Função Exponencial

Equações Exponenciais

1° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Função Exponencial
Equações Exponenciais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o valor de x nas equações abaixo.

a) $2^x = 32$.

b) $5^x = 125$.

c) $9^x = 27$.

d) $2^x = \dfrac{1}{16}$.

e) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 9$.

f) $7^x = \sqrt{7}$.

g) $0,25^x = 2$.

h) $25^x = \sqrt[3]{5}$.

Exercício 2. Determine o valor de x nas equações abaixo.

a) $10^{x-1} = 1000$.

b) $5^{1-2x} = 25$.

c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x} = \dfrac{16}{81}$.

d) $2^{4x+1} = \sqrt{0,5}$.

Exercício 3. Uma determinada cultura de bactérias dobra sua população a cada hora quando exposta em um meio favorável. Em um determinado momento, essa cultura de bactérias composta de apenas 3 indivíduos é colocada em um meio favorável. Depois de quanto tempo essa população será de 3.072 indivíduos?

Exercício 4. Resolva a seguinte equação:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112.$$

Exercício 5. Determine os valores de x que satisfazem à equação:

$$\frac{2^{2x+1}}{2^{4x-3}} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 6. Determine a soma dos valores de x que satisfazem à equação:

$$25^x - 24 \cdot 5^x - 25 = 0.$$

Exercício 7. Resolvendo a equação exponencial $2^{x+1} + \sqrt{8} = \sqrt{72}$, encontramos um valor para x que pertence ao conjunto:

a) $\mathbb{N}$.

b) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

c) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

d) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercício 8. Quantas raízes reais possui a equação

$$3^{2x^2-7x+5} = 1?$$

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Resolva as equações:

a) $3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 27 = 0$.

b) $2^{2x} = 12 \cdot 2^x - 32$.

Exercício 10. Em um meio de cultura especial, a quantidade de bactérias, em bilhões, é dada pela função Q, definida para $t \geq 0$, por $Q(t) = k \cdot 5^{k \cdot t}$, sendo t o tempo, em minutos, e k uma constante. A quantidade de bactérias, cuja contagem inicia-se com o cálculo de $Q(0)$, torna-se, no quarto minuto, igual a $25 \cdot Q(0)$. Quantos bilhões de bactérias estarão presentes nesse meio de cultura no oitavo minuto?

Exercício 11. Devido à desintegração radioativa, uma massa m_o de carbono 14 é reduzida a uma massa m em t anos. As duas massas estão relacionadas pela fórmula $m = m_o \cdot 2^{\frac{-t}{5.400}}$. Nestas condições, em quantos anos $5g$ da substância serão reduzidos a $1,25g$?

Exercício 12. Os técnicos de um laboratório observaram que uma população de certo tipo de bactérias cresce segundo a função $B(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$, com t sendo medido em horas. Qual o tempo necessário para que ocorra uma reprodução de $6,4 \cdot 10^{10}$ bactérias?

a) $1h$.

b) $3h$.

c) $4h$.

d) $6h$.

e) $16h$.

Exercício 13. Certa substância de um medicamento é eliminada pelo organismo de acordo com a função: $D(t) = D_o\left(\dfrac{9}{10}\right)^{\frac{t}{2}}$, sendo D a quantidade de substância no organismo após t horas da ingestão e D_o a dose inicial. Determine após quantas horas o organismo terá eliminado 19% da dose inicial.

Exercício 14. Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada por $q(t) = q_o \cdot 2^{-0,2t}$, sendo q_o a quantidade inicial de água no reservatório após t meses. A quantidade de meses que a água do reservatório se reduzirá a 25% do que era no início é de:

a) 4.

b) 6.

c) 8.

d) 10.

e) 12.

Exercício 15. A população P de um país no ano t pode ser estimada através da função $P(t) = m \cdot n^{t-2011}$, para $n \neq 0$. Sabendo-se que a população atual desse país é de $15,3$ milhões de habitantes, e que sua taxa anual de crescimento é de 2%, então $\frac{m}{n}$ é igual a:

a) $1,2 \cdot 10^6$.

b) $1,5 \cdot 10^6$.

c) $1,2 \cdot 10^7$.

d) $1,5 \cdot 10^7$.

e) $1,2 \cdot 10^8$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de $R\$1.800,00$, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$. De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais:

a) $7.416,00$.

b) $3.819,00$.

c) $3.709,62$.

d) $3.708,00$.

e) $1.909,62$.

Exercício 17. Dê o conjunto verdade da equação exponencial:

$$3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3^{x^2} = 0.$$

Exercício 18. O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t},$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 minutos, a população será:

a) reduzida a um terço.

b) reduzida à metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

Exercício 19. A soma das raízes reais positivas da equação:

$$4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0, \text{ vale:}$$

a) 2.

b) 5.

c) $\sqrt{2}$.

d) 1.

e) $\sqrt{3}$.

Exercício 20. Resolva a equação

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a) $x = 5$.

b) $x = 3$.

c) $x = \frac{3}{2}$.

d) $x = -4$.

e) $x = -2$.

f) $x = \frac{1}{2}$.

g) $x = -\frac{1}{2}$.

h) $x = \frac{1}{6}$.

2.

a)

$$\begin{aligned} 10^{x-1} &= 1000 \\ 10^{x-1} &= 10^3 \\ x-1 &= 3 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5^{1-2x} &= 25 \\ 5^{1-2x} &= 5^2 \\ 1-2x &= 2 \\ -2x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} &= \frac{16}{81} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{4} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2^{4x+1} &= \sqrt{0,5} \\ 2^{4x+1} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 2^{4x+1} &= \sqrt{2^{-1}} \\ 2^{4x+1} &= 2^{-\frac{1}{2}} \\ 4x+1 &= -\frac{1}{2} \\ 8x+2 &= -1 \\ 8x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

3. Se essa cultura dobra a cada hora, então temos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^t &= 3.072 \\ 2^t &= 1.024 \\ 2^t &= 2^{10} \\ t &= 10. \end{aligned}$$

Portanto, após 10 horas haverá 3.072 indivíduos.

4. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} &= 112 \\ 2^x + 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^2 &= 112 \\ 2^x(1+2+4) &= 112 \\ 2^x &= 16 \\ 2^x &= 2^4 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{2^{2x+1}}{2^{4x-3}} &= \frac{1}{2} \\ 2^{(2x+1)-(4x-3)} &= 2^{-1} \\ (2x+1)-(4x-3) &= -1 \\ -2x+4 &= -1 \\ -2x &= -5 \\ x &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

6. (Extraído da Vídeo Aula) Fazendo $5^x = y$ e, consequentemente $5^{2x} = y^2$, temos:

$$\begin{aligned} 25^x - 24 \cdot 5^x - 25 &= 0 \\ 5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 25 &= 0 \\ y^2 - 24y - 25 &= 0 \\ y_1 &= -1 \\ y_2 &= 25. \end{aligned}$$

Como $x^2 = y$, então $y \geq 0$, ou seja, utilizaremos apenas $x^2 = 25$, segue que $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$. Portanto a soma dos valores de x que satisfazem à referida equação é zero.

7.

$$\begin{aligned}
2^{x+1}+\sqrt{8} &= \sqrt{72}\\
2^x\cdot 2^1+\sqrt{2^3} &= \sqrt{2^3\cdot 3^2}\\
2^x\cdot 2+2\sqrt{2} &= 6\sqrt{2}\\
2^x+\sqrt{2} &= 3\sqrt{2}\\
2^x &= 2\sqrt{2}\\
2^x &= 2^{\frac{3}{2}}\\
x &= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $x \in (\mathbb{Q}-\mathbb{Z})$. Resposta C.

8. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}
3^{2x^2-7x+5} &= 1\\
2x^2-7x+5 &= 0\\
x &= \frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}\\
x &= \frac{7\pm 3}{4}\\
x_1 &= \frac{5}{2}\\
x_2 &= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação possui duas raízes reais. Resposta C.

9.

a) Fazendo $3^x = y$ e, consequentemente, $3^{2x} = y^2$, temos:

$$\begin{aligned}
3^{2x}-28\cdot 3^x+27 &= 0\\
y^2-28y+27 &= 0\\
y_1 &= 1\\
y_2 &= 27.
\end{aligned}$$

Assim, temos $3^x = 1$ ou $3^x = 27$, segue que $x = 0$ ou $x = 3$.

b) Fazendo $2^x = y$ e, consequentemente, $2^{2x} = y^2$, temos:

$$\begin{aligned}
2^{2x} &= 12\cdot 2^x-32\\
y^2-12y+32 &= 0\\
y_1 &= 4\\
y_2 &= 8.
\end{aligned}$$

Assim, temos $2^x = 4$ ou $2^x = 8$, segue que $x = 2$ ou $x = 3$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que $Q(0) = k\cdot 5^{k\cdot 0} = k$. Se $Q(4) = 25\cdot Q(0)$, então:

$$\begin{aligned}
25\cdot k &= k\cdot 5^{k\cdot 4}\\
5^2 &= 5^{4k}\\
2 &= 4k\\
k &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, no oitavo minuto, a quantidade de bactérias será $Q(8) = \frac{1}{2}\cdot 5^{8\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 625 = 312,5$ bilhões.

11. (Extraído da UFAL)

$$\begin{aligned}
1,25 &= 5\cdot 2^{\frac{-t}{5.400}}\\
\frac{5}{4} &= 5\cdot 2^{\frac{-t}{5.400}}\\
2^{-2} &= 2^{\frac{-t}{5.400}}\\
-2 &= -\frac{t}{5.400}\\
t &= 10.800.
\end{aligned}$$

Portanto, o tempo necessário será de 10.800 anos.

12. (Extraído UPE - 2016) Temos:

$$\begin{aligned}
6,4\cdot 10^{10} &= 10^9\cdot 4^{3t}\\
6,4\cdot 10 &= 4^{3t}\\
64 &= 4^{3t}\\
2^6 &= 2^{6t}\\
6 &= 6t\\
t &= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, a reprodução de $6,4\cdot 10^{10}$ bactérias ocorrerá após $1h$. Resposta A.

13. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}
\frac{81}{100}D_o &= D_o\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{t}{2}}\\
\left(\frac{9}{10}\right)^2 &= \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{t}{2}}\\
2 &= \frac{t}{2}\\
t &= 4.
\end{aligned}$$

Portanto, o organismo terá eliminado 19% da substância após 4 horas.

14. (Extraído da Unifor-CE 2016)

$$\begin{aligned}
25\%\cdot q_o &= q_o\cdot 2^{-0,2t}\\
\frac{1}{4} &= 2^{-0,2t}\\
2^{-2} &= 2^{-0,2t}\\
-2 &= -0,2t\\
t &= 10.
\end{aligned}$$

Portanto, depois de 10 meses a quantidade de água no reservatório se reduzirá a 25% do que era no início. Resposta D.

15. (Extraído da UFTM-MG) Como $P(2011) = 15,3\cdot 10^6$, temos que $m = 15,3\cdot 10^6$. Se o crescimento anual é de 2%, então $n = 1,02$. Logo, $\frac{m}{n} = \frac{15,3\cdot 10^7}{1,02} = 1,5\cdot 10^7$. Resposta D.

16. (Extraído do ENEM - 2015) $s(2) = 1.800\cdot(1,03)^2 = R\$1.909,62$. Resposta E.

17. (Extraído do ITA)

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3^{x^2} &= 0 \\ 3 \cdot 5^{x^2} + 3 \cdot 3^{x^2} - 8 \cdot 3^{x^2} &= 0 \\ 3 \cdot 5^{x^2} - 5 \cdot 3^{x^2} &= 0 \\ 3 \cdot 5^{x^2} &= 5 \cdot 3^{x^2} \\ 5^{x^2-1} &= 3^{x^2-1} \end{aligned}$$

A única possibilidade para a igualdade encontrada é que o expoente seja nulo, ou seja, $x^2 - 1 = 0$, segue que $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. $S = \{-1, 1\}$.

18. (Extraído do ENEM - 2016) Após 20 minutos, ou seja, um terço de hora, teremos $p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 40 \cdot 2 = 80$ mil unidades, que é o dobro da quantidade inicial. Resposta D.

19. (Extraído do ITA) Fazendo $2^{x^2} = y$ e, consequentemente, $4^{x^2} = y^2$, temos a nova equação $y^2 - 5y + 4 = 0$, cujas raízes são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Assim, $2^{x^2} = 1$, donde $x_1 = 0$, e $2^{x^2} = 4$, donde $x_2 = -\sqrt{2}$ e $x_3 = \sqrt{2}$. Portanto, a soma das raízes reais positivas da equação é $\sqrt{2}$. Resposta C.

20. Dividindo toda a equação por 9^x, temos $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 2$. Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = y$, ficamos com $y^2 + y - 2 = 0$, cujas raízes são $y_1 = -2$, que não convém, e $y_2 = 1$. Assim, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1$, segue que $x = 0$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com