Equações Algébricas – Propriedades das Raízes

Coeficientes Reais

Material elaborado por Letícia Mattos.

Equações Algébricas – Propriedades das Raízes
Coeficientes Reais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere o polinômio P dado por

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3.$$

Sabendo que $P(3) = 0$, determine as outras duas raízes de P.

Exercício 2. Considere o polinômio P dado por

$$P(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 4x + 4.$$

Sabendo que $P(i) = P(2i) = 0$, determine as outras três raízes de P.

Exercício 3. Seja

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

um polinômio com coeficientes inteiros. Suponha que $P(0)$ e $P(1)$ são ambos ímpares. Prove que P não possui raízes inteiras.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Seja p um polinômio de grau 4 tal que

$$p(n) = \frac{720}{n}$$

para todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine $p(6)$.

Exercício 5. Seja P um polinômio de grau n, com n ímpar, e com coeficientes inteiros. Suponha que existam inteiros distintos a_1, $a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n) = 1.$$

Prove que P não pode ser escrito como o produto de dois polinômios com coeficientes inteiros.

Exercício 6. Considere

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

um polinômio cujas raízes são todas reais. Prove que

$$(n-1)(a_{n-1})^2 \geq 2na_{n-2}.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Seja n um inteiro positivo e P um polinômio de grau n. Suponha que

$$P(k) = 3^k,$$

para todo $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$. Determine $P(n+1)$.
Dica: considere o polinômio

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} 2^k,$$

onde $\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$.

Exercício 8. Sejam a, q e r inteiros quaisquer, com $a \neq 0$. Prove que

(a) a divide $(aq+r)^n - r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Generalize o item (a) e mostre que, para todo polinômio P, a divide $P(aq+r) - P(r)$.

Exercício 9. Sejam a, b e c inteiros, com $a \neq 0$. Suponha que o polinômio

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é tal que $f(f(1)) = 1$ e tal que $f(x) = x$ tem solução nos inteiros. Prove que $f(1) = 1$.
Dica: use o exercício anterior.

Respostas e Soluções.

1. Como $P(3) = 0$, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de P e da expressão acima nas variáveis a, b, c e x, ficamos com o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -3 \\ c - 3b = 1 \\ -3c = -3. \end{cases}$$

Do sistema acima, segue que $a = c = 1$ e $b = 0$. Logo, ficamos com

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(x^2+1) \\ &= (x-3)(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Assim, segue que as raízes de P são 3, $-i$ e i.

2. Primeiro, lembre-se que se $a + bi$ é raíz de P, então o complexo conjugado $a - bi$ também deve ser raíz de P. Assim, uma vez que $P(i) = P(2i) = 0$, também temos $P(-i) = P(-2i) = 0$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-i)(x+i)(x-2i)(x+2i)(ax+b) \\ &= (x^2+1)(x^2+4)(ax+b) \end{aligned}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Expandindo o produto acima, ficamos com

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^4+5x^2+4)(ax+b) \\ &= ax^5 + bx^4 + 5ax^3 + 5bx^2 + 4ax + 4b. \end{aligned}$$

Observe que o coeficiente do termo x^5 é igual a a e o coeficiente do termo x^4 é igual a b. Disso, segue que o polinômio $x + 1$ divide $P(x)$ e, portanto segue que -1 é raíz de P. Concluímos que as raízes de P são $i, -i, 2i, -2i$ e -1.

3. Suponha por contradição que P tenha uma raíz $r \in \mathbb{Z}$. Então, podemos escrever $P(x) = (x-r)q(x)$, onde q é um polinômio de grau $n-1$. Como $P(0)$ e $P(1)$ são ambos ímpares, então $(1-r)q(1)$ e $-rq(0)$ são ambos ímpares também. Em particular, devemos ter $1-r$ e r ímpares! Isso é uma contradição, pois $r-1$ e r têm paridades diferentes.

4. Defina $q(x) := xp(x) - 720$. Observe que q é um polinômio de grau 5 com raízes $1, 2, 3, 4$ e 5. Assim, podemos escrever

$$q(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5).$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Mas, também temos que

$$p(x) = \frac{q(x) + 720}{x}$$

deve ser um polinômio e então $q(x) + 720$ não pode ter termo constante. Como o termo constante de $q(x)$ é igual a $-(5!)$ e $720 = 6!$, segue que $a = 6$. Assim, ficamos com

$$p(x) = \frac{6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 720}{x}$$

Substituindo $x = 6$ na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} p(6) &= \frac{2 \cdot 6!}{6} \\ &= 240. \end{aligned}$$

5. Suponha por contradição que P pode ser escrito como o produto de dois polinômios não-constantes com coeficientes inteiros, digamos, Q e R: $P(x) = Q(x)R(x)$. Então, devemos ter

$$P(a_i) = R(a_i) = Q(a_i) = 1$$
$$\text{ou}$$
$$P(a_i) = -R(a_i) = -Q(a_i) = 1.$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Em ambos os casos, $R(a_i) = Q(a_i)$. Logo, temos que $R(x) - Q(x) = 0$ para n valores de x. Mas R e Q têm grau estritamente menor que n. Então, devemos ter $R = Q$ e então podemos escrever

$$P(x) = (R(x))^2.$$

Mas, o grau de P é ímpar! Então P não pode ser igual a R^2, uma contradição.

6. Denote por $r_1, r_2, \ldots, r_n$ as raízes de P. Como o coeficiente de x^n em P é igual a 1, podemos escrever

$$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n).$$

Efetuando o produto acima e comparando coeficientes, podemos ver que

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} r_i \qquad \text{e} \qquad a_{n-2} = \sum_{i>j} r_i r_j.$$

A segunda soma acima é sobre pares $\{i, j\}$. Assim, é suficiente provar que

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 \geq 2n \sum_{i>j} r_i r_j. \qquad (1)$$

Para provar a desigualdade acima, primeiro observe que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + 2\sum_{i>j} r_i r_j.$$

Assim, temos que a desigualdade (1) é equivalente a

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \geq 2\sum_{i>j} r_i r_j.$$

E a desigualdade acima é equivalente a

$$\sum_{i<j} (r_i - r_j)^2 \geq 0.$$

A desigualdade acima é verdadeira quando todas as raízes são reais, como queríamos.

7. Considere o polinômio

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} 2^k,$$

onde $\binom{x}{k}$ é definida por

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Note que

$$\binom{\ell}{k} = 0 \text{ se } \ell \in \mathbb{N} \text{ e } \ell < k.$$

Disso segue que, para todo $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, temos

$$\begin{aligned} Q(\ell) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\ell}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} 2^k. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema do binômio de Newton, segue que

$$Q(\ell) = 3^\ell,$$

para todo $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Agora, observe que Q e P são dois polinômios de grau n e

$$P(\ell) - Q(\ell) = 0$$

para todo $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Como $P - Q$ tem grau menor ou igual a n e $P(x) - Q(x) = 0$ para $n + 1$ valores de x, concluímos que $P = Q$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k - 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Pelo teorema do binômio de Newton, segue que $P(n+1) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

8.

(a) Pelo teorema do binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned} (aq+r)^n - r^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (aq)^i r^{n-i} - r^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (aq)^i r^{n-i}. \end{aligned}$$

Como a divide $(aq)^i r^{n-i}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, segue que a divide $(aq+r)^n - r^n$, como queríamos.

(b) Seja P um polinômio dado por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Assim, $P(aq+r) - P(r)$ pode ser escrito como

$$P(aq+r) - P(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i \big((aq+r)^i - r^i \big).$$

Pelo item (a), a divide todas as parcelas da soma acima. Isso conclui nossa prova.

9. Suponha por contradição que $f(1) \neq 1$ e seja $r \neq 1$ um inteiro tal que $f(r) = r$. Pelo exercício anterior, temos que $r - 1$ divide $f(r) - f(1)$. Note também que $f(r) = r \neq f(1)$, caso contrário, teríamos $f(r) = f(f(1)) = 1$, o que não acontece já que $f(r) = r \neq 1$. Como $f(r) \neq f(1)$, pelo exercício anterior, também temos que $f(r) - f(1)$ divide $f(f(r)) - f(f(1)) = r - 1$. Resumindo, temos até agora:

$$r - 1 \mid f(r) - f(1) \qquad \text{e} \qquad f(r) - f(1) \mid r - 1.$$

A notação $a \mid b$ significa a divide b. Isso implica que temos dois casos a analisar:

(a) $f(r) - f(1) = r - 1$: como $f(r) = r$, neste caso temos $f(1) = 1$, o que é uma contradição.

(b) $f(r) - f(1) = -(r - 1)$: como $f(r) = r$, neste caso temos $f(1) = 2r - 1$. Como $f(f(1)) = 1$, também temos que $f(2r - 1) = 1$. Assim, ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f(1) = 2r - 1 \\ f(r) = r \\ f(2r - 1) = 1. \end{cases}$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} 1 - r = f(r) - f(1) &= a(r^2 - 1) + b(r - 1) \\ &= (r - 1)\big(a(r+1) + b\big). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por $r - 1$ e rearranjando termos, ficamos com

$$b = -1 - ar - a.$$

Por um lado, $f(1) = a + b + c$. Por outro lado, $f(1) = 2r - 1$. Usando a expressão que obtemos para b, segue que

$$a + b + c = 2r - 1 \Longrightarrow c = ar + 2r.$$

Como $f(2r - 1) = 1$, também temos que

$$a(2r-1)^2 + b(2r - 1) + c = 1.$$

Substituindo acima os valores encontrados para b e c, ficamos com

$$a(2r-1)^2 - (1 + ar + a)(2r - 1) + ar + 2r = 1.$$

Expandindo os produtos acima e rearranjando os termos, podemos ver que a equação acima é equivalente a

$$a(r-1)^2 = 0.$$

Isso é uma contradição, pois supomos que $r \neq 1$ e $a \neq 0$.

Material elaborado por Letícia Mattos.