Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Função Par, Função Ímpar e Periódica

Tópicos Adicionais

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2
Função Par, Função Ímpar e Periódica

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o período da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$.

Exercício 2. Determinar quais das seguintes funções são pares ou ímpares ou nenhum desses dois tipos.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = x^2 + 4x^3 + \operatorname{sen}(x^2)$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$.

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$

Exercício 3. Determinar quais das seguintes funções são pares ou ímpares.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^6 + x^4 + x^2}$

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é ímpar.

Exercício 5. Determine o período das seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.

b) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

c) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$.

Exercício 6. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\operatorname{sen}(3x) - \cos((x - \pi)/2)$. Sobre f podemos afirmar que:

a) é uma função par.

b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.

d) é uma função periódica de período fundamental 2π.

e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f é par e g é impar. Verifique que:

a) $f \cdot g$ é ímpar.

b) $f \circ g$ é par.

c) $g \circ f$ é par

Exercício 8. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

Exercício 9. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $p > 0$, classifique as afirmações a seguir em V (verdadeira) ou F (falsa).

( ). A função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período $2p$.

( ). A função $h(x) = f(x/2)$ é periódica de período $p/2$.

( ). A função $h(x) = f(x + q)$, onde q é uma constante positiva, não é periódica.

Exercício 10. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Considere as afirmações seguintes.

1) A função $f(x)$ é uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$, para todo x real.

2) A função $f(x)$ é periódica de período 2π, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo x real.

3) A função $f(x)$ é sobrejetora.

4) $f(0) = 0$, $f(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $f(\pi/2) = 1$.

São verdadeiras as afirmações

a) 1 e 3, apenas.

b) 3 e 4, apenas.

c) 2 e 4, apenas.

d) 1, 2 e 3, apenas.

e) 1, 2, 3 e 4.

Exercício 11. Considerando as funções trigonométricas definidas por $f(x) = 2\operatorname{sen} x$, $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ e $h(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, tem-se

a) $f(x) > h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x)$ e $g(x)$ têm períodos iguais.

d) $f(x)$ e $h(x)$ têm períodos diferentes.

e) $g(x) \leq \operatorname{sen} x \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 12. Seja a e b números reais, ambos não nulos, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a \cos x + b \operatorname{sen} x$. Determine o período de f.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Mostre que nenhuma função quadrática pode ser uma função ímpar.

Exercício 14. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como uma soma de uma função par com uma função ímpar.

Exercício 15. Mostre que o produto de duas funções ímpares é uma função par.

Exercício 16. Dadas as funções $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R} - 0$ e $g(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

a) ambas são pares.

b) f é par e g é ímpar.

c) f é ímpar e g é par.

d) f não é par nem ímpar e g é par.

e) ambas são ímpares

Exercício 17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, tal que $f(x+5) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(1/3) = 1$. Determine o valor da soma:

$$f(16/3) + f(29/3) + f(12) + f(-7).$$

Exercício 18. Dados os inteiros positivos p e q, com $mdc(p,q) = 1$, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(px) + \cos(qx)$. Determine o período de f.

Exercício 19. Seja a um número irracional. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x + \cos(ax)$ não é periódica.

Respostas e Soluções.

1. O período de f é $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$.

2.

a) Par.

b) Não é par e nem ímpar, pois $(f(x)+f(-x))(f(x)-f(-x)) = 4(x^2+\text{sen}(x^2))(4x^3)$ não é uma função identicamente nula.

c) Ímpar.

d) Par.

3.

(a) $f(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1} = -f(x)$. Portanto, f é uma função ímpar.

(b) $f(-x) = \dfrac{x^2}{x^4+1} = f(x)$. Portanto, f é uma função par.

(c) $f(-x) = \dfrac{-x^3-3x}{x^6+x^4+x^2} = -f(x)$. Portanto, f é uma função ímpar.

4. Seja $g = f^{-1}$. Escreva $y = f(x)$, daí

$$\begin{aligned} g(-y) &= g(-f(x)) \\ &= g(f(-x)) \\ &= -x \\ &= -g(f(x)) \\ &= -g(y) \end{aligned}$$

Portanto, g é uma função ímpar.

5.

a) π.

b) π.

c) 2π.

6. Como $\cos(x/2-\pi/2) = \text{sen}(x/2)$ e a função $\text{sen}\, kx$ é ímpar, podemos concluir que $f(x)$, sendo diferença de duas funções ímpares, é uma função ímpar. Além disso, como os períodos de $\text{sen}(3x)$ e $\text{sen}(x/2)$ são $2\pi/3$ e $4\pi = 6\cdot 2\pi/3$, respectivamente, segue que o período de f é 6π.

7.

a) Temos

$$\begin{aligned} f(-x)g(-x) &= f(x)(-g(x)) \\ &= -f(x)g(x). \end{aligned}$$

Logo, $f\cdot g$ é uma função ímpar.

b) Temos

$$\begin{aligned} f\circ g(-x) &= f(g(-x)) \\ &= f(-g(x)) \\ &= f(g(x)) \\ &= f\circ g(x). \end{aligned}$$

Logo, $f\circ g$ é uma função par.

c)

$$\begin{aligned} g\circ f(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(f(x)) \\ &= g\circ f(x). \end{aligned}$$

Logo, $g\circ f$ é uma função par.

8. Para $x = y = 1$, temos

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1^2) \\ &= f(1)+f(1) \end{aligned}$$

Portanto, $f(1) = 0$. Agora escolhendo $x = y = -1$, temos

$$\begin{aligned} f(1) &= f((-1)^2) \\ 0 &= f(-1)+f(-1) \end{aligned}$$

Assim $f(-1) = 0$. Finalmente

$$\begin{aligned} f(-x) &= f((-1)x) \\ &= f(-1)+f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Logo, f é uma função par.

9.

(F) Pois a função g é periódica de período $p/2$.

(F) Pois a função h é periódica de período $p/(1/2) = 2p$.

(F) Pois a função h é periódica de período p.

10. (Extraído da Unifesp) São verdadeiros apenas os itens 2 e 4. Logo a opção correta está na letra C.

11. (Extraído da FATEC) Como o período de $\text{sen}(kx)$ é $2\pi/k$, segue que f tem peíodo 2π, g tem período π e h tem período 2π. Além disso, $g(\pi/4) = 1 > \text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e $f(0) = 0 < 2 = h(0)$. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha \in [-1,1]$, temos $g(x) = \text{sen}(2x) \leq 1 \leq 1+(1+\text{sen}\,x) = h(x)$. A única resposta correta está na letra B.

12. Como $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ é um ponto no círculo unitário, existe y tal que $\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\operatorname{sen} y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Portanto

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos x + b \operatorname{sen} x \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen} x\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-y). \end{aligned}$$

Portanto, o período de f é o mesmo de $\cos(x)$, que é 2π.

13. Suponha que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma função ímpar. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ ax^2+bx+c &= -(ax^2-bx+c) \to \\ ax^2+c &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, a equação $ax^2+c=0$ possui no máximo duas raízes reais. Isso é um absurdo.

14. Sejam $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Assim

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{f(-x)+f(x)}{2} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{f(-x)-f(-x)}{2} \\ &= -h(x). \end{aligned}$$

Portanto, g é uma função par e h é uma função ímpar. Basta notar agora que

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

15. Suponha que f e g são funções ímpares e que $h(x) = f(x)g(x)$. Daí

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= (-f(x))(-g(-x)) \\ &= f(x)g(x) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Portanto, h é uma função par.

16. Temos

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} \\ &= \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} \\ &= \frac{\frac{e^x+1}{e^x}}{\frac{e^x-1}{e^x}} \\ &= \frac{e^x+1}{e^x-1} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Portanto f é ímpar. Como $g(-x) = -x\operatorname{sen}(-x) = -x(-\operatorname{sen}\ x) = x\operatorname{sen} x = g(x)$, segue que g é par. A resposta correta é o item C.

17. Temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= 1 \to \\ f\left(\frac{1}{3}+5\right) &= 1 \\ f\left(\frac{16}{3}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Como f é uma função ímpar, i.e. $f(-x) = -f(x)$, segue que

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -1 \\ f\left(-\frac{1}{3}+5+5\right) &= -1 \\ f\left(\frac{29}{3}\right) &= -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(-7) &= f(-12+5) \\ &= f(-12) \\ &= -f(12) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f(16/3)+f(29/3)+f(12)+f(-7) &= \\ 1+(-1)+f(12)-f(12) &= 0. \end{aligned}$$

18. Suponha que existe $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} f(0) &= f(T) \\ 2 &= \cos(pT) + \cos(qT) \end{aligned}$$

Daí $\cos(pT) = \cos(qT) = 1$ e assim existe inteiros positivos k_1 e k_2 tais que

$$\begin{aligned} pT &= 2\pi k_1 \\ qT &= 2\pi k_2 \end{aligned}$$

Consequentemente, $\dfrac{k_1}{p} = \dfrac{k_2}{q} = \dfrac{T}{2\pi}$. Claramente $f(x + 2\pi) = f(x)$ e assim 2π é um múltiplo inteiro do período, digamos $2\pi = lT$, com $l\mathbb{N}$. Portanto, $p = lk_1$ e $q = lk_2$. Como $mdc(p, q) = 1$, segue que $l = 1$ e $T = 2\pi$.

19. Suponha, por absurdo, que a função f possui um período T. Assim $2 = f(0) = f(T) = \cos(T) + \cos(aT)$. Como $\cos x$ é no máximo 1, segue que $\cos T = \cos(aT) = 1$ e assim existem inteiros não nulos k_1 e k_2 tais que

$$\begin{aligned} T &= 2\pi k_1 \\ aT &= 2\pi k_2 \end{aligned}$$

Logo, $a = \dfrac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}$. Isso é um absurdo. Portanto, f não é periódica.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com