Módulo Quadriláteros

Relação de Euler para Quadrilátero

9° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Quadriláteros
Relação de Euler para Quadriláteros

1 Exercícios Introdutórios

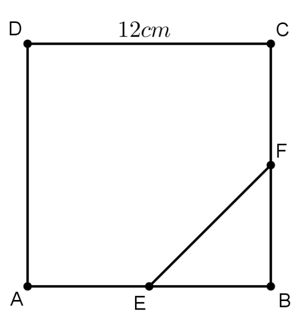
Exercício 1. Seja um triângulo de lados $a = 3cm$, $b = 4cm$ e $c = 5cm$. Determine as medidas de suas bases médias.

Exercício 2. Uma rodovia r liga, em linha reta, as cidades A e B. Outra rodovia, s, também em linha reta, liga as cidades A e C. Se as distâncias entre A e B é $100km$, determine o comprimento de uma terceira rodovia que será construída, em linha reta, ligando os pontos médios de r e s.

Exercício 3. Seja o triângulo ABC, de área $100cm^2$. Determine a área do triângulo ADE, sendo D e E os pontos médios dos lados AB e AC respectivamente.

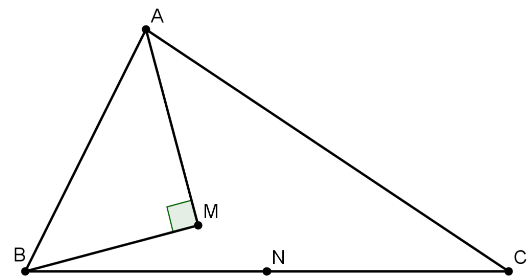
Exercício 4. Determine a medida da base média de um triângulo equilátero cuja área é $12cm^2$.

Exercício 5. No quadrado da figura, determine a medida do segmento PQ, sendo P e Q pontos médios dos lados AB e BC.

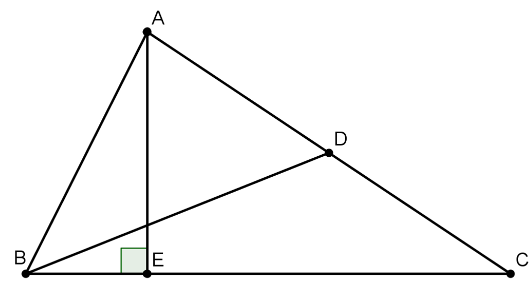


2 Exercícios de Fixação

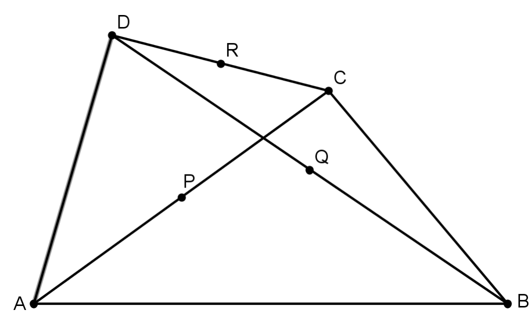
Exercício 6. No triângulo ABC da figura, $AB = 12cm$, $AC = 20cm$ e N é o ponto médio do lado BC. Seja M um ponto interior ao triângulo ABC tal que AM seja bissetriz de $\angle BAC$ e $\angle AMB = 90^o$. Determine a medida de MN.



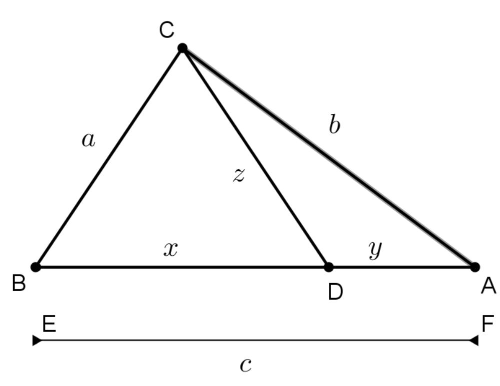
Exercício 7. No triângulo ABC da figura, D é ponto médio de AC e E é o pé da altura relativa ao lado BC. Se $BD = AE$, determine $\angle CBD$.



Exercício 8. Seja o quadrilátero $ABCD$ e os pontos R, ponto médio de CD, P, ponto médio de AC, e Q, ponto médio de BD. Além disso, $\angle BAD + \angle ABC = 120^o$ e $AD = BC = 6$. Determine o perímetro do triângulo PQR.



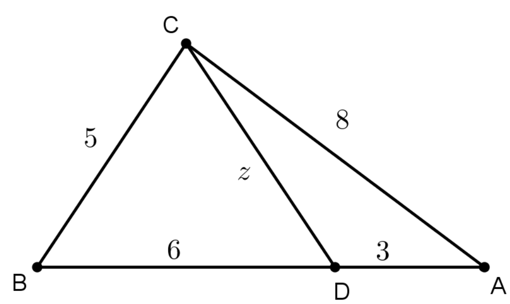
Exercício 9. Observe o triângulo da figura.



A Relação de Stewart é:

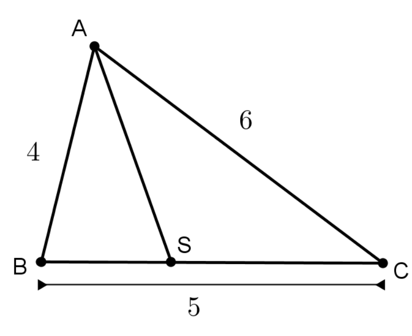
$$a^2y + b^2x = z^2c + cxy.$$

Utilize esta relação para determinar a medida da ceviana z no triângulo abaixo.



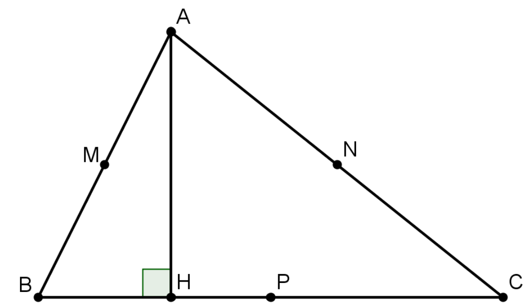
Exercício 10. Determine a medida da mediana, relativa ao lado BC, do triângulo ABC, sendo $AB = 10$, $AC = 8$ e $BC = 12$.

Exercício 11. Determine a medida da bissetriz AS no triângulo ABC da figura.

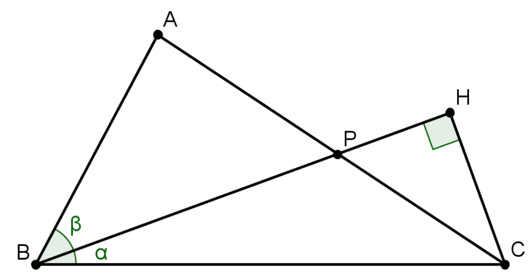


3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. No triângulo ABC da figura, M, N e P são pontos médios, respectivamente, dos lados AB, AC e BC. Além disso, H é o pé da altura AH, $AB = 8$, $BC = 10$, $BH = 2$. Determine o perímetro do quadrilátero $HMNP$.



Exercício 13. Na figura, P é ponto médio de AC e $AB = 2PH$. Determine $\dfrac{\beta}{\alpha}$.



Exercício 14. Calcule o comprimento do segmento que une os pontos médios das bases AB e CD de um trapézio, sabendo que $AB = 14$, $BC = 7$, $CD = 4$ e $DA = 5$.

Exercício 15. Mostre que os pontos médios de um quadrilátero convexo determinam um paralelogramo.

Respostas e Soluções.

1. Como cada base média mede a metade da medida de sua base correspondente, as bases médias medem $\frac{3}{2}cm$, $2cm$ e $\frac{5}{2}cm$.

2. A estrada ligando os pontos médios das rodovias r e s é a base média do triângulo formado pelas cidades A, B e C. Assim, sua medida é a metade da distância entre A e B, ou seja, $50km$.

3. Se D e E são pontos médios, os triângulos ABC e ADE são semelhantes, de razão 2, já que DE é base média de ABC. Dessa forma temos $\frac{A}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, sendo A a área do triângulo ADE, segue que $A = 25cm^2$.

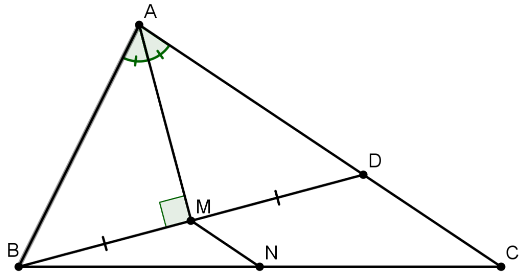
4. Como a área é $12cm^2$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} &= 12\\
\ell^2\sqrt{3} &= 48\\
\ell^2 &= \frac{48}{\sqrt{3}}\\
\ell^2 &= \frac{48\sqrt{3}}{3}\\
\ell^2 &= 16\sqrt{3}\\
\ell &= 4\sqrt[4]{3}.
\end{aligned}$$

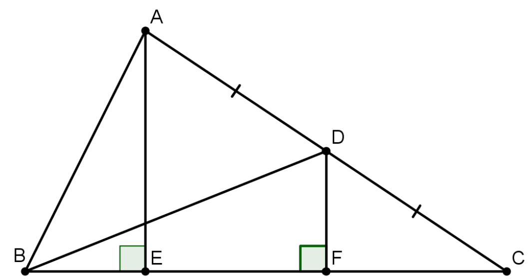
Se a medida do lado é $4\sqrt[4]{3}$, então a medida da base média é a metade, ou seja, $\frac{4\sqrt[4]{3}}{2} = 2\sqrt[4]{3}cm$.

5. Se P e Q são pontos médios dos lados AB e CD, então PQ é base média do triângulo ABC, medindo a metade da diagonal do quadrado, ou seja, $PQ = \frac{12\sqrt{2}}{2}6\sqrt{2}cm$.

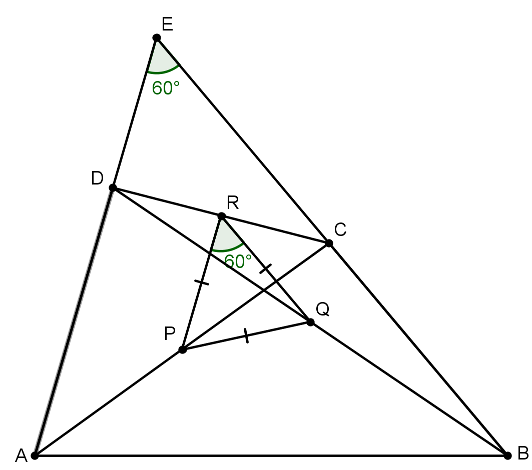
6. (Extraído da Vídeo Aula) Prolongando BM e marcando D sobre AC, temos que os triângulos ABM e ADM são congruentes pelo caso ALA, já que $\angle BAM = \angle DAM$, AM é lado comum e $\angle AMB = \angle AMD$. Dessa forma, $BM = MD$, ou seja, M é ponto médio de BD e, se N é ponto médio de BC, MN é base média do triângulo BDC, com base DC, ou seja, $MN = \frac{20-12}{2} = 4cm$.



7. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando um segmento perpendicular a BC, por D, temos que este segmento DF, onde F pertence a BC, é paralelo a AE. Além disso, como D é ponto médio de AC, DF é base média do triângulo ACE, de base AE, ou seja, $DF = \frac{AE}{2}$. Analisando o triângulo retângulo BDF, sua hipotenusa é BD, que tem mesma medida de AE, e o cateto oposto ao ângulo $\angle FBD$ mede $\frac{AE}{2}$, ou seja, $\angle FBD = 30^o$, já que $sen(\angle FBD) = \frac{1}{2}$. Como $\angle CBD = \angle FBD$, então $\angle CBD = 30^o$.



8. (Extraído da Vídeo Aula) Como R é ponto médio de CD e P ponto médio de AC, RP é base média do triângulo ACD, com base AD, sendo sua medida $\frac{6}{2} = 3$. De forma análoga, temos QR base média do triângulo BCD, com base BC, tendo medida igual a $\frac{6}{2} = 3$. Prolongando os lados AD e BC e marcando sua intersecção E, temos que $\angle AEB = 180^o - (\angle BAD + \angle ABC) = 180^o - 120^o = 60^o$. Já vimos que QR é paralelo a BC, pois é base média do triângulo BCD, e, por consequência, é paralelo a BE. De forma análoga, RP é paralelo a AE. Com isso, $\angle PRQ = \angle AEB = 60^o$. Temos então que o triângulo PRQ é isósceles e $\angle PRQ = 60^o$, ou seja, ele é equilátero, sendo seu perímetro igual a $3 \cdot 3 = 9$.

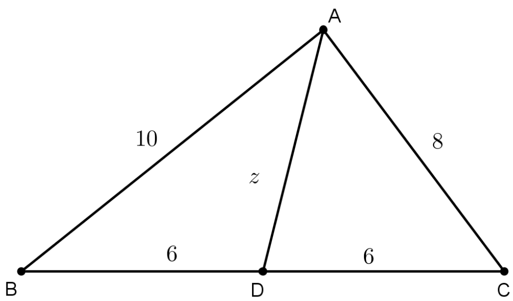


9.

$$\begin{aligned}
a^2y + b^2x &= z^2c + cxy\\
5^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 6 &= 9z^2 + 9 \cdot 6 \cdot 3\\
75 + 384 &= 9z^2 + 162\\
9z^2 &= 297\\
z &= \sqrt{33}.
\end{aligned}$$

10. Usando a Relação de Stewart, que relaciona as medidas dos lados de um triângulo, de uma ceviana e dos segmentos determinados pelo pé desta em um dos lados, temos:

$$\begin{aligned} a^2y + b^2x &= z^2c + cxy \\ 10^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 6 &= 12z^2 + 12 \cdot 6 \cdot 6 \\ 100 + 64 &= 2z^2 + 72 \\ z^2 &= 46 \\ z &= \sqrt{46}. \end{aligned}$$



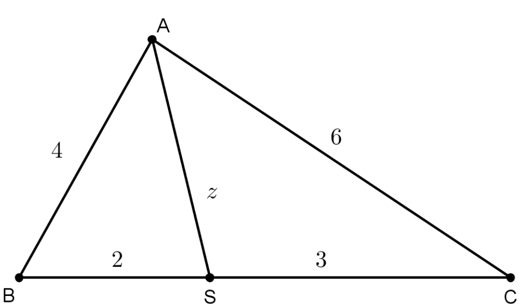
11. Como AS é bissetriz do triângulo ABC, vamos usar o teorema da bissetriz interna:

$$\begin{aligned} \frac{BS}{4} &= \frac{5 - BS}{6} \\ 6BS &= 20 - 4BS \\ BS &= 2. \end{aligned}$$

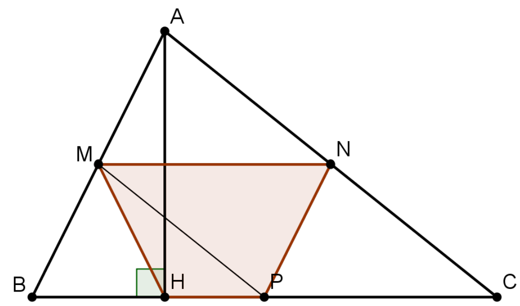
Aplicando a Relação de Stewart, temos:

$$\begin{aligned} a^2y + b^2x &= z^2c + cxy \\ 4^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 2 &= 5z^2 + 5 \cdot 2 \cdot 3 \\ 48 + 72 &= 5z^2 + 30 \\ z^2 &= 18 \\ z &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

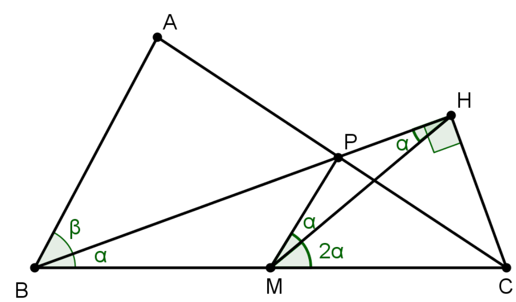
Portanto, a medida da bissetriz AS é $3\sqrt{2}$.



12. (Extraído da Vídeo Aula) Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH, temos $AH^2 = 8^2 - 2^2$, segue que $AH = 2\sqrt{15}$. A área do triângulo ABC é $\dfrac{10 \cdot 2\sqrt{15}}{2} = 10\sqrt{15}$. Se P e N são pontos médios dos lados AC e BC do triângulo ABC, a área do triângulo NPC é $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 10\sqrt{15} = \dfrac{5\sqrt{15}}{2}$. De forma análoga, temos que as áreas dos triângulos AMN e BMP também são iguais a $\dfrac{5\sqrt{15}}{2}$. Como $BH = 2$ e $BP = 5$, então a área do triângulo BHM é $\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$. Assim, a área do quadrilátero $HMNP$ é $10\sqrt{15} - 2 \cdot \dfrac{5\sqrt{15}}{2} - \sqrt{15} = 4\sqrt{15}$.

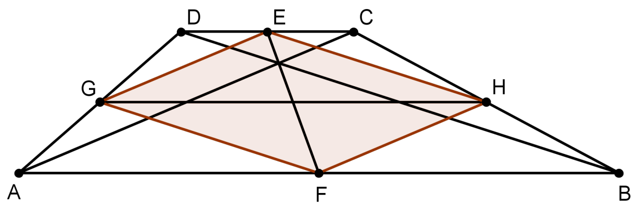


13. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos marcar o ponto médio M de BC. Como P é ponto médio de AC, então PM é base média do triângulo ABC, de base AB, ou seja, $PM = \dfrac{AB}{2} = PH$. Se MH é mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo BHC, então $BM = MH$, ou seja, o triângulo BMH é isósceles e, por consequência, $\angle BHM = \angle MBH = \alpha$. Além disso, se $PH = PM$, o triângulo MPH é isósceles e $\angle PMH = \angle PHM = \angle BHM = \alpha$. Pelo teorema do ângulo externo, $\angle HMC = 2\alpha$, mas PM é paralelo a AB e, por consequência, $\angle ABC = \angle PMC$, ou seja, $\alpha + \beta = 3\alpha$, segue que $\dfrac{\beta}{\alpha} = 2$.

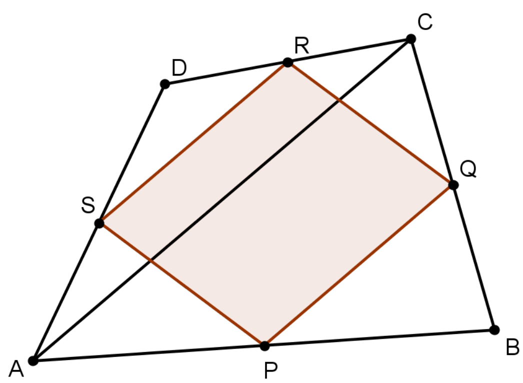


14. (Extraído Vídeo Aula) Chamando as diagonais AC e BD de p e q, respectivamente, temos, pela Relação de Euler para trapézios, $p^2 + q^2 = 7^2 + 5^2 + 2 \cdot 14 \cdot 4 = 186$. Sejam F e E os pontos médios dos lados AB e CD, respectivamente, e G e H os pontos médios dos lados DA e BC, respectivamente, temos que HF e EG são bases médias dos triângulos ABC e ADC, respectivamente, tendo ambos a metade da medida de AC, ou seja, $\dfrac{p}{2}$, e sendo paralelos entre si; temos, de forma análoga, os segmentos EH e FG paralelos e medindo $\dfrac{q}{2}$. Dessa forma, chegamos ao paralelogramo $EGFH$, cujas diagonais são EF e $GH = \dfrac{14+4}{2} = 9$, pois é base média do trapézio $ABCD$. Lembrando que as diagonais do paralelogramo se interceptam nos seus pontos médios, vamos aplicar a Relação de Euler para este paralelogramo:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]\cdot 2 &= 9^2+EF^2+4\cdot 0\\
\frac{p^2+q^2}{4}\cdot 2 &= 81+EF^2\\
\frac{186}{4}\cdot 2 &= 81+EF^2\\
EF^2 &= 93-81\\
EF &= 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$



15. Seja o paralelogramo $ABCD$ e P, Q, R e S os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. PQ é base média do triângulo ABC, de base AC, ou seja, PQ é paralelo a AC e mede a metade da medida de AC; pelo triângulo ACD, o mesmo acontece com RS, ou seja, PQ é paralelo e tem mesma medida de RS. Isto é suficiente para mostrarmos que o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo.



Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com