Módulo de Geometria Analítica – Parte 2

Distância entre Ponto e Reta

3^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Geometria Analítica – Parte 2
Distância entre Ponto e Reta

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Sejam A e B pontos distintos da reta de equação $x = -3$ que distam duas unidades da reta de equação $r: \ x - 2y + 3 = 0$. Qual o produto das ordenadas de A e B?

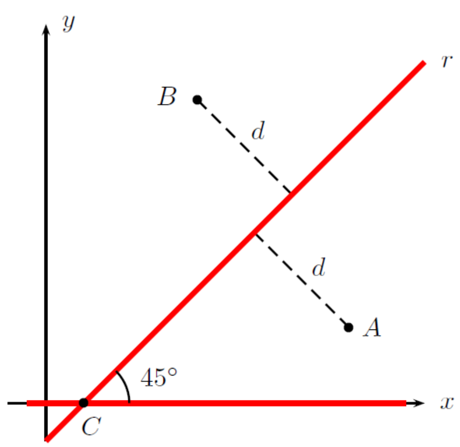
Exercício 2. Determine o valor numérico de k para que a distância de um ponto de coordenadas $(2, k)$, situado no primeiro quadrante, à reta de equação $3x + 4y - 24 = 0$, seja igual a 18 unidades.

Exercício 3. Em um sistema cartesiano ortogonal são dados os pontos $P = (2, 0)$ e $Q = (0, 2)$. O ponto A é o simétrico da origem em relação à reta PQ, quais os valores de x_A e y_A?

Exercício 4. Qual a distância entre o ponto $P(2, 1)$ e a reta r de equação $r: 6x - 8y + 16 = 0$?

Exercício 5. Sejam A e B dois pontos da reta de equação $y = 2x + 2$, que distam duas unidades da origem. Neste caso, qual a soma das abscissas de A e B?

Exercício 6. No plano cartesiano da figura, feito fora de escala, o eixo x representa uma estrada já existente, os pontos $A(8, 2)$ e $B(3, 6)$ representam duas cidades e a reta r, de inclinação 45° , representa uma estrada que será construída.



Quais as coordenadas de C, de modo que as distâncias das cidades A e B até a nova estrada sejam iguais?

Exercício 7. Considere as retas $r: \ 4x - 3y + 17 = 0$ e $s: \ 4x - 3y - 8 = 0$. Qual a distância entre r e s?

Exercício 8. Num plano cartesiano, sabe-se que os pontos A, $B(1, 2)$ e $C(2, 3)$ pertencem a uma mesma reta, e que o ponto A está sobre o eixo Oy. Qual o valor da ordenada de A?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Determine a distância entre o ponto $P(3, 5)$ e a reta r, de equação $x + 2y - 8 = 0$.

Exercício 10. Uma reta r de coeficiente angular $m = -4$ está à distância $d = 5$ do ponto $A(3, 6)$. Determine a equação dessa reta.

Exercício 11. Um trapézio foi desenhado a partir das interseções das retas $r: \ x - y - 1 = 0$ e $s: \ 3y - 3x + 5 = 0$ com os eixos Ox e Oy. Qual a área deste trapézio?

Exercício 12. Se os pontos $A = (–1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (x, y)$ são vértices de um triângulo equilátero, então qual a distância entre A e C?

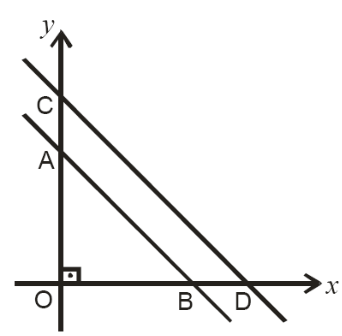
Exercício 13. Consideramos a reta $r: \ y = 2x + 2$. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é o ponto dessa reta mais próximo da origem dos eixos coordenados, qual o valor de $x_0^2 + y_0^2$?

Exercício 14. Qual a distância entre as retas paralelas $r: y = x$ e $s: y = x + 7$?

Exercício 15. A reta r de equação $6x + 8y - 48 = 0$ intersecta os eixos coordenados cartesianos nos pontos P e Q. Desse modo, qual a distância, em u.c., de P a Q?

Exercício 16. Duas retas r e s são dadas, respectivamente, pelas equações $3x–4y = 3$ e $2x + y = 2$. Um ponto P pertencente à reta s tem abcissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta r. Se $ax + by + c = 0$ é a equação da reta que contém P e é paralela a r, então, qual o valor de $a + b + c$?

Exercício 17. Na figura abaixo, os triângulos OAB e OCD são semelhantes e $\dfrac{AB}{CD} = b$.



Se a reta que passa por C e D tem por equação $x + y = a$, $a > 0$, então qual a distância entre as retas AB e CD?

Exercício 18. Sejam A, B, C, D vértices consecutivos de um quadrado tais que $A = (1, 3)$ e B e D pertencem à reta de equação $x - y - 4 = 0$. Qual a área deste quadrado, em unidade de área?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 19. Calcule o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo delimitado pelas retas $r: \ 7x - y + 11 = 0$, $s: \ x + y - 15 = 0$ e $t: \ 7x + 17y + 65 = 0$.

Exercício 20. Qual o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano xOy tais que a distância de P ao eixo OX é igual a 5 vezes a distância de P à reta $r: \ 3y - 4x = 0$?

Exercício 21. Seja o triângulo ABC de vértices $A(-2, -4)$, $B(1, -2)$ e $C(2, 5)$. Qual a medida da altura relativa ao lado AB?

Exercício 22. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação

$$\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 5.$$

Exercício 23. Qual a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância ao ponto $(6, 0)$ é sempre igual a duas vezes sua distância à reta $2x - 3 = 0$?

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado do vestibular do UNIUBE MG)
Escrevendo $A(-3, y_A)$ e $B(-3, y_B)$, seguimos com

$$\begin{aligned} d_{A,r} &= \left|\frac{-3-2\cdot y+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right| \\ 2 &= \left|\frac{-2y}{\sqrt{5}}\right| \\ |2y| &= 2\sqrt{5}. \\ |y| &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Por fim, as ordenadas são $y_A = \sqrt{5}$ e $y_B = -\sqrt{5}$, cujo produto é igual a -5.

2. (Extraído do vestibular do UFSC)
A distância do ponto dado à reta em questão pode ser calculada como

$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{3\cdot 2+4\cdot k-24}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| \\ 18 &= \left|\frac{6+4k-24}{\sqrt{25}}\right| \\ \left|\frac{4k-18}{5}\right| &= 18 \end{aligned}$$

Agora, podemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{4k-18}{5} &= 18 \\ 4k-18 &= 5\cdot 18 \\ 4k &= 90+18 \\ k &= \frac{108}{4} \\ k &= 27 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{4k-18}{5} &= -18 \\ 4k-18 &= 5\cdot(-18) \\ 4k &= -90+18 \\ k &= \frac{-72}{4} \\ k &= -18 \end{aligned}$$

Por fim, como o ponto pertence ao primeiro quadrante, então $k = 27$.

3. (Adaptado do vestibular do MACK SP)
A reta PQ tem coeficiente angular igual a

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{0-2} = -1$$

e linear igual a

$$b = 2 + 1\cdot 0 = 2.$$

Uma perpendicular a PQ tem coeficiente angular igual a 1 e como a origem pertence a essa reta, então seu coeficiente linear igual a 0. Agora, a reta tem equação $y = x$ e cruza com $y = -x+2$ no ponto $(1,1)$. Por fim, o simétrico pode ser calculado como

$$\begin{aligned} 0-1 &= 1-x_A \\ 0-1 &= 1-y_A, \end{aligned}$$

o que resulta no ponto $A(2;2)$.

4. (Adaptado do vestibular do UEPI)
Podemos escrever

$$\begin{aligned} d_{P,r} &= \left|\frac{6\cdot 2-8\cdot 1+16}{\sqrt{6+(-8)^2}}\right| \\ &= \left|\frac{12-8+16}{10}\right| \\ &= 2. \end{aligned}$$

5. (Adaptado do vestibular do UFMG)
Podemos escrever

$$\begin{aligned} d_{A,O} &= \sqrt{(x-0)^2+(2x+2-0)^2} \\ 2 &= \sqrt{x^2+(2x+2)^2} \\ 4 &= x^2+4x^2+8x+4 \\ 5x^2+8x &= 0. \end{aligned}$$

Cujas raízes são 0 e $-\dfrac{8}{5}$ (analogamente para o ponto B, teremos as mesmas coordenadas). Assim, a soma é

$$-\frac{8}{5}+0 = -\frac{8}{5}.$$

6. (Adaptado do vestibular do IBMEC SP $-$ 2014)
Observe que $a_r = \text{tg}\,45^\circ = 1$ e o ponto médio do segmento AB, que é $M(\dfrac{11}{2}, 4)$ pertence a r, e seu coeficiente linear é $b_r = 4 - \dfrac{11}{2} = -\dfrac{3}{2}$. Daí, temos que $r : y = x - \dfrac{3}{2}$, cuja interseção com Ox é o ponto $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

7. (Adaptado do vestibular do CEFET PR)
Observe que $r \parallel s$ e para calcularmos a distância entre elas, basta tomarmos um ponto em uma e usarmos a fórmula de distância de ponto à reta com a outra. Assim, perceba que o ponto $A(-5,-1) \in r$ e agora

$$\begin{aligned} d_{A,r} &= \left|\frac{4\cdot(-5)-3\cdot(-1)-8}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| \\ &= \left|\frac{-20+3-8}{5}\right| \\ &= 5. \end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular do UEA AM − 2014)
A reta r que passa por B e C tem $a_r = \dfrac{1}{1} = 1$ e $b_r = 2-1 = 1$. Assim, temos $r:\ y = x+1$, ou seja, $r:\ x-y+1=0$. Como $A(0,y_A) \in r$, então $d_{A,r} = 0$, logo

$$\begin{aligned} d_{A,r} &= \left|\frac{1\cdot 0-1\cdot y_A+1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| \\ 0 &= \left|\frac{-y_A+1}{\sqrt{2}}\right| \\ y_A &= 1. \end{aligned}$$

9. (Adaptado do vestibular do UEPB)
Aplicando a fórmula, temos

$$\begin{aligned} d_{P,r} &= \left|\frac{3+2\cdot 5-8}{\sqrt{1^2+2^2}}\right| \\ &= \left|\frac{5}{\sqrt{5}}\right| \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

10. A reta pode ser escrita como $r:\ y=-4x+b$ ou ainda $r:\ 4x+y-b=0$, cuja distância para o ponto $A(3,6)$ é calculada como

$$\begin{aligned} d_{A,r} &= \left|\frac{4\cdot 3+6-b}{\sqrt{(-4)^2+1^2}}\right| \\ 5 &= \left|\frac{12+6-b}{\sqrt{16+1}}\right| \\ 5 &= \left|\frac{18-b}{\sqrt{17}}\right|. \end{aligned}$$

Assim,

$$5 = \frac{18-b}{\sqrt{17}} \text{ e } -5 = \frac{18-b}{\sqrt{17}}$$

e

$$b = 18-5\sqrt{17} \text{ e } b = 18+5\sqrt{17}.$$

Por fim, as equações são

$$r:\ 4x+y-18+5\sqrt{17}=0 \text{ e } r:\ 4x+y-18-5\sqrt{17}=0.$$

11. (Adaptado do vestibular do UEPB − 2011)
Observe que r intersecta os eixos nos pontos $R_1(1,0)$ e $R_2(0,-1)$ (o que produz uma base medindo $\sqrt{2}$), agora s possui os pontos de interseção com Ox e Oy sendo $S_1\left(\dfrac{5}{3},0\right)$ e $S_2\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$, cuja distância produz a base maior medindo $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$. A altura h é a distância entre as retas $r \parallel s$, que pode ser calculada como

$$\begin{aligned} d_{R_1,s} &= \left|\frac{-3\cdot 1+3\cdot 0+5}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}\right| \\ h &= \left|\frac{2}{3\sqrt{2}}\right| \\ h &= \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Por fim, a área é igual a

$$S = \frac{\left(\sqrt{2}+\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{20}{9} \text{ u.a..}$$

12. (Adaptado do vestibular do PUC RJ − 2013)
Como $\triangle ABC$ é equilátero e $\overline{BC}=2$, então $\overline{AC}=2$.

13. (Adaptado do vestibular do UFJF MG)
Seja s a reta que passa pela origem é perpendicular a r. Daí, $a_s = -\dfrac{1}{2}$ e $b_s = 0$, fazendo $s:\ y = -\dfrac{x}{2}$. Agora, $r \cap s$ pode ser encontrado como a solução do sistema

$$\begin{cases} y = 2x+2 \\ y = -\dfrac{x}{2}, \end{cases}$$

que é $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5}\right)$. Por fim, como $x_0 = -\dfrac{4}{5}$ e $y_0 = \dfrac{2}{5}$, concluímos que $x_0^2+y_0^2 = \dfrac{4}{5}$.

14. (Adaptado do vestibular do UEPB)
Como $r \parallel s$, basta tomarmos um ponto em r, por exemplo, e calcularmos sua distância para s. Assim, como $O(0,0) \in r$, sigamos com

$$\begin{aligned} d_{O,s} &= \left|\frac{0-0+7}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| \\ &= \left|\frac{7\sqrt{2}}{2}\right| \end{aligned}$$

15. (Adaptado do vestibular do UNEB BA)
Observe que $r \cap Ox = \{(8,0)\}$ e $r \cap Oy = \{(0,6)\}$. Assim, formamos um triângulo retângulo com catetos medindo 6 e 8, logo a medida da hipotenusa vale 10 u.c..

16. (Adaptado do vestibular do ITA SP)
Como $P \in s$, podemos escrevê-lo como $P(x, 2-2x)$. Agora, aplicando a fórmula de distância de ponto à reta, ficamos com

$$\begin{aligned} d_{P,r} &= \left| \frac{3x - 4\cdot(2-2x) - 3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \right| \\ 22 &= \left| \frac{3x - 8 + 8x - 3}{\sqrt{25}} \right| \\ 22 &= \left| \frac{11x - 11}{5} \right| \end{aligned}$$

Aqui podemos ter

$$\begin{aligned} \frac{11x-11}{5} &= 22 \\ 11x - 11 &= 110 \\ x - 1 &= 10 \\ x &= 11 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \frac{11x-11}{5} &= -22 \\ 11x - 11 &= -110 \\ x - 1 &= -10 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

e como $x > 0$, ficamos com $x = 11$ e $y = -20$. Agora, seja $t \parallel r$, então $t:\ 3x - 4y + c = 0$ e como $(11, -20) \in t$, então $c = -80 - 33 = -113$. Por fim,

$$a + b + c = 3 - 4 - 113 = -114.$$

17. (Adaptado do vestibular da EFOA MG)
A distância D pedida é $D = d_{O,CD} - d_{O,AB}$. Agora, perceba que o membro da esquerda é a subtração das alturas dos triângulos OAB e OCD e, por semelhança, $\dfrac{d_{O,AB}}{d_{O,CD}} = b$. Daí, ficamos com

$$\begin{aligned} D &= d_{O,CD} - d_{O,CD}\cdot b \\ D &= d_{O,CD}(1-b). \end{aligned}$$

Como a equação de CD é $x + y = a$, podemos escrever que $C(0, a)$ e $D(a, 0)$. Temos assim um triângulo retângulo isósceles de lado a, hipotenusa $a\sqrt{2}$ e altura $h = d_{O,CD}$. Pelas relações métricas no triângulo retângulo, podemos escrever

$$\begin{aligned} a\sqrt{2}\cdot h &= a \cdot a \\ h &= \frac{a^2}{a\sqrt{2}} \\ d_{O,CD} &= \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por fim, $D = \dfrac{a(1-b)}{\sqrt{2}}$.

18. (Adaptado do vestibular do PUC SP)
A reta dada ($r:\ x - y - 4 = 0$) é de uma das diagonais do quadrado (lembrando que elas são perpendiculares entre si), assim a outra diagonal é a reta de equação $t:\ y = -x + b$. Como $A \in t$, ficamos com $b = 4$ e $t:\ y = -x + 4$. Agora, $r \cap t = \{(4, 0)\}$ e podemos encontrar que o vértice $C(7, -3)$ e o comprimento da diagonal:

$$\begin{aligned} d_{AC} &= \sqrt{6^2 + (-6)^2} \\ d_{AC} &= 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o lado do quadrado é igual a 6 u.c. e sua área é igual a 36 u.a.

19. O incentro $I(m, n)$ (ponto de encontro das bissetrizes) é equidistante de todos os lados do triângulo. Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} d_{I,r} &= \left| \frac{7m - n + 11}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} \right|, \\ d_{I,s} &= \left| \frac{m + n - 15}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| \text{ e} \\ d_{I,t} &= \left| \frac{7m + 17n + 65}{\sqrt{7^2 + 17^2}} \right| \end{aligned}$$

Como $d_{I,r} = d_{I,s}$, teremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{7m - n + 11}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} \right| &= \left| \frac{m + n - 15}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| \\ 3h + k &= 16. \end{aligned}$$

Como $d_{I,r} = d_{I,t}$, teremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{7m - n + 11}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} \right| &= \left| \frac{7m + 17n + 65}{\sqrt{7^2 + 17^2}} \right| \\ 4h - 7k &= 13. \end{aligned}$$

E este sistema obtido tem solução $I(5, 1)$.

20. (Adaptado do vestibular do UESC BA)
A distância de P até Ox é igual a y e até $3y - 4x = 0$ pode ser calculada como

$$d_{P,r} = \left| \frac{-4x + 3y}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} \right|$$

Do enunciado

$$\begin{aligned} y &= 5 \cdot \left| \frac{-4x + 3y}{5} \right| \\ y &= \left| -4x + 3y \right|. \end{aligned}$$

Aqui podemos ter

$$\begin{array}{rclcrcl} -4x+3y &=& y & \text{e} & -4x+3y &=& -y \\ 3y-y &=& 4x & & 3y+y &=& 4x \\ 2y &=& 4x & & 4y &=& 4x \\ y &=& 2x & & y &=& x. \end{array}$$

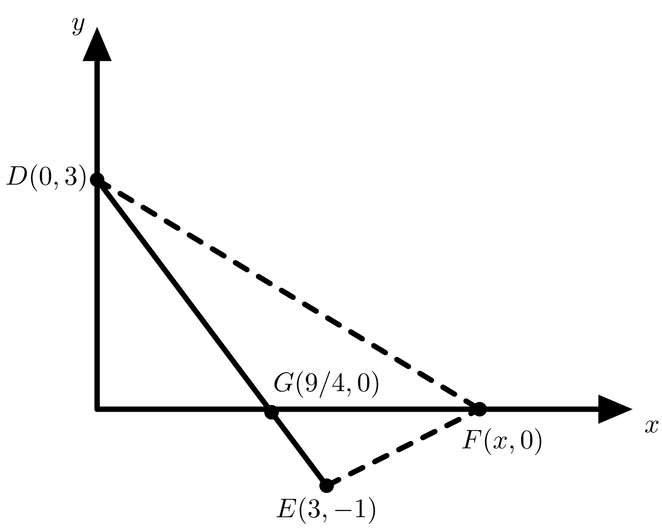
21. Trace H como a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta r definida pelos pontos A e B, tal que $h = CH$ é a altura procurada. Agora, temos

$$\overline{AB}: \begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que resulta em $2x - 3y - 8 = 0$. Por fim,

$$d_{CH} = \frac{|\ 2\cdot 2 - 3\cdot 5 - 8\ |}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|\ -19\ |}{\sqrt{13}} = \frac{19\sqrt{13}}{13} \text{ u.c..}$$

22. (Extraído do Bando de Questões da OBMEP $-$ 2015) Considere no plano cartesiano os pontos F, D e E de coordenadas $(x,0)$, $(0,3)$ e $(3,-1)$, respectivamente.



Podemos associar as distâncias entre alguns pontos aos radicais dados:

$$\begin{aligned} DF &= \sqrt{x^2+9} \\ FE &= \sqrt{(x-3)^2+1^2} \\ &= \sqrt{x^2-6x+10} \\ DE &= \sqrt{9+16} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+9} + \sqrt{(x-3)^2+1^2} &= DF + FE \\ &\geq DE \\ &= 5. \end{aligned}$$

Com igualdade apenas quando D, F e E são colineares. Portando, o ponto F deve coincidir com a interseção G entre DE e o eixo Ox, ou seja, $x = 9/4$.

23. Seja $A(x,y)$ o ponto em questão, sua distância d até $(6,0)$ é

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2} \\ d &= \sqrt{(x-6)^2+y^2}, \end{aligned}$$

e sua distância D até a reta $2x-3=0$ é

$$\begin{aligned} D &= \left|\frac{2x-3}{\sqrt{2^2+0^2}}\right| \\ D &= \left|\frac{2x-3}{2}\right|. \end{aligned}$$

Do enunciado, concluímos que

$$\begin{aligned} d &= 2D \\ \sqrt{(x-6)^2+y^2} &= 2\cdot\left|\frac{2x-3}{2}\right| \\ \left(\sqrt{(x-6)^2+y^2}\right)^2 &= |2x-3|^2 \\ (x-6)^2+y^2 &= (2x-3)^2 \\ x^2-12x+36+y^2 &= 4x^4-12x+9 \\ 3x^2-y^2-27 &= 0. \end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com