Equações Algébricas – Propriedades das Raízes

Relações de Girard

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Material elaborado por Letícia Mattos.

Equações Algébricas – Propriedades das Raízes
Relações de Girard

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere o polinômio

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

Sabendo-se que $P(1) = 0$, encontre as outras raízes de P.

Exercício 2. Sejam a, b e c inteiros distintos. Prove que, se a, b e c são raízes do polinômio

$$P(x) = x^3 + px + q,$$

então $a + b + c = 0$.

Exercício 3. Seja P um polinômio dado por

$$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 9x + 12.$$

Sejam p, q e r as três raízes de P. Calcule $p^3 + q^3 + r^3$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Seja P um polinômio dado por

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

e seja Q um polinômio cujas raízes são iguais ao quadrado das raízes de P. Calcule $Q(2)$.

Exercício 5. Encontre todos os valores de $k \in \mathbb{Z}$ para os quais a equação

$$kx^2 + (4k - 2)x + (4k - 7) = 0$$

tenha apenas soluções inteiras.

Exercício 6. Sejam a, b e c raízes do polinômio $P(x) = x^3 + 3x + 1$. Utilizando as relações de Girard, calcule o valor da expressão

$$\frac{a^2}{(5b+1)(5c+1)} + \frac{b^2}{(5a+1)(5c+1)} + \frac{c^2}{(5a+1)(5b+1)}.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Sejam a, b e c raízes do polinômio P dado por

$$P(x) = x^3 + 20x^2 + 1x + 5.$$

Calcule o valor da expressão $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.

Exercício 8. Sejam a, b, r e s números reais. Suponha que $1/r$ e $1/s$ sejam soluções da equação

$$x^2 - ax + b = 0$$

e que a e b sejam soluções da equação

$$x^2 - rx + s = 0.$$

Sabendo-se que $a > 0$, encontre o valor de a.

Exercício 9. Seja P um polinômio não-constante que satisfaz a relação

$$P(z^2) + P(z)P(z+1) = 0$$

para todo $z \in \mathbb{R}$. Prove que 0 e 1 são as únicas raízes de P.

Respostas e Soluções.

1. Vamos utilizar as relações de Girard. Se r_1 e r_2 são as outras raízes de P, então

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-r_1)(x-r_2)(x-1) \\ &= x^3 - (1+r_1+r_2)x^2 + (r_1r_2 + r_2 + r_1)x - r_1r_2. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{cases} r_1r_2 = 6 \\ r_1 + r_2 = -5. \end{cases}$$

Podemos ver que $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$ satisfazem o sistema de equações acima. Concluímos que -2 e -3 são as outras raízes de P.

2. Se a, b e c são raízes de P, podemos expressar P como

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc. \end{aligned}$$

Mas, observe que o coeficiente de x^2 em P é igual a 0. Portanto, devemos ter

$$a + b + c = 0,$$

como queríamos.

3. Se p, q e r são raízes de P, podemos expressar P como

$$\begin{aligned} P(x) &= 4(x-p)(x-q)(x-r) \\ &= 4x^3 - 4(p+q+r)x^2 + 4(pq+pr+qr)x - 4pqr. \end{aligned}$$

Como o coeficiente de x^2 em P é igual a 5 e o de x é igual -9, ficamos com

$$p+q+r = -5/4 \qquad \text{e} \qquad pq+pr+qr = -9/4 \tag{1}$$

Agora, observe que

$$(p+q+r)^2 = p^2+q^2+r^2+2(pq+pr+qr). \tag{2}$$

Combinando as equações (1) e (2), obtemos

$$p^2+q^2+r^2 = \frac{97}{16}.$$

Por simplicidade, denote $a_i := p^i + q^i + r^i$ para todo $i \in \{1,2,3\}$. Por um lado, temos $P(p) + P(q) + P(r) = 0$. Por outro lado

$$P(p) + P(q) + P(r) = 4a_3 + 5a_2 - 9a_1 + 36.$$

Substituindo na equação acima os valores $a_2 = 97/16$ e $a_1 = -5/4$ que obtivemos anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} 4a_3 &= -5 \cdot \frac{97}{16} - 9 \cdot \frac{5}{4} - 36 \\ &= -\frac{1241}{16}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $p^3 + q^3 + r^3 = 1241/64$.

4. Sejam a, b e c as raízes de P. Podemos expressar P como

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{cases} a+b+c = 6 \\ ab+ac+bc = 11 \\ abc = 6. \end{cases}$$

Vamos testar se a, b c c podem ser números naturais. Se $abc = 6$ e a, b e c são naturais, então devemos ter $\{1,2,3\} = \{a,b,c\}$, uma vez que a, b e c são divisores de 6. Sem perda de generalidade, assuma que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Note que as outras duas equações são satisfeitas para esses valores. Portanto, concluímos que as raízes de P são 1, 2 e 3.
Concluímos que o polinômio Q é dado por

$$Q(x) = (x-1)(x-4)(x-9).$$

Logo, segue que $Q(2) = 14$.

5. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sejam a_k e b_k as raízes do polinômio $P_k(x) := kx^2 + (4k-2)x + (4k-7)$. Queremos descobrir os valores de k para os quais $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. Para isso, vamos supor que $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ e vamos expressar P_k como

$$\begin{aligned} P_k(x) &= k(x-a_k)(x-b_k) \\ &= kx^2 - (a_k+b_k)kx + a_kb_kk. \end{aligned}$$

Comparando coeficientes, temos

$$\begin{cases} -(a_k+b_k)k = 4k-2 \\ a_kb_kk = 4k-7. \end{cases}$$

Note que $k = 0$ não nos dá soluções inteiras para a equação. Logo, podemos assumir $k \neq 0$. Agora, vamos analisar divisibilidades. Na primeira equação, note que o lado esquerdo é divisível por k, e portanto o lado direito também deve ser divisível por k. Disso concluímos que k deve dividir 2. Similarmente, note que o lado esquerdo da segunda equação é divisível por k, e portanto o lado direito também deve ser divisível por k. Disso concluímos que k deve dividir 7.
Quais números inteiros dividem 2 e 7 ao mesmo tempo? Apenas 1 e -1! Agora que temos esses dois candidatos, vamos testar se eles de fato nos dão soluções inteiras. Veja que

$$P_1(x) = x^2 + 2x - 3 \qquad \text{e} \qquad P_{-1}(x) = -x^2 - 6x - 11.$$

Podemos ver que P_{-1} não possui raízes inteiras. Por outro lado, temos

$$P_1(x) = (x+3)(x-1).$$

Concluímos que o único valor de k para o qual P_k possui raízes inteiras é $k = 1$.

6. Colocando as frações sob um denominador comum, podemos ver que a expressão desejada é igual a

$$S := \frac{5\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(5a+1)(5b+1)(5c+1)}.$$

Por outro lado, pelas relações de Girard, temos

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+ac+bc=3 \\ abc=-1. \end{cases} \tag{3}$$

Além disso, como $P(a)+P(b)+P(c)=0$, também temos que

$$(a^3+b^3+c^3)+3(a+b+c)+3=0.$$

Por (3), isso nos dá

$$a^3+b^3+c^3=-3.$$

Também conseguimos encontrar o valor de $a^2+b^2+c^2$ através das relações de Girard. Note que

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc).$$

Assim, por (3) também temos que

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= -2(ab+ac+bc) \\ &= -6. \end{aligned}$$

Concluímos que o numerador de S é igual a $5\cdot(-3)-6=-21$. Para o denominador, primeiro observe que a expressão $(5a+1)(5b+1)(5c+1)$ é igual a

$$125abc+25(ab+ac+bc)+5(a+b+c)+1.$$

Novamente pelas relações de Girard em (3), segue que

$$\begin{aligned} (5a+1)(5b+1)(5c+1) &= -125+25\cdot 3+1 \\ &= -49. \end{aligned}$$

Concluímos que

$$S=\frac{-21}{-49}=\frac{3}{7}.$$

7. Observe que podemos escrever $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ como

$$(a-i)(a+i)(b-i)(b+i)(c-i)(c+i). \tag{4}$$

Por outro lado, podemos escrever $P(x)$ como

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c) \tag{5}$$

A utilidade de escrever $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ como em (4) vem agora. Comparando (4) e (5), observe que

$$P(i)\cdot P(-i)=(a-i)(a+i)(b-i)(b+i)(c-i)(c+i). \tag{6}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned} P(i) &= i^3+20i^2+i+5 \\ &= -15. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(-i) &= (-i)^3+20(-i)^2-i+5 \\ &= -15. \end{aligned}$$

Assim, segue que o valor da expressão $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ é igual a $-15\cdot(-15)=225$.

8. Se $1/r$ e $1/s$ são soluções da equação $x^2-ax+b=0$, pelas relações de Girard temos que

$$\begin{cases} 1/r+1/s=a \\ rs=1/b. \end{cases} \tag{7}$$

Analogamente, como a e b são soluções da equação $x^2-rx+s=0$, também temos que

$$\begin{cases} a+b=r \\ ab=s. \end{cases} \tag{8}$$

Dos sistemas (7) e (8), segue que

$$r=a+b=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{rs}.$$

As igualdades acima, segue que

$$r^2s=s+r+1.$$

A equação acima é equivalente a

$$s(r^2-1)=r+1 \iff s(r+1)(r-1)=r+1. \tag{9}$$

Afirmamos que $r\neq 1$. De fato, se $r=-1$, então a segunda equação de (7) nos dá $b=-1/s$. Substituindo esse valor de b na segunda equação de (8), ficamos com $-a=s^2$. Isso implica em $a\leq 0$, o que é uma contradição. Portanto, temos $r\neq 1$, o que prova a nossa afirmação.

Agora que sabemos que $r\neq 1$, podemos inferir da equação (9) que

$$s=\frac{1}{r-1}.$$

Agora vamos combinar os sistemas (7) e (8) e substituir o valor de s por $(r-1)^{-1}$:

$$\begin{aligned} s &= ab \\ &= \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)\cdot\frac{1}{rs} \\ &= \left(\frac{1}{r}+r-1\right)\cdot\frac{r-1}{r} \end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$\frac{1}{r-1}=\left(\frac{1}{r}+r-1\right)\cdot\frac{r-1}{r}. \tag{10}$$

Por outro lado, também temos que

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{r}+\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{r}+r-1. \end{aligned}$$

Agora, vamos expressar a equação (10) em termos da variável a. Note que (10) é equivalente a

$$\left(\frac{1}{r}+r-1\right)^2=\left(\frac{1}{r}+r-1\right)+1.$$

Assim, ficamos com

$$a^2 = a + 1.$$

Como a é positivo e solução da equação acima, concluímos que

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Observação: isso não prova a existência de a. A existência de a foi assumida pelo exercício. Nós provamos que, assumida a existência de a, o único valor possível é $(1+\sqrt{5})/2$.

9. Seja $a \in \mathbb{C}$ tal que $P(a) = 0$. Da relação $P(a^2) + P(a)P(a+1) = 0$, obtemos $P(a^2) = 0$. Por indução, concluímos que

$$P(a^{2^n}) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Como um polinômio não pode ter infinitas raízes, temos que o módulo do número complexo a só pode ser igual a 1 ou 0, isto é, $|a| \in \{0, 1\}$. Além disso, substituindo $z = a - 1$ na relação $P(z^2) + P(z)P(z+1) = 0$, ficamos com

$$P((a-1)^2) = 0.$$

Por indução, também segue que

$$P((a-1)^{2^n}) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Da mesma forma que anteriormente, também devemos ter $|a-1| \in \{0, 1\}$.

Se $|a-1| = 0$ ou $|a| = 0$, então $a \in \{0, 1\}$. Caso contrário, temos

$$|a-1| = |a| = 1.$$

Nesse caso, a distância entre a e 0 é igual a 1 e a distância entre a e 1 também é igual a 1. Assim, os complexos 0, 1 e a formam um triângulo equilátero de lado 1. Portanto, as únicas possibilidades que temos para a nesse caso são $a = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ ou $a = 1/2 - i\sqrt{3}/2$. Assim, concluímos que

$$a \in \left\{0, 1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Como $P(a^2) = 0$, devemos ter que a^2 também deve pertencer ao conjunto acima. Isso acontece somente se $a \in \{0, 1\}$. Assim, concluímos que as raízes de P devem pertencer ao conjunto $\{0, 1\}$.

Agora, afirmamos que 0 não pode ser a única raiz de P. Caso contrário teríamos $P(z) = z^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e então $z^{2n} + z^n(z+1)^n = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, o que seria uma contradição. De forma análoga, concluímos que 1 não pode ser a única raíz de P. Assim, segue que

$$P(1) = P(0) = 0.$$

Material elaborado por Letícia Mattos.