Introdução ao Cálculo

Funções Contínuas

Continuidade em um ponto

Funções Contínuas
Continuidade em um ponto

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 900}{x - 30}$, para $x \neq 30$, determine o valor de $f(30)$ para que a função seja contínua em 30.

Exercício 2. Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$, para $x \neq 7$, determine o valor de $f(7)$ para que a função seja contínua em 7.

Exercício 3. Se $f(x) = \dfrac{2(x^3 - 8)}{x^2 - 4}$, para $x \neq 2$, determine o valor de $f(2)$ para que a função seja contínua em 2.

Exercício 4. Se $f(x) = \dfrac{2(x^3 - 216)}{x^2 - 36}$, para $x \neq 6$, determine o valor de $f(6)$ para que a função seja contínua em 6.

Exercício 5. Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x + 18}{x - 6}$, para $x \neq 6$, determine o valor de $f(6)$ para que a função seja contínua em 6.

Exercício 6. Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 17x + 70}{x - 10}$, para $x \neq 10$, determine o valor de $f(10)$ para que a função seja contínua em 10.

Exercício 7. Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, para $x \neq 1$, determine o valor de $f(1)$ para que a função seja contínua em 1.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Se $f(x) = \dfrac{x^6 - 1}{x - 1}$, para $x \neq 1$, determine o valor de $f(1)$ para que a função seja contínua em 1.

Exercício 9. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3^2}{\sqrt[4]{x} - 3}$, para $x \neq 3^4$, determine o valor de $f(3^4)$ para que a função seja contínua em 3^4.

Exercício 10. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 19^2}{\sqrt[4]{x} - 19}$, para $x \neq 19^4$, determine o valor de $f(19^4)$ para que a função seja contínua em 19^4.

Exercício 11. Se $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x - 2}\right)$ para $x \neq 2$ e $f(2) = 1$, determine o valor em que $f(x)$ não é contínua.

Exercício 12. Se $f(x) = \dfrac{x - 10}{\sqrt{x} - \sqrt{10}}$, para $x \neq 10$, calcule o valor de $f(10)$ para que f seja contínua em 10.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ para $x \neq 3$, calcule o valor de $f(3)$ para que f seja contínua em 3.

Exercício 14. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x + 5} - 2}{x^2 - 1}$ para $x \neq \pm 1$, calcule o valor $f(1)$ para que f seja contínua em 1.

Exercício 15. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$, para $x \neq 2$, calcule o valor de $f(2)$ para que f seja contínua em 2.

Exercício 16. Se $f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 4x + a}{x^2 - 2x + 1}$, para $x \neq 1$, e $f(1) = L$. Determine os valores de a e L para que f seja contínua em a.

Exercício 17. Considere a função $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida da seguinte maneira: $f(1) = 1$ e se $a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ é a representação decimal de a (escrito sem terminar em $999\ldots$ quando possível). Por exemplo, $0,2299\ldots$ é trocado por $0,23$. Defina

$$f(a) = 0,0a_1 0a_2 0a_3 \ldots .$$

Determine se f é contínua em $a = 0,22$.

Exercício 18. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Determine se existe L que torne f contínua no ponto 0.

Respostas e Soluções.

1. Como $\lim_{x\to 30} \dfrac{x^2-900}{x-30} = \lim_{x\to 30}(x+30) = 60$, devemos ter $f(30) = 60$.

2. Como $\lim_{x\to 7} \dfrac{x^2-49}{x-7} = \lim_{x\to 7}(x+7) = 14$, devemos ter $f(7) = 14$.

3. Como $\lim_{x\to 2} \dfrac{2(x^3-8)}{x^2-4} = 6$, devemos ter $f(2) = 6$.

4. Como $\lim_{x\to 6} \dfrac{2(x^3-216)}{x^2-36} = 18$, devemos ter $f(6) = 18$.

5. Como $\lim_{x\to 6} \dfrac{x^2-9x+18}{x-6} = \lim_{x\to 6}(x-3) = 3$, devemos ter $f(6) = 3$.

6. Como $\lim_{x\to 10} \dfrac{x^2-17x+70}{x-10} = \lim_{x\to 10}(x-7) = 3$, devemos ter $f(10) = 3$.

7. Como $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$, devemos ter $f(1) = 2$.

8. Como $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x-1} = 6$, devemos ter $f(1) = 6$.

9. Como $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-3^2}{\sqrt[4]{x}-3} = \sqrt[4]{x}+3$, temos $\lim_{x\to 3^4} f(x) = 6$. Portanto, devemos ter $f(3^4) = 6$.

10. Como $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-19^2}{\sqrt[4]{x}-19} = \sqrt[4]{x}+19$, temos $\lim_{x\to 19^4} f(x) = 38$. Portanto, devemos ter $f(19^4) = 38$.

11. A função $\dfrac{1}{x-2}$ é contínua para todo $x \neq 2$ e $\sin x$ é contínua para todo x. A composição dessas funções não é contínua apenas em $x = 2$.

12. Temos $\lim_{x\to 10} \dfrac{x-10}{\sqrt{x}-\sqrt{10}} = \lim_{x\to 10}(\sqrt{x}+\sqrt{10}) = 2\cdot\sqrt{10}$. Portanto, devemos ter $f(10) = 2\cdot\sqrt{10}$.

13. Como $\sqrt{x}-\sqrt{3} \neq 0$ se $x \neq 3$, podemos efetuar o cancelamento de $\sqrt{x}-\sqrt{3}$ na fatoração a seguir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\\
&= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Portando, devemos ter $f(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

14. Primeiramente note que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{(x-1)(x+1)}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{(x-1)}\\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{(x-1)}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\sqrt[3]{3x+5} = u$, temos $u \to 2$ quando $x \to 1$ e $u^3-8 = 3(x-1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1} &= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{(u^3-8)/3}\\
&= \lim_{u\to 2} \frac{3(u-2)}{(u^3-8)}\\
&= \lim_{u\to 2} \frac{3(u-2)}{(u-2)(u^2+2u+4)}\\
&= \lim_{u\to 2} \frac{3}{(u^2+2u+4)}\\
&= \frac{3}{12}
\end{aligned}$$

Logo $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{12} = \dfrac{3}{24}$. Portanto, devemos ter $f(1) = 3/24$.

15. Como $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$, devemos ter

$$\begin{aligned}
f(2) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}\right)\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

16. Para que f seja contínua em 1, devemos ter $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Se 1 não é raiz de $x^4-4x+a = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-2x+1} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-4x+a}{x^2-2x+1}\cdot\frac{1}{x^4-4x+a}\right)\\
&= L\cdot\frac{1}{a-3}.
\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois não existe $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2-2x+1}$. Logo $a = 3$ e para esse valor temos

$$x^4-2x+3 = (x-1)^2(x^2+2x+3).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x+3}{x^2-2x+1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x^2+2x+3)}{(x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 1}(x^2+2x+3)\\
&= 6.
\end{aligned}$$

Consequentemente $L = 6$.

17. Defina a sequência $\{x_n\}$ por

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,219 \\ x_2 &= 0,2199 \\ x_3 &= 0,21999 \\ x_4 &= 0,219999 \\ x_5 &= 0,2199999 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Com essa construção, temos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 0,020109 \\ f(x_2) &= 0,02010909 \\ f(x_3) &= 0,0201090909 \\ f(x_4) &= 0,020109090909 \\ f(x_5) &= 0,02010909090909 \\ &\ldots \end{aligned}$$

é uma sequência que converge para

$$b = 0,0201\overline{09}$$

Como

$$\begin{aligned} 0,0202 &= f(a) \\ &\neq \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= b \end{aligned}$$

Podemos concluir que f não é contínua em a.

18. Considere as sequências:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\pi\cdot n} \\ y_n &= \frac{1}{2\pi\cdot n + \pi/2} \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \\ \lim_{n\to\infty} y_n &= \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, para que f seja contínua em 0, devemos ter $L = 0$. Por outro lado, de $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, pelo mesmo argumento deveríamos ter $L = 1 \neq 0$. Esse absurdo mostra que não há valor para L que torne f contínua.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com