente de tamanho $n+1$. Seja $f : \{1, 2, \ldots, n^2+1\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ uma função definida por

$$f(i) := \begin{array}{l}\text{tamanho da maior subsequência crescente que}\\ \text{termina em } x_i.\end{array}$$

Como o domínio e o contradomínio de f tem, respectivamente, n^2+1 e n elementos, o princípio da casa dos pombos nos diz que devem existir $\left\lceil \dfrac{n^2+1}{n} \right\rceil = n+1$ números reais cuja imagem sob f é a mesma. Isto é, existem $i_1 < \ldots < i_{n+1}$ e a tais que

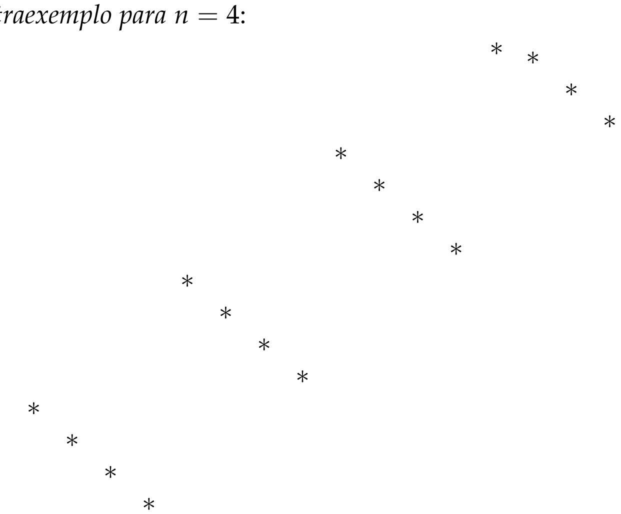
$$f(x_{i_1}) = \ldots = f(x_{i_{n+1}}) = a$$

Agora, afirmamos que $x_{i_j} > x_{i_{j+1}}$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De fato, se isso não fosse verdade, existiria uma sequência crescente de tamanho $a+1$ que terminaria em $x_{i_{j+1}}$: tome subsequência de tamanho $f(x_{i_j}) = a$ que termina em x_{i_j} e adicione $x_{i_{j+1}}$ a ela. Assim, concluímos que

$$x_{i_1} > \cdots > x_{i_{n+1}}$$

é uma sequência decrescente de tamanho $n+1$, o que contradiz nossa hipótese de que não existe sequência crescente ou decrescente de tamanho $n+1$.

Contraexemplo para $n = 4$:



Cada ponto acima representa um número real. Eles estão divididos em 4 sequências decrescentes, digamos, s_1, s_2, s_3 e s_4 (da esquerda para a direita), com 4 elementos cada. Nesse desenho, todos os elementos de s_i são menores que todos os elementos de s_{i+1}, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. É possível verificar que isso nos dá uma sequência com 16 números reais em que a maior subsequência monónotona contém 4 elementos.

Para o caso geral, basta generalizarmos o desenho acima. Para todo $n \in \mathbb{N}$, é possível encontrar n sequências decrescentes $s_1, \ldots, s_n$, com n elementos cada, tais que todos os elementos de s_i são menores que todos os elementos de s_{i+1}, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nesse caso, também verifica-se que a maior subsequência monónotona contém n elementos.

8. Procederemos por indução. Para $r = 1$ a afirmação é verdadeira. Agora, suponha que a afirmação é verdadeira para r. Vamos prová-la para $r+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{r+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^r\\ &\geq (1+x)\cdot(1+rx)\\ &= 1 + rx + x + rx^2\\ &\geq 1 + (r+1)x.\end{aligned}$$

Por indução, isso implica que a desigualdade é verdadeira para todo $r \in \mathbb{N}$, como queríamos.

9.

(a) Note que a desigualdade $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ é equivalente a

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \geq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \iff (x_1-x_2)^2 \geq 0.$$

Como $(x_1-x_2)^2 \geq 0$ para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, segue o resultado.

(b) Procederemos de maneira similar ao item anterior. Para todo número real $\alpha \in [0,1]$, a desigualdade

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$$

é equivalente a

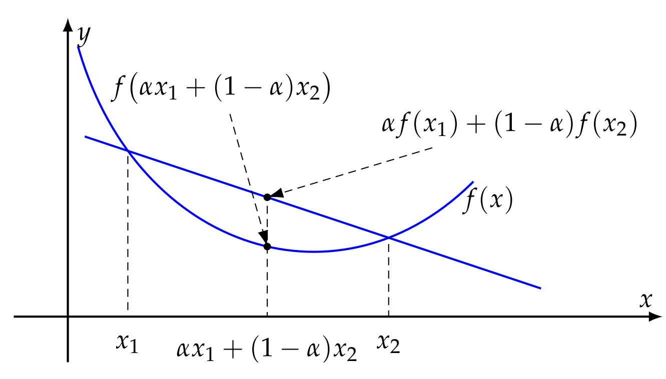
$$\begin{aligned}\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 &\geq \Big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\Big)^2\\ (\alpha-\alpha^2)x_1^2 + \big(1-\alpha-(1-\alpha)^2\big)x_2^2 &\geq 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2.\end{aligned}$$

Note que as desigualdades acima são verdadeiras para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Então, suponha que $\alpha \in (0,1)$. Neste caso, podemos dividir ambos os lados da última desigualdade por $\alpha(1-\alpha)$. Isso nos dá

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2,$$

que, por sua vez, é equivalente a $(x_1-x_2)^2 \geq 0$. Isso nos dá a validade da desigualdade desejada.

(c) Geometricamente, a desigualdade no item (b) nos diz que, dada uma parábola côncava para cima, o segmento de reta que liga quaisquer dois pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ está acima do segmento da parábola que está entre as abcissas x_1 e x_2 (veja a ilustração abaixo).



Material elaborado por Letícia Mattos