**Módulo de Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares.**

# Relações Métricas em Polígonos Regulares

**9º ano E.F.**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

**Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares.**
**Relações Métricas em Polígonos Regulares**

## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Na figura 1, estabeleça uma relação entre:

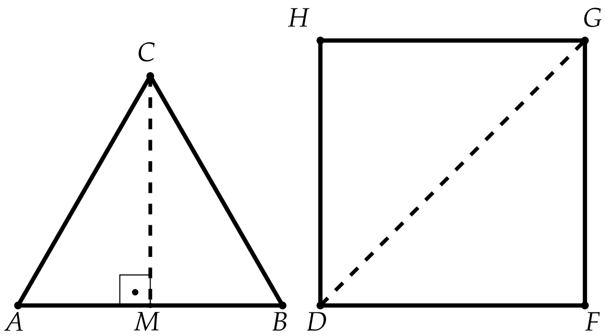



Figura 1

a) o lado do triângulo equilátero e sua diagonal.

b) o lado do quadrado e sua diagonal.

**Exercício 2.** Julgue a afirmação abaixo como ou verdadeira ou falsa.
*Todas as diagonais de um hexágono regular têm medidas iguas.*

**Exercício 3.** Na figura 3, temos o $\triangle ABC$ equilátero. Lembrando que o incentro, centro da circunferência inscrita, é o encontro das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, responda:

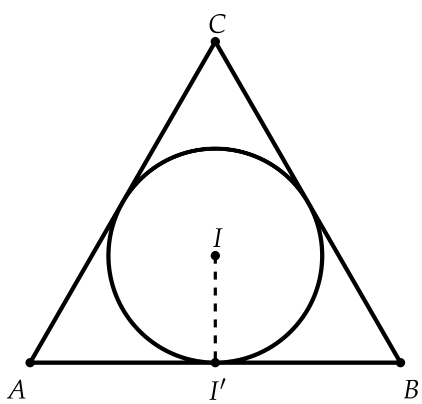



Figura 3

a) Se raio da circunferência inscrita (*inraio*) vale 6 cm, qual o valor da medida do lado desse triângulo?

b) Se raio da circunferência inscrita (*inraio*) vale $r$, qual o valor da medida do lado do triângulo em função de $r$?

**Exercício 4.** Observando o triângulo equilátero $\triangle ABC$ da figura abaixo, determine a medida do seu lado em função do seu circunraio $CM$.

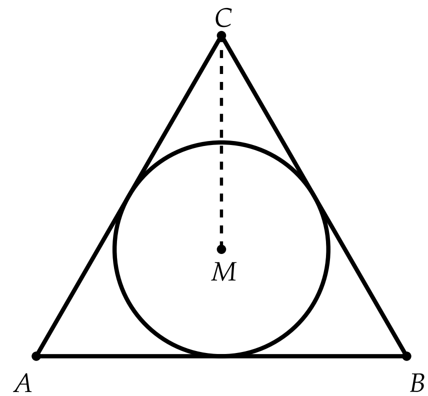



Figura 4

**Exercício 5.** Prove que, num triângulo equilátero, o raio $R$ da circunferência circunscrita é o dobro do raio $r$ da circunferência inscrita.

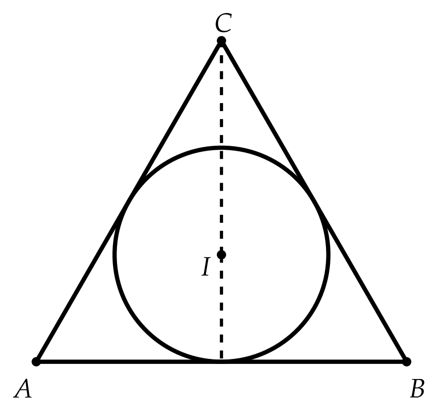



Figura 5

**Exercício 6.** Calcule a medida do lado de um quadrado:

a) inscrito em uma circunferência de raio 20 cm.

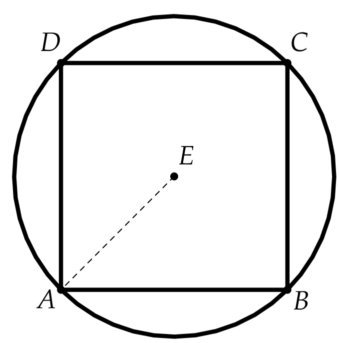



Figura 6

b) inscrito em uma circunferência de raio $R$ cm.

c) inscrito em uma circunferência de raio $r$ cm.

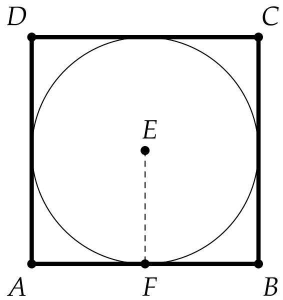



Figura 7

**Exercício 7.** No hexágono inscrito da figura 9 determine:

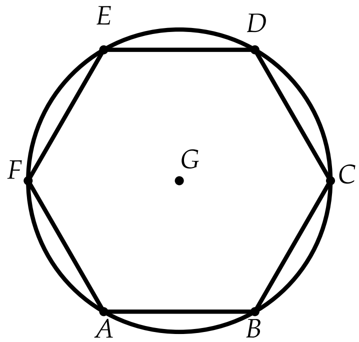



Figura 9

a) a medida do lado para o circunraio igual 2 cm.

b) a medida do lado em função do circunraio igual a $R$.

**Exercício 8.** No hexágono inscrito da figura 11, determine a medida do lado para o inraio igual a 3 $cm$.

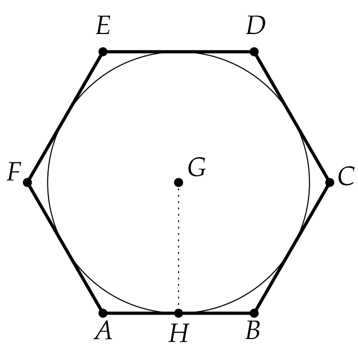



Figura 11

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 9.** A partir do meio-dia, João faz, a cada 80 minutos, uma marca na posição do ponteiro das horas do seu relógio.

a) Depois de quanto tempo não será mais necessário fazer novas marcas no relógio?

b) Qual a soma dos ângulos internos do polígono formado pelas marcas?

**Exercício 10.** Calcule o lado de um triângulo equilátero inscrito em um círculo, sabendo que o lado do hexágono inscrito nesse círculo mede $5\sqrt{3}$ cm.

**Exercício 11.** É dado um quadrado $ABCD$ de lado $a$. Determine o raio da circunferência que contém os vértices $A$ e $B$ e é tangente ao lado $CD$.

**Exercício 12.** Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo cujos lados medem 6 cm, 6 cm e 4 cm.

**Exercício 13.** Na figura 15, o $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero e $CD$ é tanto uma altura do triângulo quanto um diâmetro do círculo. Se $AB = 10cm$, determine a área sombreada.

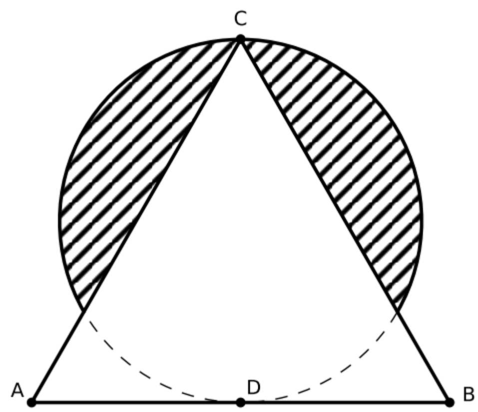
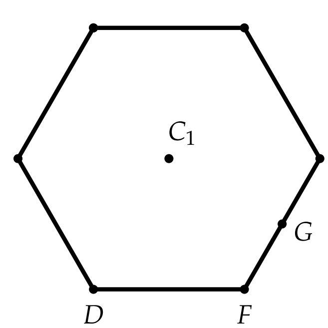



Figura 15

**Exercício 14.** Os vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pertencem a um polígono regular convexo de $n$ lados que está inscrito em um circunferência. Se o vértice $A_{15}$ é diametralmente oposto ao vértice $A_{46}$, qual o valor de $n$?

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 15.** Na figura abaixo, temos um hexágono regular de centro $C_1$ e $G$ é o ponto médio de um dos seus lados. Qual a medida de $G\hat{C}_1D$?



**Exercício 16.** Na figura abaixo, temos dois hexágonos regulares de centros $C_1$ e $C_2$. Prove que o segmento $C_1C_2$ está contido na mediatriz do segmento $AB$.

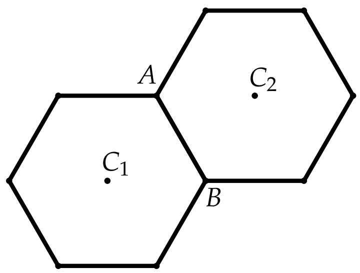



Figura 18

**Exercício 17.** Na figura 20, temos três hexágonos regulares de centros $C_1$, $C_2$ e $C_3$. Prove que os pontos $A$, $B$, $C_2$ e $C_3$ são colineares.

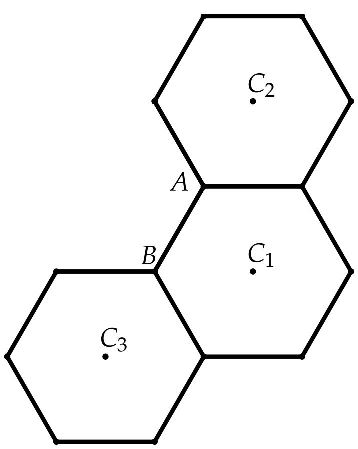



Figura 20

**Exercício 18.** Na figura 22, temos oito hexágonos regulares inscritos em circunferências de centros $C_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, e raios unitários. Qual a distância de $C_5$ a $C_8$?

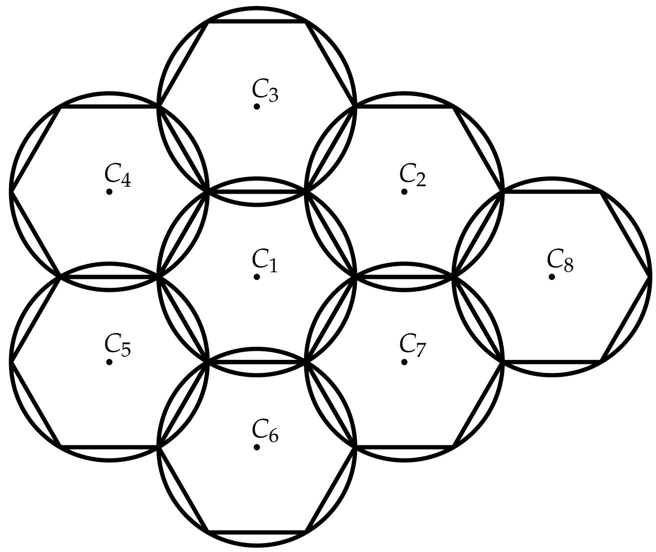



Figura 22

**Exercício 19.** Um dodecágono regular foi inscrito numa circunferência de raio igual a 2 cm. Pergunta-se:

a) qual a área desse polígono?

b) qual o valor do lado desse dodecágono regular?

**Exercício 20.** Um octógono regular inscrito está numa circunferência de raio igual a 1 cm. Pergunta-se:

a) qual a área desse polígono?

b) qual o valor do lado desse octógono regular?

**Exercício 21.** Seja $\ell_n$ a medida do lado de um polígono regular de $n$ lados, inscrito em um círculo de raio $R$. Qual das afirmações abaixo está correta para todo valor de $n$?

a) $\text{sen}\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{\ell_n}{2R}$.

b) $\text{sen}\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{\ell_n}{2R}$.

c) $\text{sen}\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{\ell_n}{R}$.

d) $\cos\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{\ell_n}{R}$.

e) $\text{sen}\left(\dfrac{360^\circ}{n}\right) = \dfrac{\ell_n}{R}$.

**Exercício 22.** Um hexágono é chamado equiângulo quando possui os seis ângulos internos iguais. Considere o hexágono equiângulo $ABCDEF$ com lados 3, $y$, 5, 4, 1 e $x$, da figura a seguir. Determine os comprimentos $x$ e $y$ desconhecidos.

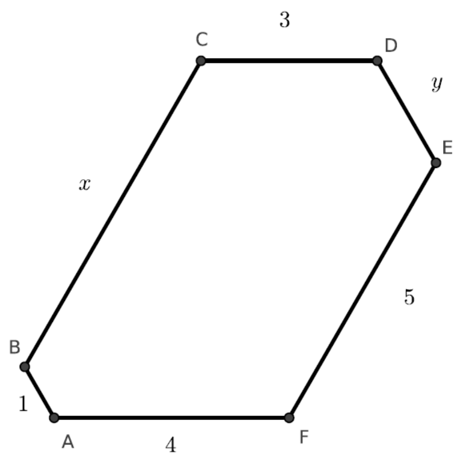



Figura 24

**Respostas e Soluções.**

**1.** Uma boa estratégia é construir triângulos, de preferência retângulos, que nos permitam utilizar o Teorema de Pitágoras, as Leis dos Senos ou a Lei dos Cossenos. Agora, observe a Figura 1.

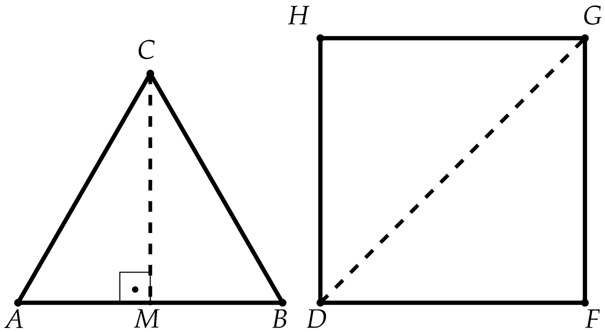



Figura 1

a) Sejam $AB = \ell$ e $CM = h$. Como $ABC$ é um triângulo equilátero e $CM$ é uma altura, segue que $AM = \dfrac{\ell}{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} AM^2 + MC^2 &= AC^2 \\ \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 &= \ell^2 \\ h^2 &= \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \\ h^2 &= \frac{3\ell^2}{4} \\ h &= \frac{\ell\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

b) No caso do $\square DFGH$, temos $DF = FG = \ell$ e a diagonal $BG = d$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $DFG$, retângulo em $F$, obteremos

$$\begin{aligned} DF^2 + FG^2 &= GD^2 \\ \ell^2 + \ell^2 &= d^2 \\ d^2 &= 2\ell^2 \\ d &= \ell\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**2.** Observe que:

i) todo polígono regular é inscritível, isto é, existe uma circunferência que contém todos os seus vértices; e

ii) o centro do polígono regular coincide com o circuncentro e com o incentro;

Considere a Figura 2 a as duas diagonais traçadas.

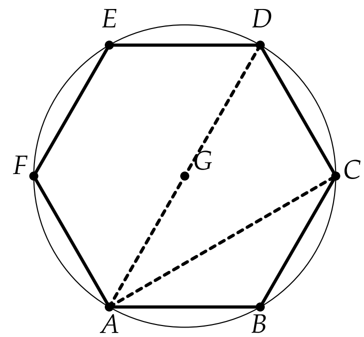



Figura 2

Como a maior corda de uma circunferência é o diâmetro, podemos concluir que $AD > AC$ e consequentemente a proposição do problema é falsa.

**3.** Sejam $I$ o ponto de encontro das bissetrizes e $I'$ a sua projeção em $AC$. Teremos que $II'A = 90°$ e $AI' = BI' = \dfrac{\ell}{2}$. O $\triangle AII'$, retângulo em $I'$, possui $I\hat{A}I' = 30°$. Agora, utilizando a $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, temos:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6}{\frac{\ell}{2}}$, ou seja, $\ell = 12\sqrt{3}\ cm$;

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{r}{\frac{\ell}{2}}$, ou seja, $\ell = 2\sqrt{3}r$.

**4.** Seja $M'$ a projeção de $M$ sobre o lado $CB$. Como $\angle MCB = 30°$, segue que

$$\frac{CM'}{CM} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, como $M'$ é ponto médio de $CB$, $CB = 2CM' = \sqrt{3}CM$.

**5.** Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos que

$$\begin{aligned} \frac{r}{\frac{\ell}{2}} &= \frac{R}{\ell} \\ R &= 2r \end{aligned}$$

■

**5. Outro método:**
Se $I'$ é a projeção de $I$ sobre $AB$, como $\angle IBA = 30°$, $II' = r$ e $BI' = R/2$, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30° &= \frac{r}{R} \\ \frac{1}{2} &= \frac{r}{R} \\ R &= 2r. \end{aligned}$$

■

**6.**

a) Na figura 8, temos $EA = EB = 5\ cm$ e $A\hat{E}B = 90°$.

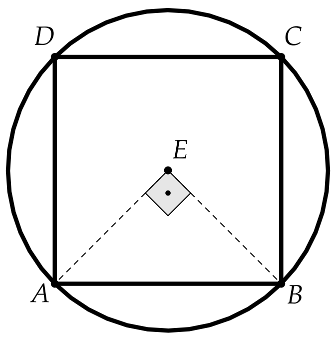



Figura 8

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned} AE^2 + EB^2 &= AB^2 \\ 20^2 + 20^2 &= \ell^2 \\ \ell &= 20\sqrt{2} \text{ cm.} \end{aligned}$$

b) Aplicando o método do item anterior

$$\begin{aligned} AE^2 + EB^2 &= AB^2 \\ R^2 + R^2 &= \ell^2 \\ \ell &= R\sqrt{2}. \end{aligned}$$

c) Se $E'$ é a projeção de $E$ no lado $BC$, temos $EF = E'B = BC/2$. Portanto, o lado do quadrado mede $2r$.

**7.** Na figura 10, temos o ângulo central do hexágono é igual a $\dfrac{360°}{6} = 60°$.

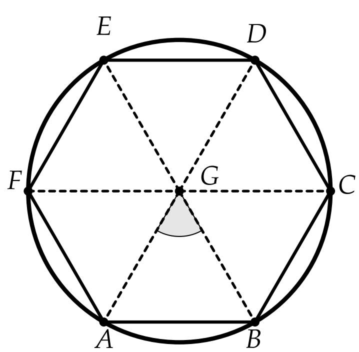



Figura 10

a) O $\triangle AGB$ é isósceles pois $AG = GB = 2\ cm$. Como $A\hat{G}B = 60°$, os ângulos da base serão iguais a

$$\frac{180° - 60°}{2} = 60°$$

e concluímos assim que o triângulo é equilátero. Portanto, $AB = AG = GB = 2\ cm$.

b) Em virtude da análise anterior, o lado será igual à $R$.

**8.** O inraio coincide com altura do triângulo equilátero $AGB$.

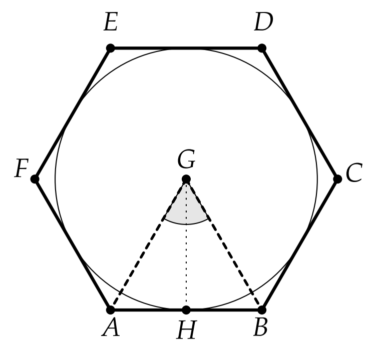



Figura 12

Portanto, $r = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$. Substituindo $r = 3$, obtemos $AB = 2\sqrt{3}\ cm$

**9.** (Extraído do Banco de Questões da OBMEP − 2015.)

a) O ponteiro das horas concluirá uma volta completa após $12 \cdot 60 = 720$ minutos e ao longo dela nenhuma marca será repetida. Como 720 é múltiplo de 80, durante esse período são feitas exatamente $\dfrac{12 \cdot 60}{80} = 9$ marcas no relógio e, além disso, os dois ponteiros voltam às suas posições iniciais. Daí, como as próximas marcas serão repetidas, o tempo desejado é 720 minutos.

b) A soma dos ângulos internos de um polígono de 9 lados é $180° \cdot (9 - 2) = 1260°$.

**10.** Se $\ell_3$ e $\ell_6$ denotam os lados do triângulo equilátero e do hexágono e $R$ o circunraio, temos $\ell_3 = R\sqrt{3}$ e $\ell_6 = R$. Se $\ell_6 = 5\sqrt{3}$, temos $\ell_3 = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15$.

**11.** (Extraído do material do PIC.)
Observe na figura 13 que, a partir das condições do enunciado, foi traçado, pelo centro $O$ da circunferência, o segmento $MN$ perpendicular a $AB$.

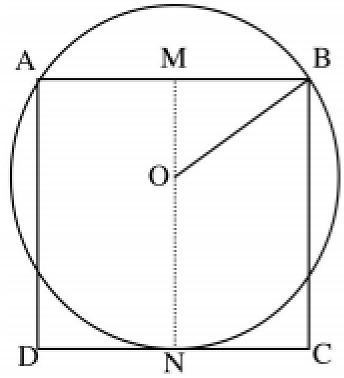



Figura 13

Como $M$ é médio de $AB$ temos, no triângulo retângulo $OMB$, $OB = R$, $MB = \dfrac{a}{2}$ e $OM = a - R$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $OMB$, encontramos $R = \dfrac{5a}{8}$.

**12.** (Extraído do material do PIC.)
Traçamos a altura $AM$ que passa pelo centro $O$ da circunferência circunscrita ao triângulo $ABC$ (figura 14).

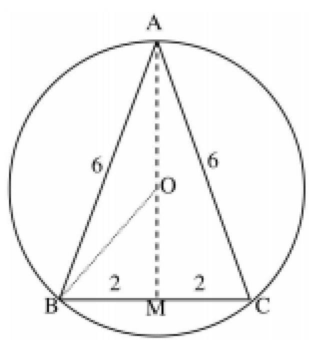



Figura 14

No triângulo retângulo $AMB$, pelo Teorema de Pitágoras, temos $AM = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$. Sendo $R$ o raio da circunferência, aplicando novamente o Teorema de Pitágorna no triângulo $OMB$, temos $R^2 = 2^2 + (4\sqrt{2} - R)^2$. Daí, $R = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

**13.** (Extraído do Banco de Questões da OBMEP − 2015.)
Como $CD$ é diâmetro, o seu ponto médio $H$ é o centro do círculo. Sejam $I$ e $J$ as outras interseções da circunferência com os lados $AC$ e $BC$.

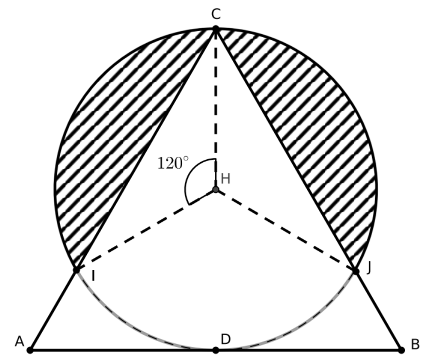



Figura 16

Como $\angle ICH = \angle HCJ = 30°$ e $IH = CH = HJ$, segue que os triângulos $\triangle CHI$ e $\triangle CHJ$ são isósceles com ângulo do vértice igual à 120°. Se $l$ é o raio do círculo, como a altura do triângulo e o diâmetro do círculo coincidem, $2\ell = \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$cm e consequentemente $\ell = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. Cada uma das regiões sombreadas corresponde a área de um setor circular de $120° = 2\pi/3$ subtraída de um triângulo isósceles, ou seja,

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{(2\pi/3)\ell^2}{2} - \frac{\ell^2 \operatorname{sen} 120°}{2} &= 2 \cdot \frac{\pi\ell^2}{3} - \frac{\sqrt{3}\ell^2}{4} \\
&= 2 \cdot \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

**14.** Se $A_{15}$ está oposto a $A_{46}$, então $A_1$ é diametralmente oposto a 32. Logo, há 30 vértices entre eles eles em cada metade da circunferência na qual o polígono está inscrito e, portanto, há

$$1 + 1 + 30 + 30 = 62 \text{ lados.}$$

**15.** Considere o quadrilátero $DFGC_1$ na figura 17.

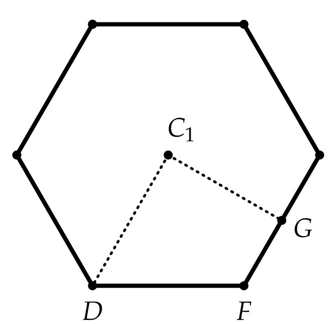



Figura 17

Temos $C_1\hat{D}F = 60°$, $D\hat{F}G = 120°$ e $F\hat{G}C_1 = 90°$, logo

$$\begin{aligned}
C_1\hat{D}F + D\hat{F}G + F\hat{G}C_1 + G\hat{C_1}D &= 360° \\
60° + 120° + 90° + G\hat{C_1}D &= 360° \\
G\hat{C_1}D &= 90°.
\end{aligned}$$

**16.**

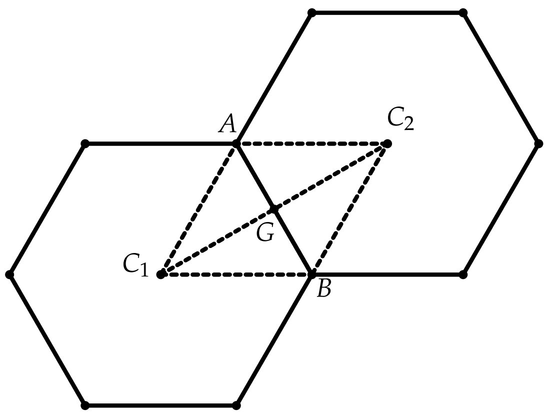



Figura 19

Os triângulos $ABC_1$ e $ABC_2$ são equiláteros de lado $AB$. Consequentemente $AC_1C_2$ e $BC_1C_2$ são congruentes e $\angle AC_1C_2 = \angle BC_1C_2$. Daí, $C_1C_2$ é a bissetriz do ângulo $\angle AC_1B$ do triângulo isósceles $AC_1B$ e, portanto, também altura.

**17.** Observe a figura 21 e perceba que $C_3\hat{B}D = C_2\hat{A}E = 60^\circ$. Além disso, $D\hat{B}A$ e $E\hat{A}B$ são ângulos internos em um hexágono regular e, portanto, medem $120^\circ$.

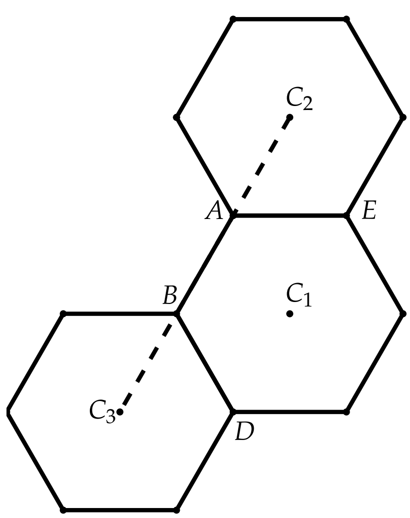



Figura 21

Daí, $C_3\hat{B}D + D\hat{B}A = 180^\circ$, e consequentemente $C_3$, $B$ e $A$ são colineares. Analogamente, $C_2$, $A$ e $B$ são colineares.

**18.** Usando o que foi provado nos problemas 15, 16 e 17, teremos que $\triangle C_5C_3C_8$ é retângulo em $C_3$, com catetos medindo $C_3C_8 = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ e $C_3C_5 = 3$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos $(C_5C_8)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2$ e $C_5C_8 = \sqrt{21}$ u.c..

**19.** O dodecágono regular inscrito numa circunferência possui ângulo central igual a $30^\circ$.

a) Considere um triângulo isósceles formado pelo centro do círculo e dois vértices consecutivos. Como o raio mede 2 *cm* e o ângulo entre eles é $30^\circ$, a área de tal triângulo é

$$S_{\triangle OAB} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{2} = 1 \text{ cm}^2.$$

Como são 12 triângulos congruentes, então a área total do dodecágono é 12 $cm^2$.

b) Vamos utilizar a lei dos cossenos para calcularmos o lado $\ell$ do dodecágono:

$$\begin{aligned} \ell^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \\ \ell^2 &= 4 + 4 - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \ell &= \pm\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Como $\ell > 0$, ficamos com $\ell = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$ cm.

**20.** O octógono regular inscrito numa circunferência possui ângulo central igual a $45^\circ$.

a) Considere um triângulo isósceles formado pelo centro do círculo e dois vértices consecutivos. Como o raio mede 1 *cm* e o ângulo entre eles é $45^\circ$, a área de tal triângulo é

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^2.$$

Como são 8 triângulos congruentes, ficaremos com

$$S_{ABC\ldots GH} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

b) Vamos utilizar a lei dos cossenos para calcularmos o lado $\ell$ do octógono:

$$\begin{aligned} \ell^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ \\ \ell^2 &= 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \ell &= \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Como $\ell > 0$, ficamos com $\ell = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ cm.

**21.** (Extraído do exame de acesso do PROFMAT − 2014) Na figura 23, o ângulo central do $n$-ágono é $\dfrac{360°}{n}$.

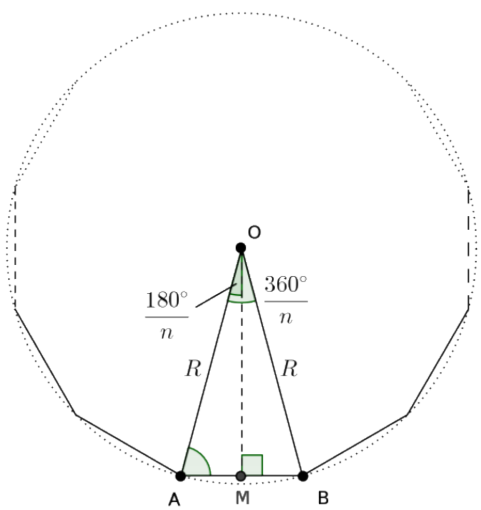



Figura 23

Sendo $O$ é o centro do polígono, o $\triangle ABO$ é isósceles, pois os lados $AO$ e $BO$ são raios da circunferência. Com isso, a altura $AM$ é também bissetriz, e então $M\hat{O}A = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{360°}{n} = \dfrac{180°}{n}$. No $\triangle AMO$, retângulo em $M$, o cateto $AM$ mede metade do lado do polígono, isto é $AM = \dfrac{\ell_n}{2}$. Portanto, sen $\left(\dfrac{180°}{n}\right) = \dfrac{\frac{\ell_n}{2}}{R} = \dfrac{\ell_n}{2R}$. Que está na letra **B**.

**22.** (Extraído do Banco de Questões da OBMEP − 2015.) Como um hexágono pode ser dividido em 4 triângulos por meio de suas diagonais, a soma de seus ângulos internos é $180°(6-2) = 720°$. Dado que ele é equiângulo, cada um dos ângulos internos medirá $\frac{720°}{6} = 120°$. Sabendo disso, ao prolongarmos os lados formaremos, como indicado abaixo, triângulos equiláteros menores externos a três de seus lados e um triângulo equilátero maior $\triangle XYZ$ que o conterá.

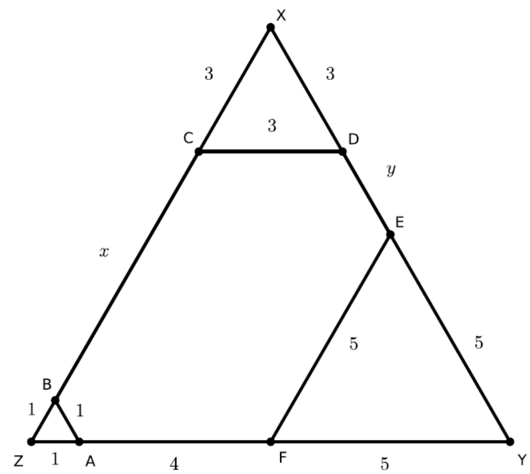



Figura 25

Como os lados do triângulo $\triangle XYZ$ são iguais, temos

$$3 + y + 5 = 5 + 4 + 1 = 1 + x + 3.$$

Logo, $x = 6$ e $y = 2$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com